Homologikus algebra / 2005 ősz

5. Házi feladat

1. * Azt mondjuk, hogy egy R gyűrű rendelkezik az invariáns bázisszámosság (IBN) tulajdonsággal, ha minden M szabad R-modulusra M minden bázisának ugyanaz a számossága. Mutassuk meg, hogy minden kommutatív gyűrű ilyen.

2. ** Adjunk példát olyan gyűrűre, amely nem rendelkezik az IBN tulajdonsággal.

3. Legyenek A, B R-modulusok, $i : A \to B$ monomorfizmus, ekkor A pontosan akkor direkt összeadandója B-nek, ha van olyan $p : B \to A$ leképezés, amelyre $pi = 1_A$.

4. * Minden szabad modulus projektív.

5. * Projektív modulusok direkt öszege szintén projektív.

6. Ha R egy kommutatív gyűrű, akkor két projektív R-modulus tenzorszorzata ismét projektív lesz.

7. * Legyen $r \in R$ rögzített, M tetszőleges R-modulus, és tekintsük a

$$T_0(M) \stackrel{\text{def}}{=} M/rM \ , \ T_1(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{ m \in M \mid rm = 0 \}$$

funktorokat. Mutassuk meg, hogy ketten együtt egy δ-funktort alkotnak.

8. ** Mutassuk meg, hogy minden P projektív modulushoz létezik olyan F szabad modulus, hogy $P \oplus F$ szabad.

9. Az ismert halmazműveletek közül melyik direkt vagy inverz limesz?