Homologikus algebra / 2005 ősz

2. Házi feladat

1. Egy $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ komplexust egzaktnak mondunk, ha $\ker f = \operatorname{im} g$.
(i) Lássuk be, hogy egy komplexus pontosan akkor egzakt, ha minden n-re

$$A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n$$

egzakt.
(ii) Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ komplexusok egy rövid egzakt sorozata. Igazoljuk, hogy ha A, B, C közül kettő egzakt, akkor a harmadik is.

2. * (3×3-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagrammot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

amelyben minden oszlop egzakt.
(i) Ha az alsó két sor egzakt, akkor a felső is,
(ii) ha a felső két sor egzakt, akkor az alsó is.

3. ** Határozzuk meg a $H^*_{DR}(S^1;\mathbb{R})$ de Rham-kohomológiacsoportokat.

4. * (Asszociatív algebrák Hochschild-kohomológiája) Legyen R egy kommutatív gyűrű, A egy R-algebra, M pedig egy kétoldali A-modulus. Egy

$$\Phi : A^n \longrightarrow M$$

függvény R-*multilineáris*, ha R-lineáris minden komponensében.
(i) Lássuk be, hogy az R-multilineáris leképezések $C^n(A, M)$ halmaza a (megfelelően értelmezett) összeadásra és R-beli elemekkel való szorzásra nézve R-modulust alkot. A $C^0(A, M)$ modulust M-mel azonosítjuk. A $C^n(A, M)$ modulus elemeit A-n értelmezett M-beli n-koláncoknak nevezzük.
(i) Az n-edik kohatár-homomorfimzus az alábbi módon definiált

$$\delta^{(n)} : C^n(A, M) \longrightarrow C^{n+1}(A, M)$$

leképezés: ha $n = 0$, akkor

$$\left(\delta^{(0)}u\right)(x) = ux - xu \ ,$$

egyébként pedig (ha $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}\left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= x_1\Phi(x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\Phi(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1}\Phi(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} \ .\end{aligned}$$

Az $n \leq 0$ esetben minden modulus és leképezés nulla. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\delta^{(1)}\Phi\right)(x_1, x_2) &= x_1\Phi(x_2) - \Phi(x_1x_2) + \Phi(x_1)x_2 \ , \\ &\text{és} \\ \left(\delta^{(2)}\Phi\right)(x_1, x_2, x_3) &= x_1\Phi(x_2, x_3) - \Phi(x_1x_2, x_3) + \Phi(x_1, x_2x_3) - \Phi(x_1, x_2)x_3 \ ,\end{aligned}$$

továbbá, hogy minden $n \geq 0$ esetén

$$\delta^{(n+1)}\delta^{(n)} = 0.$$

Az ily módon definiált komplexus kohomológiája az ún. Hochschild-kohomológia. Ha G egy tetszőleges csoport, akkor a $\mathbb{Z}G$ csoportalgebra kohomológiacsoportjait a G csoport kohomológiájának szokás nevezni.

5. Ha A egy komplexus, akkor legyen $A[1]$ az a komplexus, amit úgy kapunk, hogy A-ban minden indexet 1-gyel megnövelünk, azaz

$$\left(A^+\right)_n \overset{\text{def}}{=} A_{n-1} \ .$$

Ekkor $H_n(A^+) = H_{n-1}(A)$.

6. * Legyen $f : A \to A'$ egy láncleképezés. Minden n-re legyen

$$M_n = A_{n-1} \oplus A'_n \ ,$$

illetve

$$\begin{aligned}\Delta_n \quad &: \quad M_n \longrightarrow M_{n-1} \\ (a_{n-1}, a'_n) \ &\mapsto \ (-d_{n-1}a_{n-1}, d'_n a'_n + f_{n-1}a_{n-1}) \ .\end{aligned}$$

(*i*) Igazoljuk, hogy (M, Δ) egy komplexus (az f leképezés ún. leképezési cilindere), jelölése: $M(f)$.
(*ii*) Ha $f : A \to A'$ egy láncleképezés, akkor az alábbi sorozat egzakt:

$$0 \to A' \xrightarrow{i} M(f) \xrightarrow{p} A[1] \to 0 \ ,$$

ahol

$$\begin{aligned}i_n : A'_n \quad &\longrightarrow \quad A_{n-1} \oplus A'_n \\ a'_n \quad &\mapsto \quad (0, a'_n) \ ,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}p_n : A_{n-1} \oplus A'_n \quad &\longrightarrow \quad A_{n-1} \\ (a_{n-1}, a'_n) \quad &\mapsto \quad a_{n-1} \ .\end{aligned}$$

(*iii*) Az iménti egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozat összekötő homomorfizmusára

$$\partial_n = f_{*,n} \ .$$