Homologikus algebra / 2005 ősz

1. Házi feladat

1. (i) Ha $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B$ egzakt, akkor f monomorfizmus, és fordítva.
(ii) Ha $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0$ egzakt, akkor f epimorfizmus, és fordítva.
(iii) Ha $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ egzakt, f epi, g monomorfizmus, akkor $B = 0$.
(iv) Amennyiben $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to M_3 \xrightarrow{g} M_4$ egzakt, akkor f pontosan akkor epimorfizmus, ha g monomorfizmus.

2. (i) Bizonyítsuk be a következőt: ha

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0 \quad \text{és} \quad 0 \to C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \to 0$$

egzakt, akkor

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\alpha\psi} D \xrightarrow{\beta} E \to 0$$

szintén.
(ii) Egy (adott esetben mindkét irányban végtelen) sorozat

$$\cdots \to A_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} A_i \xrightarrow{\phi_i} A_{i-1} \to \cdots$$

pontosan akkor egzakt, ha minden i-re

$$0 \to \operatorname{im}\phi_{i+1} \to A_i \to \operatorname{im}\phi_i \to 0$$

egzakt.

3. (*) (i) Legyen $f_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ egy láncleképezés. Mutassuk meg, hogy f határokat határokba, ciklusokat ciklusokba képez, továbbá minden n-re

$$H_n(C_\bullet) \xrightarrow{f_{*,n}} H_n(D_\bullet)$$

R-modulushomomorfizmus.
(ii) Bizonyítsuk be, hogy ha $f_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$, $g_\bullet : B_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ láncleképezések, akkor $(gf)_* = g_* f_*$.

4. Egy f láncleképezés pontosan akkor izomorfizmus **Ch(R-mod)**-ban, ha minden n-re f_n izomorfizmus.

5. (*) Mutassuk meg, hogy a $0 \longrightarrow C_\bullet$ láncleképezés pontosan akkor kváziizomorfizmus, ha $H_n(C_\bullet) = 0$ minden n-re.

6. (*) Számítsuk ki az egypontú tér szinguláris homológiacsoportjait.

7. (**) Legyen $G = (V, E)$ egy véges gráf, I az incidenciamátrixa. Tekintsük a következő komplexust: C_0 legyen a szabad R-modulus a csúcsokon, C_1 a szabad R-modulus az éleken, $C_n = 0$ egyébként. Az egyetlen d_1 nemtriviális differenciált az incidenciamátrixszal való szorzás adja meg. Mi lesz $H_0(C)$ és $H_1(C)$?