Homologikus algebra / 2005 ősz

3. Házi feladat

1.* (Kígyó-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelynek sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] & C \arrow[r] & C'' &
\end{tikzcd}$$

Mutassuk meg, hogy létezik egy

$$\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$$

egzakt sorozat, ahol $\partial : a'' \mapsto i^{-1}\beta p^{-1}a'' + \operatorname{im}\alpha$.

2. * (Mayer–Vietoris-sorozat, algebrai verzió) Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelynek sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"] & B'_n \arrow[r, "q_n"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r, "j_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ha minden γ_n izomorfizmus, akkor az alábbi sorozat egzakt:

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{(\alpha_n, i_n)} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{j_n - \beta_n} B'_n \xrightarrow{\partial_n \gamma_n^{-1} q_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

3. ** (Mayer–Vietoris-sorozat, topológiai verzió) Legyen X egy topológikus tér (vagy sima sokaság), $X_1, X_2 \subseteq X$, amelyekre igaz, hogy a belsejük uniója X. Ekkor az alábbi sorozat egzakt:

$$\cdots \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

4. (Koszul-kohomológia) Legyen R egy kommutatív gyűrű, $x_1, \ldots, x_n \in R$. Legyen $K_0 = R$, és $K_p = 0$ ha p nincs 0 és n között. Amennyiben $1 \le p \le n$, akkor $K_p = \oplus R e_{i_1 \ldots i_p}$ a szabad $\binom{n}{p}$-rangú R-modulus $\left\{ e_{i_1 \ldots i_p} \,|\, 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n \right\}$ bázissal. A $d : K_p \to K_{p-1}$ differenciált definiáljuk az alábbi módon:

$$d(e_{i_1 \ldots i_p}) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p} \,.$$

Mutassuk meg, hogy $K_\bullet$, az ún, Koszul-komplexus valóban egy komplexus.

5. ** (i) Igazoljuk, hogy egy topológiai homotópia lánchomotópiát indukál.
(ii) Mutassuk meg, hogy homotóp leképezések izomorf leképezéseket indukálnak a (szinguláris) homológiacsoportokon.

6. Ha $f, g : A \longrightarrow A'$ homotóp láncleképezések és F additív funktor, akkor $Ff, Fg : FA \longrightarrow FA'$ szintén homotópok.

7. * Legyen R kommutatív gyűrű, $I \triangleleft R$, M, N R-modulusok. Lássuk be, hogy

$$\begin{aligned} (R/I) \otimes_R M &\cong M/IM \ , \\ M \otimes_R N/I(M \otimes_R N) &\cong M/IM \otimes_R N/IN \ . \end{aligned}$$

8. * Keressünk példát az alábbiakra:
(i) $\mathrm{Hom}\left(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha, B\right) \ncong \coprod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}\,(A_\alpha, B)$.
(ii) $\mathrm{Hom}\left(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha, B\right) \ncong \prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}\,(A_\alpha, B)$.
(iii) $\mathrm{Hom}\left(B, \coprod_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \ncong \coprod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}\,(B, A_\alpha)$.
(iv) $\mathrm{Hom}\left(B, \coprod_{\alpha\in I} A_\alpha, B\right) \ncong \prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}\,(B, A_\alpha)$.

9. * Legyen K egy test, V egy tetszőleges vektortér K felett. A V vektortér duálisát a szokásos módon definiáljuk:

$$V^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_k(V, k) \ .$$

Mutassuk meg, hogy V^* nem mindig izomorf V-vel. (** Számítsuk ki V^* dimenzióját K számosságának és V dimenziójának a függvényében.)

10. * Legyen A jobb-R-modulus, $\{ B_i \,|\, i \in I \}$ bal-R-modulusok egy halmaza. Ekkor a

$$\begin{aligned} \theta : A \otimes_R \coprod B_i &\longrightarrow \coprod (A \otimes_R B_i) \\ a \otimes (b_j) &\mapsto (a \otimes b_j) \end{aligned}$$

leképezés izomorfizmus (és hasonlóképpen, ha az összeg az első változóban van).

11. * Legyen A jobb-R-modulus, $\{ B_i \,|\, i \in I \}$ bal-R-modulusok egy halmaza. Adjunk példát arra, hogy

$$A \otimes_R \prod B_i \ncong \prod (A \otimes_R B_i) \ .$$

12. Legyen A egy torzió abel-csoport. Mutassuk meg, hogy

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0 \ .$$