

Rásegítő feladatok a *Differenciálegyenletek alkalmazásainak* tanulmányozásához

Tóth János

2005. szeptember 21.

1. Bevezetés

Az alábbiakban az elemi analízis néhány olyan fogalmát és tételét ismételjük át – többnyire példákon keresztül – amelyek szükségesek a differenciálegyenletek tanulmányozásához.

A feladatok és megoldásaik is időnként bővülnek és javulnak, ehhez kérem a T. Olvasó segítségét is.

2. Feladatok

1. Legyen $y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x \in D_y$ mellett: (a) $(\text{id}, y)(x)$, (b) $(y \circ \text{id})(x)$, (c) $(\text{id} \circ y)(x)$.
2. Legyen $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x, y \in D_f$ mellett: (a) $(f \circ \text{pr}_1)(x, y)$, (b) $(f \circ \text{pr}_2)(x, y)$.
3. Legyen $g = (h, k) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x \in D_g$ mellett: (a) $(\text{pr}_1 \circ g)(x)$, (b) $(\text{pr}_2 \circ g)(x)$.
4. Legyen $\tau \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy a τ pontot tartalmazó nyílt intervallumok egyesítése τ pontot tartalmazó nyílt intervallum.
5. Legyen tetszőleges $a \in \mathbb{R}^+$ mellett $y_a(x) := \exp(-2x)$ ($x \in]0, a[$.) Számítsuk ki: $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} y_a$.

6. Legyen $z_a(t) := a \exp(-t)$ ($t \in \mathbb{R}$). Számítsuk ki: $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} z_a$.
7. Adjuk meg az $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni \xi \mapsto \frac{1}{\xi}$ függvény néhány szigorúan monoton csökkenő leszűkítését.
8. Mit mond ki Newton II. axiómája?
9. Lehet-e egy függvény deriváltfüggvénye
- az előjelfüggvény?
 - a Heaviside-féle egységugrás-függvény?
10. Számítsuk ki a deriváltját (hol van értelmezve, hol deriválható?):
- $x \mapsto \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))$,
 - $t \mapsto \frac{L}{\frac{L-m_0}{m_0} \exp(-\lambda L t) + 1}$ ($L, m_0 \in \mathbb{R}^+$ rögzített),
11. Számítsuk ki az első három deriváltját:
- $t \mapsto \mathbf{y}(-\exp(t))$ ($\mathbf{y} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R})$),
 - $s \mapsto z(\cos(s))$ ($z \in \mathcal{C}^3([0, 1], \mathbb{R})$),
12. Igaz-e, hogy ha egy kétszer deriválható függvény
- deriváltja mindenütt nulla, akkor a függvény állandó?
 - deriváltja mindenütt pozitív, akkor a függvény szigorúan monoton növekedő?
 - második deriváltja mindenütt negatív, akkor a függvény (alulról) konkáv?
13. Hol értelmezhető és mi a deriváltfüggvénye az alábbi függvény inverz függvényének: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x + \ln(x)$,
14. Bizonyítsuk be, hogy ha
- $$\mathbb{R}^+ \ni \varphi(t) := \cosh(t) \quad \text{és} \quad \mathbb{R}^+ \ni \psi(t) := \sinh(t),$$

akkor a φ, ψ függvénytér egy valós-valós \mathbf{y} függvény paraméteres megadásának tekinthető, azaz $\mathbf{y} := \psi \circ \varphi^{-1}$ függvényt definiál. Határozzuk meg az \mathbf{y} függvény értelmezési tartományát, és – ahol deriválható, ott – számítsuk ki a deriváltfüggvényét.

15. (a) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot: $p \mapsto 2(p-1) + \exp(-p)$.
 (b) Legyen $A, B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, és vizsgáljuk a $\varphi \mapsto Ae^{-\varphi} - Be^{-\varphi}$ függvényt.

16. Legyen

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto V(x, y) := x^2 + y^2$$

$$\varphi(t) := \cos(t), \quad \psi(t) := \sin(t), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Számítsuk ki a $V \circ (\varphi, \psi)$ összetett függvény deriváltfüggvényét!

17. Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele határozatlan integrálokra, és mint mond ki határozott integrálokra?
18. Hogyan szól (pontosan!) a Newton–Leibniz-tétel?
19. Legyen $\mathbf{u}(p) := 3 \exp(p+1)$ ($p \in \mathbb{R}$) és $f(p, q) := q$ ($(p, q) \in \mathbb{R}^2$). Igazoljuk, hogy $\mathbf{u} = 3 + \int_{-1}^{\cdot} f \circ (\text{id}, \mathbf{u})$.
20. Határozzuk meg az alábbi függvények 1 pontban eltűnő primitív függvényét: (a) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ ($x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$) (b) $\mathbb{R} \ni k \mapsto \cos^3(k) \sin(k)$.
21. Határozzuk meg az alábbi függvények -2 pontban eltűnő integrálfüggvényét: (a) sign (b) $t \mapsto \cos^3(t) \sin(t)$. Ezek közül melyik primitív függvénye valamely függvénynek?
22. Adjunk elégséges feltételt arra, hogy egy integrálfüggvény megfeleljen primitív függvénynek!
23. Vannak-e az alábbi függvénypároknak primitív függvényeik? Ha igen, határozzuk meg közülük azt, amelyik az $(1, 1)$ pontban eltűnik.
- (a) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy))$,
 (b) $(\mathbb{R}^+)^2 \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$,

$$(c) \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

24. Számítsuk ki az alábbi függvény elsőrendű parciálisderivált-függvényeit: $(x, y) \mapsto u(x, y) := \ln(3y^2 - x)\varphi(x + y^2)$, φ tetszőleges deriválható függvény. Ha φ értelmezési tartománya az $]\alpha, \beta[$ nyílt intervallum $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha < \beta)$, akkor melyik az a legbővebb halmaz a síkon, amely a fenti függvény értelmezési tartományának vehető?
25. Számítsuk ki az alábbi függvények összes első- és másodrendű parciálisderivált-függvényét (előtte: értelmezési tartomány!):
 (a) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$, (c) x^y .
26. Tegyük fel, hogy (alkalmas halmazon)

$$x \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = xy. \quad (1)$$

Mit mondhatunk akkor az (alkalmas halmazon; hol?)

$$u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) := z(x, y)$$

összefüggéssel értelmezett u függvényről?

27. Mikor nevezzük vektorok egy halmazát lineárisan függetlennek?
28. Számítsuk ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(c) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(d) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a minden $t \in \mathbb{R}$ mellett értelmezett d_1, d_2 függvényekre:

$$-d_1(t) \exp(2t) + 4d_2(t) \exp(-3t) = 1 + 4t, \quad (2)$$

$$d_1(t) \exp(2t) + d_2(t) \exp(-3t) = \frac{3}{2}t^2. \quad (3)$$

3. Megoldások

1. Figyelembe véve, hogy $\text{id}(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$), és felhasználva a függvény-pár és az összetett függvény értelmezését, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ mellett kapjuk, hogy

$$(a) \quad (\text{id}, \mathbf{y})(x) = (x, \mathbf{y}(x)),$$

$$(b) \quad (\mathbf{y} \circ \text{id})(x) = \mathbf{y}(\text{id}(x)) = \mathbf{y}(x),$$

$$(c) \quad (\text{id} \circ \mathbf{y})(x) = \text{id}(\mathbf{y}(x)) = \mathbf{y}(x).$$

2. Figyelembe véve a projekciók (vetítések) értelmezését:

$$\text{pr}_1(x, \mathbf{y}) := x, \quad \text{pr}_2(x, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \quad ((x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2),$$

és

- (a) ismét használva az összetett függvény definícióját:

$$(f \circ \text{pr}_1)(x, \mathbf{y}) = f(\text{pr}_1(x, \mathbf{y})) = f(x),$$

- (b) illetve

$$(f \circ \text{pr}_2)(x, \mathbf{y}) = f(\text{pr}_2(x, \mathbf{y})) = f(\mathbf{y}) \quad ((x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2; x, \mathbf{y} \in D_f).$$

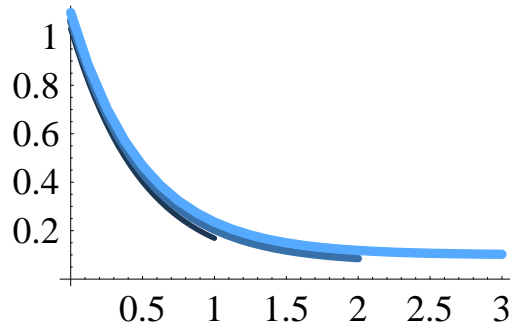
3. Felhasználva a fentieket kapjuk, hogy

$$(a) \quad (\text{pr}_1 \circ g)(x) = \text{pr}_1(g(x)) = h(x),$$

$$(b) \quad (\text{pr}_2 \circ g)(x, \mathbf{y}) = \text{pr}_2(g(x)) = k(x).$$

4. Egyrészt, közös pontot tartalmazó nyílt intervallumok egyesítése nyílt intervallum. Másrészt, a $\tau \in \mathbb{R}$ pontot tartalmazó halmazok egyesítése tartalmazza a τ pontot.

Az $x \mapsto \exp(-2x)$ függvény leszűkítései



1. ábra. a $]0, 1[$, $]0, 2[$ és $]0, 3[$ intervallumra

5. $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}^+} y_\alpha =]0, +\infty[\ni x \mapsto \exp(-2x)$. Részletezve: belátható, hogy mindkét oldal részhalmaza a másiknak.
6. $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}^+} z_\alpha = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ugyanis a megadott függvények grafikonjának minden pontja a felső félsíkban van, és a felső félsík minden pontja rajta van valamelyik függvényen.
7. Az $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni \xi \mapsto \frac{1}{\xi}$ függvény két szigorúan monoton csökkenő leszűkítése például: $\mathbb{R}^+ \ni \xi \mapsto \frac{1}{\xi}$, $\mathbb{R}^- \ni \xi \mapsto \frac{1}{\xi}$.
8. Newton II. axiómája szerint a mozgásmennyiség változása arányos a ható mozgató erővel, és annak az egyenes vonalnak az irányában megy végbe, amelyben az erő hat. Képlettel:

$$(mv)' = F, \quad \text{avagy} \quad \frac{d(m(t)v(t))}{dt} = F(t, s(t), v(t)),$$
 ahol $v := s'$. (Az arányossági tényező – a **tömeg** – igen gyakran állandónak vehető.)
9. Mivel egyik függvény sem rendelkezik a Bolzano–Darboux-féle tulajdonsággal, ezért mindkét kérdésre tagadó a válasz.
10. (a) Az $x \mapsto \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))$ képlettel például a $]0, \pi[$ nyílt intervallumon lehet deriválható függvényt értelmezni, mivel, ha $x \in]0, \pi[$, akkor

$\frac{x}{2} \in D_{\text{tg}}$, és $\text{tg}(\frac{x}{2}) \in D_{\text{ln}}$. Az így értelmezett függvény deriváltfüggvénye pedig az összetett függvény deriválási szabálya szerint: $]0, \pi[\ni x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} = \text{csc}(x)$.

- (b) A $t \mapsto \frac{L}{\frac{L-m_0}{m_0} \exp(-\lambda L t) + 1}$ képlettel értelmezett függvény az L, m_0 paraméterekre tett megszorítás mellett az egész számegyenesen értelmezve van, hiszen $(\frac{L}{m_0} - 1) \exp(-\lambda L t) > -1$, továbbá differenciálható is; deriváltfüggvénye $t \mapsto \frac{\exp(-\lambda L t) L^2 (L - m_0) m_0}{(L + (\exp(-\lambda L t) - 1) m_0)^2}$. Vegyük észre (inkább: lássuk be), hogy a derivált másrészt tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ mellett ezzel egyenlő: $\lambda f(t)(L - f(t))$.

11. (a) A $\varphi : t \mapsto y(-\exp(t))$ ($y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R})$) akárhányszor deriválható függvény egymás után következő deriváltjai:

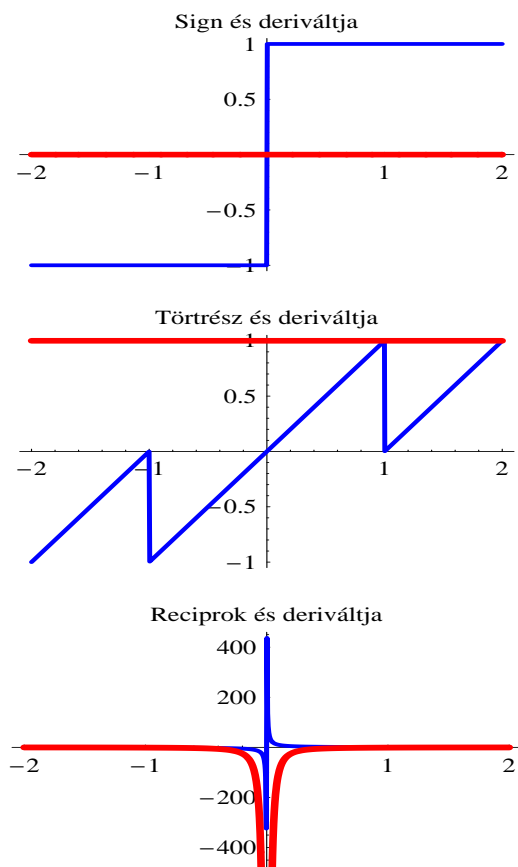
$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \varphi''(t) &= y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \varphi'''(t) &= -y'''(-e^t)e^{3t} + 3y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

- (b) A $\psi : s \mapsto z(\cos(s))$ ($z \in \mathcal{C}^3([0, 1], \mathbb{R})$) akárhányszor deriválható függvény egymás után következő deriváltjai:

$$\begin{aligned}\psi'(s) &= -z'(\cos(s)) \sin(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \\ \psi''(s) &= z''(\cos(s)) \sin^2(s) - z'(\cos(s)) \cos(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \\ \psi'''(s) &= -z'''(\cos(s)) \sin^3(s) + 3z''(\cos(s)) \sin(s) \cos(s) \\ &\quad + z'(\cos(s)) \sin(s) \quad (s \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Zárt intervallumon a deriválhatóságot a szokásnak megfelelően úgy értjük, hogy a függvény a végpontokban „belülről” deriválható.

12. Mindhárom állítás igaz **intervallumon értelmezett** függvényekre. Mindhárom állításra könnyű ellenpéldát adni, ha az értelmezési tartomány nem intervallum, például az előjelfüggvény, a törtrészfüggvény és a reciprokfüggvény segítségével, amint az ábra mutatja.
13. Mivel az $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto f(x) := x + \ln(x)$ függvény deriválható, deriváltja szigorúan pozitív, ezért szigorúan monoton növekedő, így invertálható.



2. ábra. Értelmezési tarományok!

Mivel $\mathbb{R}_f = \mathbb{R}$, ezért inverzének – legyen ez g – értelmezési tartománya az egész valós számegeyenes, és inverze mindenütt deriválható, ugyanis az eredeti függvény deriváltja sehol sem nulla. Továbbá:

$$g'(y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{g(y)}}.$$

Jól látható, hogy a deriváltfüggvény értékét egy adott helyen nem tudjuk explicite előállítani, csak a g inverz függvény segítségével fölírni. Esetenként ez a formula mégis használható.

14. Mivel a $\varphi = \cosh|_{\mathbb{R}^+}$ függvény deriválható, deriváltja szigorúan pozi-

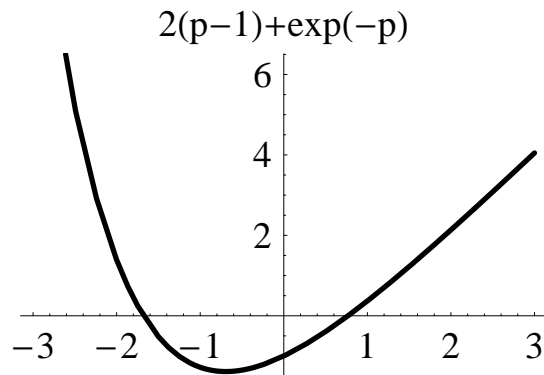
tív, ezért szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Mivel $\mathbb{R}_\varphi = [1, +\infty[$, ezért ez lesz inverzének értelmezési tartománya, s ezen az inverz deriválható, hiszen φ deriváltja sehol sem nulla. Az $y : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény tehát differenciálható függvények kompozíciója lévén maga is differenciálható, és deriváltja az összetett és az inverz függvény deriválására vonatkozó tételek felhasználásával:

$$y'(x) = \frac{(\psi' \circ \varphi^{-1})(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\sinh \circ \sinh^{-1}(x)}{\cosh(\sinh^{-1}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in [1, +\infty[).$$

Ha nem használtuk volna a hipebolikus függvényekre és inverzeikre vonatkozó tudásunkat, akkor csak idáig jutottunk volna:

$$y'(\cosh(t)) = \coth(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

15. (a) Numerikus számolásból kiderül, hogy az $\mathbb{R} \ni p \mapsto f(p) := 2(p-1) + \exp(-p)$ függvénynek két gyöke van: $p_0 = -1.67835, p_1 = 0.768039$ (szemben az előadáson elhangzottakkal...). A függvény az egész számegyenesen folyotons, sőt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai: $\mathbb{R} \ni p \mapsto f'(p) := 2 - \exp(-p)$, $\mathbb{R} \ni p \mapsto f''(p) := \exp(-p)$; s az első nullahelyei: $f'(p_2) = 0 \iff p_2 = -\ln(2) = -0.693147$, míg a második mindig pozitív. Így a függvénynek a p_2 pontban minimuma van, attól balra szigorúan monoton csökkenő, jobbra pedig szigorúan monoton növő; továbbá mindenütt alulról konvex. Határértéke a $\pm\infty$ -ben egyaránt $+\infty$. Mindezek alapján a függvény grafikonja:
- (b) Legyen tehát $A, B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Egyszerű számolás mutatja, hogy az $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f(\varphi) := \varphi \mapsto A e^{-\lambda \varphi} - B e^{-\mu \varphi}$ függvénynek egyetlen gyöke van: $\varphi_0 = \frac{\ln(A/B)}{\lambda - \mu}$, amelyiknek az előjele megegyezik a $(A - B)(\lambda - \mu)$ (Feltehető, hogy $\lambda \neq \mu$, ugyanis ellenkező esetben egyetlen exponenciális függvényről van szó.) A függvény az egész számegyenesen folyotons, sőt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai: $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f'(\varphi) := -\lambda A e^{-\lambda \varphi} + \mu B e^{-\mu \varphi}$, $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f''(\varphi) := \lambda^2 A e^{-\lambda \varphi} - \mu^2 B e^{-\mu \varphi}$; s ezek nullahelyei: $f'(\varphi_1) = 0 \iff \varphi_1 = \frac{\ln(\frac{A}{B})}{\lambda - \mu}$, $f''(\varphi_2) = 0 \iff \varphi_2 = \frac{\ln(\frac{A}{B} \frac{\lambda}{\mu})}{\lambda - \mu}$. Így a függvénynek a φ_1 pontban pontosan akkor van minimumhelye, ha $\lambda > \mu$, és pontosan akkor van maximumhelye, ha $\lambda < \mu$. A függvény az első esetben a szélsőérték helytől balra szigorúan monoton csökkenő, a



3. ábra. Egy lineáris és egy exponenciális függvény összege

szélsőértékhelytől jobbra pedig szigorúan monoton növekedő. A függvény a második esetben a szélsőértékhelytől balra szigorúan monoton növekedő, a szélsőértékhelytől jobbra pedig szigorúan monoton csökkenő. Mivel a φ_2 pontban a függvény harmadik deriváltja nem tűnik le, ezért ez a pont inflexiós pont. A függvény határértéke a $+\infty$ pontban nulla, a $-\infty$ pontban pedig $-\infty$. Mindezek alapján a függvény grafikonja:

16. Mivel V , φ és ψ egyaránt deriválható, ezért a vizsgált összetett függvény is. Továbbá

$$V(\varphi(t), \psi(t)) := \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

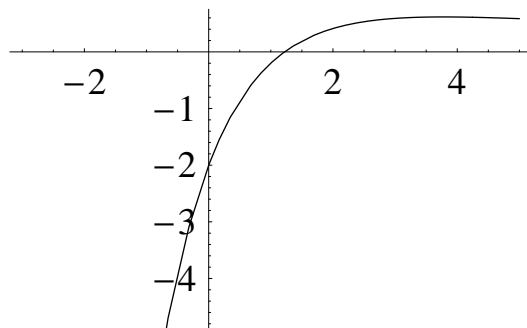
miatt a derivált az egész számegyenesen értelmezett nulla függvény.

17. Egy-egy gyakran használt változatot mondunk ki. Emlékeztetünk arra, hogy $\int_a f$ jelöli az $a \in \mathbb{R}$ valós számot tartalmazó intervallumon értelmezett f függvény a pontban eltűnő primitív függvényét, $\int f$ pedig az f függvény primitív függvényeiből álló halmazt.

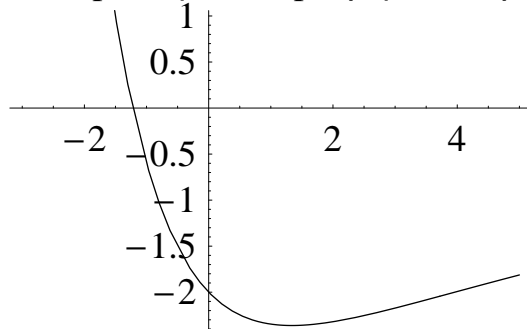
- (a) Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum, és legyen $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá legyen $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre $\mathbb{R}_g \subset J$. Ha az f függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az $(f \circ g)g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és tetszőleges $a \in I$ esetén

$$\int_a (f \circ g)g' = \left(\int_{g(a)} f \right) \circ g.$$

$\varphi \mapsto A \exp(-\lambda \varphi) - B \exp(-\mu \varphi)$; a $\lambda < \mu$ eset



$\varphi \mapsto A \exp(-\lambda \varphi) - B \exp(-\mu \varphi)$; a $\lambda > \mu$ eset



4. ábra. Két exponenciális lineáris kombinációja

Következmény: a két primitív függvényekből álló **halmaz** megegyezése:

$$\int (f \circ g)g' = \left(\int f \right) \circ g,$$

ahol a jobb oldalon a kompozícióképzés elemenként értendő.

- (b) Legyen $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\alpha < \beta, a < b$. Ha az f függvény folytonos az $]a, b[$ intervallumon, a $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow]a, b[$ függvény pedig folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'.$$

18. Legyen $a, b \in \mathbb{R}; a < b$, és tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

integrálható és létezik primitív függvénye. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

ahol F az f függvény **bármely** primitív függvénye: $F \in \int f$ tetszőleges.

19. Írjuk föl a jobb oldalon szereplő, -1 pontban eltűnő primitív függvényt lokális alakban:

$$\int_{-1}^p (f \circ (\text{id}, \mathbf{u}))(s) ds = \int_{-1}^p \mathbf{u}(s) ds = \int_{-1}^p 3 \exp(s + 1) ds.$$

A végső integrál kiszámításával kapjuk a bizonyítandó állítást.

$$3 + 3[\exp(s + 1)]_{-1}^p = 3 + 3(\exp(p + 1) - 1) = 3 \exp(p + 1) = \mathbf{u}(p).$$

20. (a) Nyilván a $\mathbb{R} \ni t \mapsto z(t) := \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ ($x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$) függvény primitív függvényei $\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln(x(t)) + K$ alakúak, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ezek közül az 1 pontban a nullát pontosan az veszi föl, amelyre $\ln(x(1)) + K = 0$, vagyis, amelynél $K = -\ln(x(1))$, így a kívánt primitív függvény: $\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln\left(\frac{x(t)}{x(1)}\right)$.
- (b) A fentiekhez hasonló módon a primitív függvény:

$$\mathbb{R} \ni k \mapsto \frac{\cos^4(k) - \cos^4(1)}{4}.$$

21. (a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \text{abs}(x) - 2$, (b) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\cos^4(k) - \cos^4(2)}{4}$. A második esetben az integrálfüggvény egyúttal primitív függvény is.
22. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$; $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, és tegyük fel, hogy az $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos. Akkor – akárhogyan is választjuk meg az $x_0 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ számot, az f függvény x_0 pontban eltűnő F integrálfüggvénye, azaz

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \ni x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^x f$$

egyúttal az f függvény x_0 pontban eltűnő primitív függvénye is.

23. A megadott függvénpárokkal azonos tartományon értelmezett, valós értékű differenciálható függvényeket keresünk, amelyek parciálderivált-függvényei éppen a megadott függvények.

(a) Mivel $D_{(P,Q)} = \mathbb{R}^2$ **egyszeresen összefüggő** tartomány és

$$\partial_2 P = \partial_1 Q, \quad (5)$$

ezért létezik olyan $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, amelyre

$$\partial_1 F = P$$

és

$$\partial_2 F = Q \quad (6)$$

teljesül. Egy ilyen primitív függvényt például úgy kaphatunk meg, hogy tetszőleges rögzített y mellett kiindulunk $x \mapsto P(x, y)$ primitív függvényeiből, ezek nyilván $x \sin(xy) + \varphi(y)$ alakúak valamilyen φ differenciálható függvénnyel. Ezután megkövetelve az (6) összefüggést $x^2 \cos(xy) + \varphi'(y) = x^2 \cos(xy)$ adódik, hogy φ állandó, akár nullának is vehető. A keresett primitív függvény tehát $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 \cos(xy)$.

(b) Figyelembe véve, hogy

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \quad Q(x, y) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2},$$

nyilvánvalóan $(\mathbb{R}^+)^2 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) := \arctan(\frac{y}{x})$ megfelel primitív függvénynek, s az összes primitív függvény halmaza $\{F + K; K \in \mathbb{R}\}$.

(c) Itt éppúgy, mint az előbb, teljesül (5), viszont $D_{(P,Q)} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nem egyszeresen összefüggő. A primitív függvények most is csak $(x, y) \mapsto F(x, y) := \arctan(\frac{y}{x})$ alakúak lehetnének, de ezek a függvények az egész első koordinátatengelyen nincsenek értelmezve, így **ezen a halmazon** az adott függvénpárnak nem létezik primitív függvénye.

24. Az értelmezési tartomány a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3y^2 - x > 0, \alpha < x + y^2 < \beta\}$$

halmaz tetszőleges részhalmaza, célszerűen leginkább a fenti halmaz **résztartománya**.

Amint az 5. ábráról leolvasható, tartományt pontosan akkor kapunk, ha $\alpha < 0$. Az egész H halmazon értelmezett parciálisderivált-függvények:

$$\partial_1 u(x, y) = \frac{\varphi(x + y^2)}{x - 3y^2} + \ln(-x + 3y^2)\varphi'(x + y^2) \quad (7)$$

$$\partial_2 u(x, y) = -\frac{6y\varphi(x + y^2)}{x - 3y^2} + 2y \ln(-x + 3y^2)\varphi'(x + y^2) \quad (8)$$

25. Értelmezési tartományként célszerű **tartományt** (:=összefüggő, nyílt halmazt) választani.

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbf{a}(x, y) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{a}(x, y) &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \partial_2 \mathbf{a}(x, y) &= -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \partial_1^2 \mathbf{a}(x, y) &= -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} & \partial_2^2 \mathbf{a}(x, y) &= \frac{x(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \\ \partial_{12} \mathbf{a}(x, y) &= \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \frac{2x^2}{y}\} \mapsto \mathbf{b}(x, y) := \tan(\frac{x^2}{y})$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{b}(x, y) &= \frac{2x}{y \cos^2(x^2/y)} & \partial_2 \mathbf{b}(x, y) &= -\frac{x^2}{y^2 \cos^2(x^2/y)} \\ \partial_1^2 \mathbf{b}(x, y) &= 2 \frac{y + 4x^2 \tan(x^2/y)}{y^2 \cos^2(x^2/y)} \\ \partial_2^2 \mathbf{b}(x, y) &= 2x^2 \frac{y \cos(x^2/y) + x^2 \sin(x^2/y)}{y^4 \cos^3(x^2/y)} \\ \partial_{12} \mathbf{b}(x, y) &= -2x \frac{y \cos(x^2/y) + 2x^2 \sin(x^2/y)}{y^3 \cos^3(x^2/y)}. \end{aligned}$$

(c) $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto c(x, y) := x^y$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned} \partial_1 c(x, y) &= x^{y-1} & \partial_2 c(x, y) &= x^y \ln^2(x) \\ \partial_1^2 c(x, y) &= x^{y-2}(y^2 - y) & \partial_2^2 c(x, y) &= x^y \ln^2(x) \\ \partial_{12} c(x, y) &= x^{y-1}(1 + y \ln(x)) \end{aligned}$$

26. Legyen

$$\Xi(x, y) := \ln(x) \quad H(x, y) := \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

A (Ξ, H) függvénpár invertálható, és inverze az

$$X(\xi, \eta) := \exp(\xi) \quad Y(\xi, \eta) := \operatorname{sh}(\eta) \quad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2)$$

összefüggéssel értelmezett függvénpár. Ezekkel $z =: u \circ (\Xi, H)$, vagyis $u =: z \circ (X, Y)$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint (globális alakban) ezt kapjuk: $z' = u' \circ (\Xi, H) \cdot (\Xi, H)'$, aminek megszokottabb (lokális) alakja:

$$(\partial_1 z(x, y), \partial_2 z(x, y)) = (\partial_1 u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2})), \partial_2 u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2}))) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{0}{\sqrt{1 + y^2}} =$$

Mivel innen

$$x \partial_1 z(x, y) = \partial_1 u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) \quad \sqrt{1 + y^2} \partial_2 z(x, y) = \partial_2 u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2})),$$

ezért az eredeti egyenlet így **módosul/transzformálódik**:

$$\partial_1 u(\xi, \eta) + \partial_2 u(\xi, \eta) = \exp(\xi) \operatorname{sh}(\eta). \quad (9)$$

Részletesebben: az újonnan bevezetett u függvényre pontosan akkor áll fenn (9), amikor a z függvényre az (1).

27. Akkor, ha a vektorok valamely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nulla vektor, ha az együtthatók valamennyien nullák.

28. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

	Karakterisztikus polinom $\lambda \mapsto$	Sajátértékek	Sajátvektorok
(a)	$\lambda - \lambda^3$	-1 1 0	$(-1, -1, 2)$ $(-1, 0, 1)$ $(-1, -1, 1)$
(b)	$5 - 4\lambda + \lambda^2$	$2 + i$ $2 - i$	$(2 + i, 1)$ $(2 - i, 1)$
(c)	$4 - 3\lambda^2 - \lambda^3$	-2 -2 1	$(-1, 0, 1)$ $(-1, 1, 0)$ $(1, 1, 1)$
(d)	$6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$	3 2 1	$(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$ $(0, 1, 1)$

A (c) esetben a kétszeres sajátértékhez találtunk két lineárisan független sajátvektort. Keressünk példát arra az esetre, amikor egy kétszeres sajátértékhez nem létezik két lineárisan független sajátvektor.

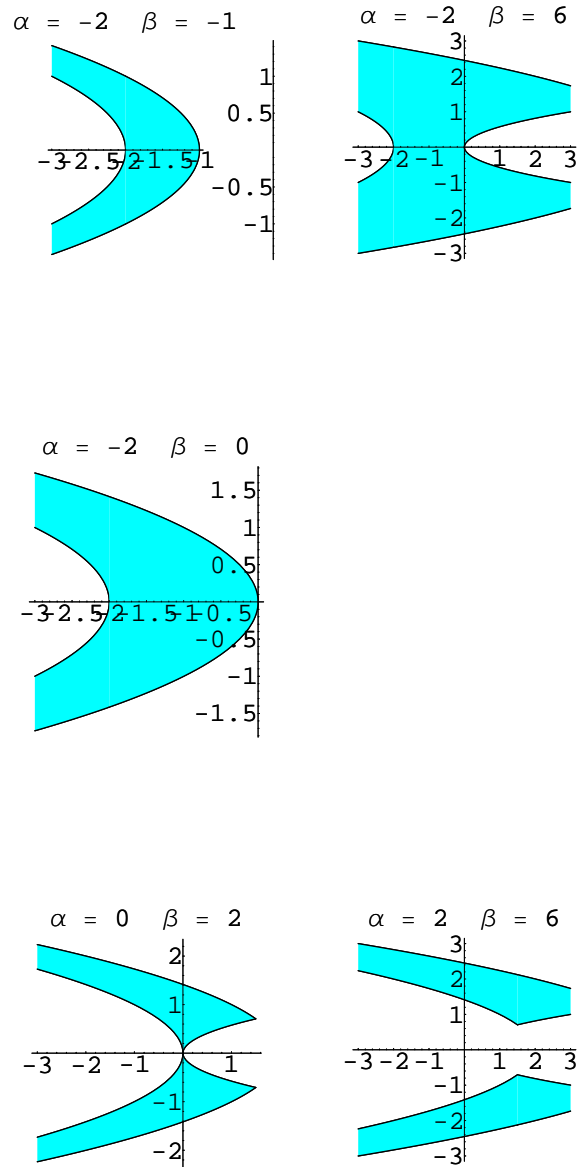
29. Az egyenletrendszer két egyenletét tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén összeadva kapjuk, hogy: $5d_2(t) \exp(-3t) = 1 + 4t + \frac{3}{2}t^2$, ahonnan

$$d_2(t) = \frac{\exp(3t)}{10}(2 + 8t + 3t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezt felhasználva akár az első, akár a második egyenletből adódik:

$$d_1(t) = \frac{\exp(-2t)}{5}(-1 - 4t + 6t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Némi nehézséget annak megértése szokott okozni ennél a feladatnál, hogy (3) **minden** $t \in \mathbb{R}$ **esetén** egy-egy lineáris algebrai egyenletrendszer.



5. ábra. A H halmaz α és β különféle értékeinél