Homologikus algebra / 2005 ősz

4. Házi feladat

1. (i) Mutassuk meg az alábbi választás segítségével, hogy a $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ funktor nem egzakt: legyen $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, és vegyük a

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

egzakt sorozatot.
(ii) Hasonlóképpen, igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_R(\_, N)$ sem egzakt. Ehhez tekintsük ismét a

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

sorozatot, és a $N = \mathbb{Z}$ modulust.

2. * Igazoljuk, hogy a $M \otimes_R$ és $\otimes_R N$ funktorok nem balegzaktak.

3. Egy M bal-R-modulust *lapos*nak nevezünk, ha a $\otimes_R N$ funktor egzakt. Mutassuk meg, hogy R egy lapos R-modulus.

4. * Igazoljuk, hogy a torzió abel-csoportok kategóriájában létezik direkt összeg, de nem feltétlenül azonos az adott abel-csoportok mint $\mathbb{Z}$-modulusok direkt összegével.

5. ** Legyen R, S gyűrűk, ${}_RA, {}_SB_R, {}_SC$ modulusok. Mutassuk meg, hogy

$$\mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \ .$$

6. ** Legyenek $F : R-\mathrm{Mod} \longrightarrow S-\mathrm{Mod}$ és $G : S-\mathrm{Mod} \longrightarrow R-\mathrm{Mod}$ funktorok, amelyekre (F, G) adjungált funktorpár.
(i) Bizonyítsuk be, hogy ekkor F balegzakt és G jobbegzakt.
(ii) Mutassuk meg, hogy F megőrzi a direkt limeszeket.