BABEŞ–BOLYAI EGYETEM
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
KOLOZSVÁR

Első- és másodrendű iteratív funkcionál-differenciálegyenletek és -rendszerek

Egri Edit

2008. február

Tanulmányozott problémák

I. Cauchy-feladat iteratív funkcionál-differenciálegyenletre

$$x'(t) = f(t, x(t), x(x(t))), \quad t \in [a, b] \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a_1, a] \tag{2}$$

II. Cauchy-feladat iteratív funkcionál-differenciálegyenlet-rendszerre

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))) \\ y'(t) = g(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))) \end{cases} \quad t \in [a, b] \tag{3}$$

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a_1, a] \tag{4}$$

III. Elsőrendű paraméteres egyenlet

$$x'(t) = f(t, x(t), x(x(t))) + \lambda, \quad t \in [a, b] \tag{5}$$

$$x|_{[a_1,a]} = \varphi, \quad x|_{[b,b_1]} = \psi \tag{6}$$

IV. Másodrendű peremérték-feladat iteratív funkcionál-differenciálegyenletre

$$-x''(t) = f(t, x(t), x(x(t))), \quad t \in [a, b] \tag{7}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t) & t \in [a_1, a] \\ x(t) = \beta(t) & t \in [b, b_1] \end{cases} \tag{8}$$

V. Másodrendű peremérték-feladat iteratív funkcionál-differenciálegyenlet-rendszerre

$$\begin{cases} -x''(t) = f(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))) \\ -y''(t) = g(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))) \end{cases} \quad t \in [a, b] \tag{9}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t), & t \in [a_1, a] \\ x(t) = \beta(t), & t \in [b, b_1] \\ y(t) = \gamma(t), & t \in [a_1, a] \\ y(t) = \delta(t), & t \in [b, b_1] \end{cases} \tag{10}$$

Gyakorlati alkalmazások

▶ **R. D. Driver** ([28], [29], [30]): klasszikus elektrodinamikai modellek (két-test probléma)

▶ **J. Bélair, M. C. Mackey** ([6]): tőzsdeárfolyamok ingadozása

▶ **M. C. Mackey, J. Milton** ([53]): vérsejtek termelése

▶ **K. L. Cooke** ([22]): populációs modellek

▶ **E. Eder** ([33]): kapcsolat a késleltetett kölcsönhatásban résztvevő, töltéssel rendelkező részecskék mozgását leíró modellekkel

1.1 Operátorok metrikus terekben

Értelmezés 1.1.1. *Legyen* (X, d) *és* (Y, ρ) *két metrikus tér. Az* $A : X \to Y$ *operátor:*

(1) teljesíti a Lipschitz feltételt, *ha létezik* $L \geq 0$ *úgy, hogy*

$$\rho(A(x), A(y)) \leq Ld(x, y)$$

minden $x, y \in X$;

(2) kontrakció, *ha* $\exists L \in [0, 1)$, *amelyre teljesíti a Lipschitz feltételt.*

Értelmezés 1.1.2. *Legyen* (X, d) *általánosított metrikus tér* ($d(x, y) \in \mathbb{R}^m_+$.) *Az* $A : X \to X$ *operátor* teljesíti a Lipschitz feltételt a Q mátrixra nézve, *ha* $Q \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R}_+)$ *és*

$$d\big(A(x), A(y)\big) \leq Q \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Értelmezés 1.1.3. *A* $Q \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R}_+)$ mátrix zéróhoz konvergál, *ha* $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = 0_{m\times m}$.

Tétel 1.1.1. *Legyen* $Q \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R}_+)$. *Az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

(i) $Q^n \to 0$, *mikor* $n \to \infty$;

(ii) *a* Q *mátrix sajátértékei a komplex sík nyílt egységsugarú körének belsejében helyezkednek el;*

(iii) *az* $I - Q$ *mátrix nemszinguláris és*

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + \cdots + Q^n + \cdots ,$$

$I \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$*-egységmátrix.*

1.2 Alapvető fixponttételek

Tétel 1.2.1 (Kontrakció elve). *Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $A : X \to X$ kontrakció, L kontrakciós állandóval. Ekkor*

(i) $F_A = \{x^*\}$,

(ii) *ha $x_0 \in X$ tetszőleges, akkor az $x_{n+1} = A(x_n)$ iterációval adódó sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$,*

(iii) $d(x^*, A^n(x_0)) \leq \dfrac{L^n}{1-L}\, d(x_0, A(x_0))$, *minden $n \in \mathbb{N}$-re (a priori hibabecslés).*

Tétel 1.2.2 (Perov). *Legyen (X, d) teljes, általánosított metrikus tér ($d(x, y) \in \mathbb{R}_+^m$) és $A : X \to X$ a teljesíti a Lipschitz-feltételt egy olyan $Q \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R}_+)$ mátrixra nézve, amely zéróhoz konvergál. Ekkor*

(i) $F_A = \{x^*\}$;

(ii) *ha $x_0 \in X$ tetszőleges, akkor az $x_{n+1} = A(x_n)$ iterációval adódó sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$;*

(iii) $d(x_n, x^*) \leq Q^n(I - Q)^{-1} \cdot d(x_0, x_1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

(iv) *ha $B : X \to X$ teljesíti a $d\big(A(x), B(x)\big) \leq \eta$, feltételt, $\forall x \in X, \eta \in \mathbb{R}^m$, és tekintjük az $y_n = B^n(x_0)$, sorozatot, akkor*

$$d(y_n, x^*) \leq (I - Q)^{-1}\eta + Q^n(I - Q)^{-1} d(x_0, x_1).$$

Tétel 1.2.3 (Schauder). *Ha egy teljesen folytonos (kompakt) A operátor az X Banach tér egy Y nem üres, konvex, zárt részhalmazát képezi le önmagára, akkor A-nak létezik fixpontja.*

1.3 Picard-operátorok

Értelmezés 1.3.1. (I. A. Rus [70]) *Legyen* (X, d) *metrikus tér. Az* $A: X \to X$ *operátor* Picard-operátor (PO), *ha létezik* $x^* \in X$ *úgy, hogy:*

(i) $F_A = \{x^*\}$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n(x_0) = x^*$, $\forall\, x_0 \in X$.

1.4 Gyengén Picard-operátorok

Értelmezés 1.4.1. (I. A. Rus [70]) *Adott az* (X, d) *metrikus tér. Az* $A : X \to X$ *operátor* gyengén Picard (GyPO), *ha az* $(A^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat minden* $x \in X$ *esetén konvergál és határértéke fixpontja* A*-nak.*

Értelmezés 1.4.2. (I. A. Rus [72]) *Legyen az* A *operátor GyPO. Segítségével definiáljuk az alábbi operátort*

$$A^\infty : X \to X, \quad A^\infty(x) := \lim_{n\to\infty} A^n(x).$$

Megjegyzés 1.4.1. (I. A. Rus [72]) *Ha* A *GyPO, akkor* $A^\infty(X) = F_A \neq \emptyset$.

Tétel 1.4.1 (GyPO-k jellemzési tétele). (I. A. Rus [70]) *Legyen* (X, d) *metrikus tér,* $A : X \to X$ *operátor. Az* A *operátor akkor és csakis akkor GyPO, ha létezik* X *partíciója, azaz* $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *úgy, hogy*

(i) $A(X_\lambda) \subset X_\lambda$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$;

(ii) $A|_{X_\lambda} : X_\lambda \to X_\lambda$ *PO,* $\forall\, \lambda \in \Lambda$.

1.5 c-gyengén Picard-operátorok

Értelmezés 1.5.1. (I. A. Rus [72], I. A. Rus and S. Mureşan [80])

Legyen A GyPO és $c > 0$. *Az A operátor* c–gyengén Picard (c-GyPO), *ha*

$$d(x, A^{\infty}(x)) \leq c\, d(x, A(x)),\ \forall\ x \in X.$$

Megjegyzés 1.5.1. (I. A. Rus, [72], I. A. Rus and S. Mureşan, [80])

Legyen (X, d) *teljes metrikus tér,* $A : X \to X$ *folytonos operátor. Tegyük fel, hogy létezik* $L \in [0, 1)$ *úgy, hogy*

$$d(A^2(x), A(x)) \leq L\, d(x, A(x)),\ \forall\ x \in X.$$

Ekkor az A operátor c-GyPO, ahol $c = \dfrac{1}{1 - L}$.

1.6 Adatoktól való függés

1.6.1 Folytonos függés

Tétel 1.6.1. (I. A. Rus [68]) *Legyen* (X, d) *teljes metrikus tér és* $A, B : X \to X$ *két operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) *az A operátor kontrakció, L kontrakciós állandóval;*

(ii) $F_B \neq \emptyset$;

(iii) *létezik* $\eta > 0$ *úgy, hogy* $d(A(x), B(x)) \leq \eta, \ \forall\, x \in X.$

Legyen $F_A = \{x_A^*\}$ *és* $x_B^* \in F_B$. *Ekkor* $d(x_A^*, x_B^*) \leq \dfrac{\eta}{1-L}.$

Tétel 1.6.2. (I. A. Rus and S. Mureşan, [80]) *Legyen* (X, d) *metrikus tér és* $A_i : X \to X, \ i = 1, 2$. *Tegyük fel, hogy*

(i) *az* A_i *operátor* c_i*-GyPO,* $i = 1, 2$;

(ii) *létezik* $\eta > 0$ *úgy, hogy* $d(A_1(x), A_2(x)) \leq \eta, \ \forall\, x \in X.$

Ekkor

$$H(F_{A_1}, F_{A_2}) \leq \eta \max(c_1, c_2),$$

ahol $H(Y, Z) := \max\left\{\sup\limits_{y\in Y} \inf\limits_{z\in Z} d(y, z), \sup\limits_{z\in Z} \inf\limits_{y\in Y} d(y, z)\right\}$ *a Pompeiu–Hausdorff távolság.*

Tétel 1.6.3. (I. A. Rus [69]) *Legyen* (X, d) *teljes általánosított metrikus tér, ahol* $d(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$, *és* $A, B : X \to X$ *két operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) *az* A *operátor teljesíti a Lipschitz feltételt egy* $Q \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}_+)$ *mátrixra nézve, amely zéróhoz konvergál;*

(ii) $\exists\, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \ \eta_1, \eta_2 > 0$ *úgy, hogy* $\mathbb{R}^2 \ni d(A(x), B(x)) \leq \eta$

(iii) $F_B \neq \emptyset$.

Legyen $F_A = \{x_A^*\}$ *és* $x_B^* \in F_B$. *Ekkor* $d(x_A^*, x_B^*) \leq (I - Q)^{-1}\eta.$

1.6.2 Paraméter szerinti differenciálhatóság

Tétel 1.6.4. (**Háromszögoperátorok kontrakciós elve** (I. A. Rus [73])) *Legyenek (X,d) és (Y,ρ) metrikus terek, valamint $B : X \to X$, $C : X \times Y \to Y$ operátorok. Tételezzük fel, hogy:*

(i) *(Y,ρ) teljes metrikus tér;*

(ii) *a B operátor PO, $F_B = \{x^*\}$;*

(iii) *$C(\cdot, y) : X \to Y$ folytonos, $\forall\, y \in Y$;*

(iv) *$C(x, \cdot) : Y \to Y$ kontrakció, $\forall\, x \in X$; jelölje y^* a $C(x^*, \cdot)$ egyetlen fixpontját.*

Ekkor az $A : X \times Y \to X \times Y$, $A(x,y) := \big(B(x), C(x,y)\big)$ háromszögoperátor PO és $F_A = \{(x^*, y^*)\}$.

Tétel 1.6.5. (**Háromszögoperátorokra vonatkozó általánosított kontrakciós elv** (I. A. Rus [73])) *Legyen (X,d) általánosított metrikus tér ($d(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^n_+$), valamint (Y,ρ) teljes általánosított metrikus tér ($\rho(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^m_+$). Tekintsük az $A : X \times Y \to X \times Y$ folytonos háromszögoperátort, ahol $A(x,y) = (B(x), C(x,y))$, $\forall\, x \in X$, $y \in Y$; $B : X \to X$, $C : X \times Y \to Y$. Tegyük fel, hogy*

(i) *a B operátor GyPO;*

(ii) *a $C(x,\cdot) : Y \to Y$ $(x \in X)$ operátor teljesíti a Lipschitz feltételt egy $Q \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R}_+)$ mátrixra nézve, amely zéróhoz konvergál;*

Ekkor az A operátor GyPO. Sőt, ha B PO, akkor A is PO.

1.7 Összehasonlítási tételek

Értelmezés 1.7.1. *Azt mondjuk, hogy* $(X, d, \leq)$ rendezett metrikus tér *ha az* (X, d) *metrikus téren értelmezett a „$\leq$" bináris reláció úgy, hogy tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X*-beli konvergens sorozat esetén*

$$x_n \leq y_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Tétel 1.7.1. (I. A. Rus [72], [71]) *Legyen* $(X, d, \leq)$ *rendezett metrikus tér, továbbá* $A : X \to X$*. Tegyük fel, hogy:*

(i) *az* A *operátor növekvő;*

(ii) *az* A *operátor GyPO.*

Ekkor az A^∞ *operátor növekvő.*

Lemma 1.7.1. (**Absztrakt összehasonlítási lemma** (I. A. Rus [71]))
Legyen $(X, d, \leq)$ *rendezett metrikus tér és* $A, B, C : X \to X$ *úgy, hogy:*

(i) $A \leq B \leq C$;

(ii) *az* A, B, C *operátorok GyPO-k;*

(iii) *a* B *operátor növekvő.*

Ekkor $x \leq y \leq z \implies A^\infty(x) \leq B^\infty(y) \leq C^\infty(z)$.

Chapter 2

Cauchy-feladat iteratív funkcionál–differenciálegyenletre

$$x'(t) = f(t, x(t), x(x(t))), \quad t \in [a, b], \tag{2.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a_1, a]. \tag{2.2}$$

(C_1) $a, b, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a < b$;

(C_2) $f \in C([a, b] \times [a_1, b]^2, \mathbb{R})$;

(C_3) $\varphi \in C([a_1, a], [a_1, b])$.

Megoldás: egy olyan $x \in C([a_1, b], [a_1, b]) \cap C^1([a, b], [a_1, b])$ függvény, amely tejesíti (2.1)+(2.2)-t.

2.1 Létezési tétel

Ekvivalencia az alábbi fixpontegyenlettel

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a_1, a], \\ \varphi(a) + \displaystyle\int_a^t f(s, x(s), x(x(s)))\,\mathrm{d}s, & t \in [a, b], \end{cases} \qquad x \in C([a_1, b], [a_1, b]) \tag{2.3}$$

$C([a_1, b], [a_1, b]) \subset C([a_1, b], \mathbb{R})$-en használt metrika: $d_C(x, y) := \max\limits_{t \in [a_1, b]} |x(t) - y(t)|$

Operátor megadása: $A : C([a_1, b], [a_1, b]) \to C([a_1, b], \mathbb{R})$, $\quad A(x)(t) :=$ a (2.3) egyenlet jobb oldala.

Feladat: az $x = A(x)$ fixpontegyenlet vizsgálata a $\big(C([a_1, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_C\big)$ Banach téren.

Tétel 2.1.1. (E. Egri [35]) *Tegyük fel, hogy*

(i) *teljesülnek a* $(\mathrm{C}_1) - (\mathrm{C}_3)$ *feltételek;*

(ii) $m_f, M_f \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy*

(1) $m_f \le f(t, u_1, u_2) \le M_f,\ \forall\ t \in [a, b],\ u_i \in [a_1, b],\ i = 1, 2;$

(2) $a_1 \le \varphi(a) + \min\{0, m_f(b - a)\};$

(3) $\varphi(a) + \max\{0, M_f(b - a)\} \le b.$

Ekkor a $(2.1) + (2.2)$ *feladatnak létezik megoldása.*

2.2 Létezés és egyértelműség

$$C_L([a_1,b],[a_1,b]) := \{x \in C([a_1,b],[a_1,b]) \big| \ |x(t_1)-x(t_2)| \le L|t_1-t_2|, \forall\ t_1,t_2 \in [a_1,b]\}.$$

$$d_B(x,y) := \max_{t\in[a_1,b]} \left(|x(t)-y(t)| \cdot e^{-\tau(t-a_1)}\right), \quad \forall\, x,y \in C_L([a_1,b],[a_1,b]),\ \tau > 0 \tag{2.4}$$

Tétel 2.2.1. (E. Egri [35]) *Tekintjük a* (2.1) + (2.2) *Cauchy-feladatot. Feltételezzük, hogy*

(i) *teljesülnek a* $(\mathrm{C}_1)-(\mathrm{C}_3)$ *feltételek;*

(ii) *létezik* $L_f > 0$ *úgy, hogy* $|f(t,u_1,u_2) - f(t,v_1,v_2)| \le L_f\left(|u_1-v_1| + |u_2-v_2|\right),\ \forall\, t \in [a,b],\ u_i,v_i \in [a_1,b],\ i = 1,2;$

(iii) $\varphi \in C_L([a_1,a],[a_1,b]);$

(iv) $m_f, M_f \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy*

  (1) $m_f \le f(t,u_1,u_2) \le M_f,\ \forall\ t \in [a,b],\ u_i \in [a_1,b],\ i = 1,2;$

  (2) $a_1 \le \varphi(a) + \min\{0, m_f(b-a)\};$

  (3) $\varphi(a) + \max\{0, M_f(b-a)\} \le b;$

(v) $\max\{|M_f|,|m_f|\} \le L;$

(vi) *létezik* $\tau > 0$ *úgy, hogy* $\dfrac{L_f}{\tau}[L + \tau(b-a)e^{\tau(b-a)} + 1] < 1.$

Ekkor a (2.1) + (2.2) *feladatnak egyetlen megoldása van* $C_L([a_1,b],[a_1,b])$*-n.*

Példa

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{12}\,x(t) + \dfrac{1}{15}\,x(x(t)), & t \in [0,2] \\ x(t) = t^2, & t \in [-1,0] \end{cases} \tag{2.5}$$

Ha $x_0(t) = t$, a fokozatos közelítés módszerével kapott sotozat következő tagjai:

$$x_1(t) = 0.075t^2,$$
$$\max_{t\in[0,2]} |x_1(t) - x_0(t)| = 1.7,$$

$$x_2(t) = 0.0020833t^3 + 0.000005625t^5,$$
$$\max_{t\in[0,2]} |x_2(t) - x_1(t)| = 0.28315,$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = {} & 0.81221 \cdot 10^{-34}t^{26} + 0.16294 \cdot 10^{-30}t^{24} + 0.13167 \cdot 10^{-27}t^{22} + 0.53642 \cdot 10^{-25}t^{20} + \\ & + 0.11037 \cdot 10^{-22}t^{18} + 0.24647 \cdot 10^{-20}t^{16} + 0.19618 \cdot 10^{-17}t^{14} + 0.84769 \cdot 10^{-15}t^{12} + \\ & + 0.12558 \cdot 10^{-12}t^{10} + 0.78125 \cdot 10^{-7}t^{6} + 0.43402 \cdot 10^{-4}t^{4}, \end{aligned}$$
$$\max_{t\in[0,2]} |x_3(t) - x_2(t)| = 0.016147,$$

$$\mathrm{grad}(x_4(t)) = 677, \quad \max_{t\in[0,2]} |x_4(t) - x_3(t)| = 0.000676.$$

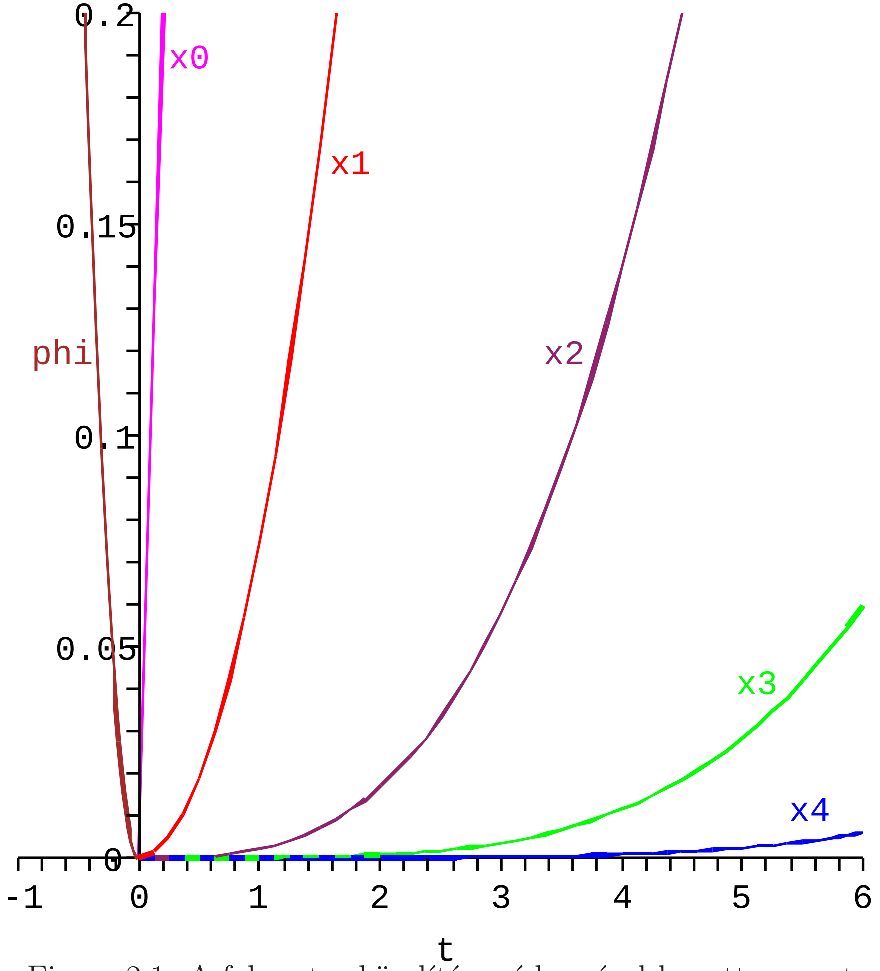


Figure 2.1: A fokozatos közelítés módszerével kapott sorozat

2.3 A megoldások összehasonlítása

A (2.1) differenciálegyenlet ekvivalens az alábbi fixpontegyenlettel:

$$x(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [a_1, a]; \\ x(a) + \displaystyle\int_a^t f(s, x(s), x(x(s)))\, \mathrm{d}s, & t \in [a, b] \end{cases} \tag{2.6}$$

Tekintsük $X := C_L([a_1, b], [a_1, b])$ a megfelelő Bielecki-metrikával és legyen $E : X \to X$,

$$E(x)(t) := \text{a (2.6) egyenlet jobb oldala.} \tag{2.7}$$

Tétel 2.3.1. (E. Egri [35]) *A 2.2.1 tétel feltételei mellett az E operátor GyPO.*

A továbbiakban $(X, d_B, \leq)$ rendezett metrikus tér.

2.3.1 Čaplygin-féle egyenlőtlenségek

Tétel 2.3.2. (E. Egri [35]) *Tegyük fel, hogy a 2.2.1 tétel feltételei teljesülnek. Továbbá az $f(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény növekvő, azaz*

$$f(t, u_1, u_2) \leq f(t, v_1, v_2), \quad \forall\, t \in [a, b],\ u_j \leq v_j,\ j = 1, 2. \tag{2.8}$$

Legyen x a (2.1) differenciálegyenlet növekvő megoldása, y pedig az

$$y'(t) \leq f(t, y(t), y(y(t))), \quad t \in [a, b]$$

differenciálegyenlőtlenség növekvő megoldása.

Ekkor

$$y|_{[a_1,a]} \leq x|_{[a_1,a]} \Longrightarrow y \leq x.$$

2.3.2 Megoldások monotonitása

Tétel 2.3.3. (E. Egri [35]) *Legyenek az $f_i \in C([a,b] \times [a_1,b_1]^2, \mathbb{R})$, $i = 1,2,3$ függvények, melyekre telejesül a 2.2.1 tétel. Tegyük fel, hogy*

(i) $f_1 \leq f_2 \leq f_3$;

(ii) $f_2(t,\cdot,\cdot) : [a_1,b]^2 \to \mathbb{R}$ *növekvő.*

Legyen x_i az $x' = f_i(t,x(t),x(x(t)))$, $t \in [a,b]$, $i = 1,2,3$ egyenlet növekvő megoldása.

Ekkor

$$x_1|_{[a_1,a]} \leq x_2|_{[a_1,a]} \leq x_3|_{[a_1,a]} \Longrightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_3.$$

Chapter 3

Másodrendű peremérték-feladat iteratív funkcionál–differenciál egyenletrendszerre

$$\begin{cases} -x''(t) = f(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))), \\ -y''(t) = g(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))), \end{cases} \quad t \in [a, b]; \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t), \quad t \in [a_1, a], \\ x(t) = \beta(t), \quad t \in [b, b_1], \\ y(t) = \gamma(t), \quad t \in [a_1, a], \\ y(t) = \delta(t), \quad t \in [b, b_1]. \end{cases} \tag{3.2}$$

(C_1) $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{R},\ a_1 \le a < b \le b_1$;

(C_2) $f, g \in C([a, b] \times [a_1, b_1]^4, \mathbb{R})$;

(C_3) $\alpha, \gamma \in C([a_1, a], [a_1, b_1])$ és $\beta, \delta \in C([b, b_1], [a_1, b_1])$;

Megoldás: olyan $(x,y) \in C^2([a,b],[a_1,b_1]^2) \cap C([a_1,b_1],[a_1,b_1]^2)$ függvénypár, amely teljesíti a (3.1) differenciálegyenlet-rendszert a (3.2) feltételekkel.

3.1 Ekvivalens integrálegyenletek

(3.1)+(3.2) ekvivalens az alábbiakkal:

$$x(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [a_1,a], \\ w(\alpha,\beta)(t) + \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s,x(s),x(x(s)),y(s),y(y(s)))\,\mathrm{d}s, & t \in [a,b], \\ \beta(t), & t \in [b,b_1], \end{cases} \tag{3.3a}$$

$$y(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a_1,a], \\ w(\gamma,\delta)(t) + \displaystyle\int_a^b G(t,s) g(s,x(s),x(x(s)),y(s),y(y(s)))\,\mathrm{d}s, & t \in [a,b], \\ \delta(t), & t \in [b,b_1], \end{cases} \tag{3.3b}$$

$(x,y) \in C([a_1,b_1],[a_1,b_1]^2)$, ahol $\forall \varphi \in C([a_1,a],[a_1,b_1])$, és $\forall \psi \in C([b,b_1],[a_1,b_1])$ esetén

$$w(\varphi,\psi)(t) := \frac{t-a}{b-a}\psi(b) + \frac{b-t}{b-a}\varphi(a),$$

valamint $G(t,x)$ a $-x''=\chi,\ x(a)=0,\ x(b)=0,\ x\in C([a,b],\mathbb{R})$ feladat Green-féle függvénye:

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & s\le t;\\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & s\ge t.\end{cases}$$

Ha csak a (3.1) egyenletet tekintjük:

$$x(t)=\begin{cases}x(t), \quad t\in[a_1,a],\\ w(x|_{[a_1,a]},x|_{[b,b_1]})(t)+\displaystyle\int_a^b G(t,s)f(s,x(s),x(x(s)),y(s),y(y(s)))\,\mathrm{d}s, \quad t\in[a,b],\\ x(t), \quad t\in[b,b_1],\end{cases} \tag{3.4a}$$

$$y(t)=\begin{cases}y(t), \quad t\in[a_1,a],\\ w(y|_{[a_1,a]},y|_{[b,b_1]})(t)+\displaystyle\int_a^b G(t,s)g(s,x(s),x(x(s)),y(s),y(y(s)))\,\mathrm{d}s, \quad t\in[a,b],\\ y(t), \quad t\in[b,b_1].\end{cases} \tag{3.4b}$$

Értelmezzük: $\mathbf{A}: C([a_1,b_1],[a_1,b_1]^2)\to C([a_1,b_1],\mathbb{R}^2), \quad (x,y)\mapsto \mathbf{A}(x,y)$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(x,y)(t)=\big(A_1(x,y)(t),A_2(x,y)(t)\big)\\ &A_1(x,y)(t):=\text{a (3.3a) egyenlet jobb oldala,}\\ &A_2(x,y)(t):=\text{a (3.3b) egyenlet jobb oldala.}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Fixpontegyenletünk: $(x,y)=\mathbf{A}(x,y)$.

3.2 A megoldás egyértelműségének feltételei

Legyen $L > 0$ és tekintjük a következő halmazt (a továbbiakban csak X): $C_L([a_1, b_1], [a_1, b_1]^2) :=$

$$= \left\{(x, y) \in C([a_1, b_1], [a_1, b_1]^2) \;\middle|\; |x(t_1) - x(t_2)| \le L|t_1 - t_2|,\ |y(t_1) - y(t_2)| \le L|t_1 - t_2|, \forall\, t_1, t_2 \in [a_1, b_1]\right\}.$$

$$d_C : X \times X \to \mathbb{R}^2, \quad d_C\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \begin{pmatrix} \max\limits_{a_1 \le t \le b_1} |x_1(t) - x_2(t)| \\ \max\limits_{a_1 \le t \le b_1} |y_1(t) - y_2(t)|, \end{pmatrix}, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \tag{3.6}$$

Tétel 3.2.1. (E. Egri [37]) *Tegyük fel, hogy*

(i) *teljesülnek a* $(\mathrm{C}_1) - (\mathrm{C}_3)$ *feltételek;*

(ii) $\exists\, L_{1j}, L_{2j} > 0$ *úgy, hogy* $\forall\, t \in [a, b]$, $u_j, v_j \in [a_1, b_1]$, $j = \overline{1, 4}$, *fennállnak az alábbi összefüggések:*

$$|f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f(t, v_1, v_2, v_3, v_4)| \le \sum_{j=1}^{4} L_{1j}|u_j - v_j|,\ |g(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - g(t, v_1, v_2, v_3, v_4)| \le \sum_{j=1}^{4} L_{2j}|u_j - v_j|;$$

(iii) $\alpha, \gamma \in C_L([a_1, a], [a_1, b_1])$, $\beta, \delta \in C_L([b, b_1], [a_1, b_1])$;

(iv) $m_f, m_g, M_f, M_g \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy*

(1) $m_f \le f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) \le M_f$, *and* $m_g \le g(t, u_1, u_2, u_3, u_4) \le M_g$,
$\forall\, t \in [a, b]$, $u_j \in [a_1, b_1]$, $j = \overline{1, 4}$;

(2) $a_1 \leq \kappa + \min\left\{0, m_f\frac{(b-a)^2}{8}\right\}, \qquad a_1 \leq \mu + \min\left\{0, m_g\frac{(b-a)^2}{8}\right\},$

$b_1 \geq \nu + \max\left\{0, M_f\frac{(b-a)^2}{8}\right\}, \quad b_1 \geq \sigma + \max\left\{0, M_g\frac{(b-a)^2}{8}\right\},$

ahol

$\kappa := \min\{\alpha(a), \beta(b)\},\ \mu := \min\{\gamma(a), \delta(b)\},\ \nu := \max\{\alpha(a), \beta(b)\},\ \sigma := \max\{\gamma(a), \delta(b)\};$

(3) $\dfrac{|\beta(b)-\alpha(a)|}{b-a} + \max\{|m_f|, |M_f|\}\dfrac{b-a}{2} \leq L$, *illetve* $\dfrac{|\delta(b)-\gamma(a)|}{b-a} + \max\{|m_g|, |M_g|\}\dfrac{b-a}{2} \leq L;$

(v)

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^2}{8}[L_{11}+L_{12}(L+1)] & \frac{(b-a)^2}{8}[L_{13}+L_{14}(L+1)] \\ \frac{(b-a)^2}{8}[L_{21}+L_{22}(L+1)] & \frac{(b-a)^2}{8}[L_{23}+L_{24}(L+1)] \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

sajátértékei a komlpex sík nyílt, egységsugarú körének belsejében helyezkedik el.

Ekkor a (3.1) + (3.2) *feladatnak létezik egyértelmű megoldása* X*-ben.*

3.3 Adatoktól való folytonos függés

$$\begin{cases} -x''(t) = f_i(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))), \\ -y''(t) = g_i(t, x(t), x(x(t)), y(t), y(y(t))), \end{cases} \quad t \in [a, b], \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_i(t), & t \in [a_1, a], \\ x(t) = \beta_i(t), & t \in [b, b_1], \\ y(t) = \gamma_i(t), & t \in [a_1, a], \\ y(t) = \delta_i(t), & t \in [b, b_1], \end{cases} \quad i = 1, 2. \tag{3.9}$$

Tegyük fel, hogy a (3.8)+(3.9) peremérték-feladatok teljesítik a létezési és egyértelműségi tétel követelményeit. Jelölje $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)$ az egyes problémák megoldásait.

Tétel 3.3.1. (E. Egri [37]) *A 3.2.1 tétel követelményei mellett tekintjük a (3.8) + (3.9) feladatokat. Feltételezzük, hogy*

(i) $\exists\, \theta_1, \theta_2 > 0$, *melyekre*

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| \leq \theta_1, \ \forall\, t \in [a_1, a], \quad |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq \theta_2, \ \forall\, t \in [a_1, a],$$

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)| \leq \theta_1, \ \forall t \in [b, b_1], \quad |\delta_1(t) - \delta_2(t)| \leq \theta_2, \ \forall t \in [b, b_1];$$

(ii) $\exists\, \zeta_1, \zeta_2 > 0$ *úgy, hogy*

$$|f_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4)| \leq \zeta_1, \ \forall\, t \in [a, b], \ u_j \in [a_1, b_1], \ j = \overline{1, 4},$$

$$|g_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - g_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4)| \leq \zeta_2, \ \forall\, t \in [a, b], \ u_j \in [a_1, b_1], \ j = \overline{1, 4}.$$

Ekkor

$$d\big((x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)\big) \leq (I - Q)^{-1}\, \eta,$$

ahol $\eta = \begin{pmatrix} \theta_1 + \zeta_1 \dfrac{(b-a)^2}{8} \\ \theta_2 + \zeta_2 \dfrac{(b-a)^2}{8} \end{pmatrix}$, *$Q$ pedig a* (3.7) *egyenlettel megadott mátrix.*

3.4 Adatoktól való függés: fixpontok halmaza

Tétel 3.4.1. *Legyenek f_i, g_i $(i = 1, 2)$, amelyek teljesítik a 3.2.1 tétel feltételeit. Jelölje $F_{\mathbf{E_1}}, F_{\mathbf{E_2}}$ a* (3.8) *differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak halmazát. Tegyük fel, hogy $\exists\, \eta_f, \eta_g > 0$, melyre*

$$|f_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - f_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4)| \le \eta_f, \tag{3.10}$$

$$|g_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) - g_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4)| \le \eta_g, \tag{3.11}$$

$\forall\, t \in [a, b],\ u_j \in [a_1, b_1],\ j = \overline{1, 4}.$

Ekkor

$$H_{\|\cdot\|_C}(F_{\mathbf{E_1}}, F_{\mathbf{E_2}}) \le (I - Q)^{-1}\eta,$$

ahol $\eta := \begin{pmatrix} \eta_f \dfrac{(b-a)^2}{8} \\ \eta_g \dfrac{(b-a)^2}{8} \end{pmatrix}$ *valamint $H_{\|\cdot\|_C}$ a Pompeiu-Hausdorff távolság X-en.*

3.5 Paraméter szerinti differenciálhatóság

$$\begin{cases} -x''(t;\lambda) = f(t, x(t;\lambda), x(x(t;\lambda);\lambda), y(t;\lambda), y(y(t;\lambda);\lambda);\lambda), \\ -y''(t;\lambda) = g(t, x(t;\lambda), x(x(t;\lambda);\lambda), y(t;\lambda), y(y(t;\lambda);\lambda);\lambda), \end{cases} \quad t \in [a,b]; \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t;\lambda), & t \in [a_1, a], \\ x(t) = \beta(t;\lambda), & t \in [b, b_1], \\ y(t) = \gamma(t;\lambda), & t \in [a_1, a], \\ y(t) = \delta(t;\lambda), & t \in [b, b_1], \end{cases} \tag{3.13}$$

$\lambda \in J$, $J \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Tétel 3.5.1. (E. Egri [37]) *Tekintjük a* (3.12) + (3.13) *peremérték-feladatot. Feltételezzük, hogy*

(P$_1$) $a_1 \le a < b \le b_1$; $J \subset \mathbb{R}$, *kompakt intervallum;*

(P$_2$) $\alpha, \gamma \in C_L^2([a_1, a] \times J, [a_1, b_1])$ *és* $\beta, \delta \in C_L^2([b, b_1] \times J, [a_1, b_1])$; *továbbá* $(\alpha(\cdot,\lambda), \gamma(\cdot,\lambda))$ *teljesíti a* (3.12) *rendszert* $t = a$*-ra, illetve* $(\beta(\cdot,\lambda), \delta(\cdot,\lambda))$ *teljesíti a* (3.12) *rendszert* $t = b$*-re;*

(P$_3$) $f, g \in C^1([a,b] \times [a_1, b_1]^4 \times J, \mathbb{R})$;

(P$_4$) $\exists\, L_{1j}, L_{2j} > 0$ *úgy, hogy*

$$\left| \frac{\partial f(t, u_1, u_2, u_3, u_4; \lambda)}{\partial u_j} \right| \le L_{1j}, \qquad \left| \frac{\partial g(t, u_1, u_2, u_3, u_4; \lambda)}{\partial u_j} \right| \le L_{2j},$$

$\forall\, t \in [a,b],\ u_j \in [a_1, b_1],\ j = \overline{1,4},\ \lambda \in J;$

(P$_5$) $m_f, m_g, M_f, M_g \in \mathbb{R}$ *olyanok, hogy*

(1) $m_f \le f(t, u_1, u_2, u_3, u_4; \lambda) \le M_f, \quad m_g \le g(t, u_1, u_2, u_3, u_4; \lambda) \le M_g,$
$\forall\, t \in [a, b],\ u_j \in [a_1, b_1],\ j = \overline{1, 4},\ \lambda \in J;$

(2) $a_1 \le \kappa + m_f \dfrac{(b-a)^2}{8}, \quad \text{ha } m_f < 0,$
$a_1 \le \kappa, \quad \text{ha } m_f \ge 0,$
$a_1 \le \mu + m_g \dfrac{(b-a)^2}{8}, \quad \text{ha } m_g < 0,$
$a_1 \le \mu, \quad \text{ha } m_g \ge 0,$
$b_1 \ge \nu, \quad \text{ha } M_f \le 0,$
$b_1 \ge \nu + M_f \dfrac{(b-a)^2}{8}, \quad \text{ha } M_f > 0,$
$b_1 \ge \sigma, \quad \text{ha } M_g \le 0,$
$b_1 \ge \sigma + M_g \dfrac{(b-a)^2}{8}, \quad \text{ha } M_g > 0,$
$\kappa := \min\{\alpha(a; \lambda), \beta(b; \lambda)\},\ \mu := \min\{\gamma(a; \lambda), \delta(b; \lambda)\},\ \nu := \max\{\alpha(a; \lambda), \beta(b; \lambda)\},\ \sigma := \max\{\gamma(a; \lambda), \delta(b; \lambda)\};$

(3) $\dfrac{|\beta(b; \lambda) - \alpha(a; \lambda)|}{b-a} + \max\{|M_f|, |m_f|\} \dfrac{b-a}{2} \le L, \qquad \dfrac{|\delta(b; \lambda) - \gamma(a; \lambda)|}{b-a} + \max\{|M_g|, |m_g|\} \dfrac{b-a}{2} \le L;$

(P$_6$) Q *sajátértékei a komplex sík nyílt egységsugarú körének belsejében helyezkednek el.*

Ekkor

(1) *a* $(3.12) + (3.13)$ *feladatnak egyetlen* (x^*, y^*) *megoldása van a* $C([a_1, b_1] \times J, [a_1, b_1]^2)$ *halmazon;*

(2) $\big(x^*(t, \cdot), y^*(t, \cdot)\big) \in C^1(J, \mathbb{R}^2), \quad \forall t \in [a_1, b_1].$

Példa másodfokú iteratív funkcionál-differenciálegyenletre

$$\begin{cases} -x''(t) = \dfrac{1}{9}\big[t + x(t) + x(x(t))\big], & t \in [0,3] \\ x(t) = t + 2, & t \in [-1,0] \\ x(t) = t - \dfrac{1}{2}, & t \in [3,4], \end{cases} \tag{3.14}$$

Ekkor az operátorunk $A : C_2([-1,4],[-1,4]) \to C_2([-1,4],[-1,4])$,

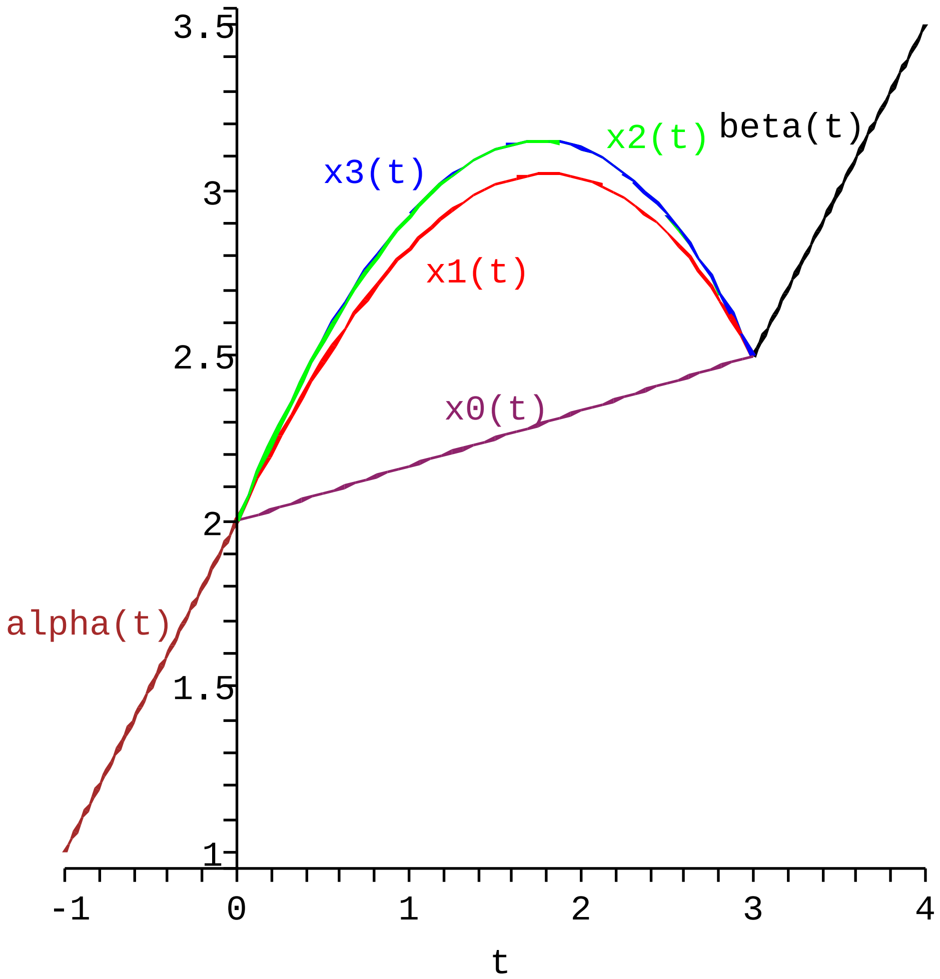
$$A(x)(t) = \begin{cases} t + 2, & t \in [-1,0]; \\ \dfrac{t+12}{6} + \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^3 G(t,s)\big[s + x(s) + x(x(s))\big], & t \in [0,3]; \\ t - \dfrac{1}{2}, & t \in [3,4], \end{cases}$$

Fokozatos közelítés módszere: $x_0(t) = \dfrac{t+12}{6}$, $t \in [0,3]$,

$$x_1(t) = -0.022119t^3 - 0.24074t^2 + 1.0880t + 2, \qquad \max_{t\in[0,3]} |x_1(t) - x_0(t)| = 0.76751,$$

$$\mathrm{grad}(x_2(t)) = 12, \qquad \max_{t\in[0,3]} |x_2(t) - x_1(t)| = 0.10621,$$

$$\mathrm{grad}(x_3(t)) = 147, \qquad \max_{t\in[0,3]} |x_3(t) - x_2(t)| = 0.0020821.$$


3.5
3
2.5
2
1.5
1
-1
0
1
2
3
4
t
x3(t)
x2(t)
beta(t)
x1(t)
x0(t)
alpha(t)

Bibliography

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2001.

[2] D. C. Angelova and D. D. Bainov, On the oscillation of solutions of second order functional equations, *Math. Rep. Toyama University* 5 (1982) 1–13.

[3] Sz. András, A note on Perov's fixed point theorem, *Fixed Point Theory*, **4**(1) (2003), 105–108.

[4] D. D. Bainov and P. Simeonov, Positive solutions of a superlinear first-order differential equations with delay depending on the unknown function, *J. Comput. Appl. Math.* 88 (1998) 95–101.

[5] D. D. Bainov, N. T. Markova and P. Simeonov, Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown function, *J. Comput. Appl. Math.* 91 (1998) 87–96.

[6] J. Bélair and M. C. Mackey, Consumer memory and price fluctuations in commodity markets: An integrodifferential model, *J. Dynam. and Diff. Eqns.* (1989), 1, 299–325.

[7] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Editura Efemeride, Baia Mare, 2002.

[8] A. M. Bica and S. Mureşan, Periodic solutions for a delay integro-differential equation in biomathematics, *RGMIA Res. Report Coll.*, **6**(4) (2003), 755–761.

[9] A. M. Bica and S. Mureşan, Applications of the Perov's fixed point theorem to delay integro-differential equations, Chap. 3 in *Fixed Point Theory and Applications* (Y. J. Cho, et al., Eds), Vol. **7**, Nova Science Publishers Inc., New York, 2006.

[10] A. M. Bica and V. A. Căuş and S. Mureşan, Application of a trapezoid inequality to neutral Fredholm integro-differential equations in Banach spaces, *Journal of Ineq. in Pure and Applied Math.*, **7**(5), Article 173, 2006,
`http://www.emis.de/journals/JIPAM/article791.html?sid=791`, (downloaded at 14th september, 2007).

[11] K. C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[12] R. F. Brown (ed.), *Fixed Point Theory and Its Applications*, American Mathematical Society, 1988.

[13] A. L. Brown and A. Page, *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

[14] V. Bryant, *Metric spaces: Iteration and Application*, Cambridge University Press, 1985.

[15] A. Buică, On the Chauchy problem for a functional-differential equation, *Seminar on Fixed Point Theory*, Cluj–Napoca, 1993, 17–18.

[16] A. Buică, Existence and continuous dependence of solutions of some functional-differential equations, *Seminar on Fixed Point Theory*, Cluj–Napoca, 1995, 1–14.

[17] T. A. Burton, Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, *Dover Publications*, Mineola, New York, 2006.

[18] S. S. Cheng, *Smooth solutions of iterative functional differential equations*, 5–10 July 2004, Antalya, Turkey – Dynamical Systems and Applications, Proceedings, pp. 228–252, `http://faculty.kfupm.edu.sa/math/akca/papers/cheng.pdf` (downloaded at 14th september, 2007).

[19] S. S. Cheng, J. G. Si and X. P. Wang, An existence theorem for iterative functional differential equations, *Acta Math. Hungar.* 94 (2002) 1–17.

[20] C. Chifu and G. Petruşel, Existence and Data Dependence of Fixed Points And Strict Fixed Points for Contractive-Type Multivalued Operators, Hindawi Publishing Corporation, *Fixed Point Theory and Applications*, Volume 2007, Article ID 34248, 8 pages doi:10.1155/2007/34248, `www.hindawi.com/GetPDF.aspx?doi=10.1155/2007/34248` (downloaded at 14th september, 2007).

[21] Gh. Coman, G. Pavel, I. Rus and I. A. Rus, *Introducere în teoria ecuaţiilor operatoriale*, Editura Dacia, Cluj–Napoca, 1976.

[22] K. L. Cooke, Functional differential systems: some models and perturbation problems, *Inter. Symp. Diff. Eqs. Dynamical Systems*, Puerto Rico, 1965.

[23] C. Corduneanu and V. Lakshmikantham, Equations with unbounded delay, *Nonlinear Analysis Theory Methods Appl.* , 4 : 5 (1980) pp. 831–878.

[24] M. P. Devasahayam, Existence of monoton solutions for functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 118(1986), No.2, 487–495.

[25] G. Dezső, Fixed point theorems in generalized metric spaces, *PUMA Pure Math. Appl.*, **11**(2) (2000), 183–186.

[26] M. Dobriţoiu, An integral equation with modified argument, *Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math.*, Vol. XLIX, Nr.3, september 2004, 27–33.

[27] A. Domoshnitsky, M. Drakhlin and E. Litsyn, On equations with delay depending on solution, *Nonlinear Analysis*, 49 (2002), 689–701.

[28] R. D. Driver, A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case, *Ann. Physics*, 21 (1963), 122–142.

[29] R. D. Driver, A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, in:*International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, pp. 474–484, Academic Press, New York, 1963.

[30] R. D. Driver and M. J. Norris, Note on uniqueness for a one-dimensional twobody problem of classical electrodynamics, *Ann. Physics*, 42 (1967), 347–351.

[31] G. M. Dunkel, *Functional–differential equations: Examples and problems, Lecture Notes in Mathematics*, No.144(1970), 49–63.

[32] G. M. Dunkel, On nested functional differential equations, *SIAM J. Appl. Math.* 118 (2) (1970) 514–525.

[33] E. Eder, The functional differential equations $x'(t) = x(x(t))$, *J. Differential Equations* 54 (1984) 390–400.

[34] E. Egri and I. A. Rus, First order iterative functional-differential equation with parameter, *Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math.* (to appear).

[35] E. Egri, Cauchy problem for an iterative functional–differential equation, *Publ. Math. Debrecen.*

[36] E. Egri, Cauchy problem for a system of iterative functional–differential equations, *Analele Univ. Timişoara.*

[37] E. Egri, A boundary value problem for a system of iterative functional–differential equations, *Carpathian J. Math.*

[38] E. Feckan, On certain type of functional differential equations, *Math. Slovaca* 43 (1993) 39–43.

[39] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, 2003.

[40] L. J. Grimm and K. Schmitt, Boundary value problems for differential equations with deviating arguments, *Aequationes Math.*, 4(1970), 176–190.

[41] L. J. Grimm, Existence and continuous dependence for a class of nonlinear equations, *Proc. Am. Math. Soc.* 29 (1971) 467–473.

[42] A. Halanay and J. A. Yorke, Some new results and problems in the theory of differential-delay equations, *SIAM Review*, 13(1971), 55–80.

[43] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, NewYork, 1987.

[44] V. A. Ilea, *Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu modificare mixtă a argumentului*, Presa Universitară Clujeană, 2006.

[45] V. I. Istrăţescu, *Fixed point theory*, D. Riedel Publishing Co., London, 1981.

[46] V. Kalmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional–Differential Equations*, Kluwer, 1992.

[47] W. A. Kirk and B. Sims (eds), *Handbook of metric fixed point theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001-XIII.

[48] M. Kuczma, B. Choczewski and R. Ger, *Iterative functional equations*, Cambridge University Press, 1990.

[49] M. Kuczma, Analytic solutions of a class of iterative functional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 162 , 2(2004), pp. 467–481.

[50] V. Lakshmikantham, L. Wen and B. Zhang, *Theory of Differential Equations with Unbounded Delay*, Kluwer, London, 1994.

[51] W.-R. Li, S. S. Cheng and T. T. Lu, Closed form solutions of iterative functional differential equations, *Applied Math. E-Notes*, 1(2001), 1–4, `http://www.math.nthu.edu.tw/~amen/papers/001021.pdf`, (downloaded at 14th september, 2007).

[52] H. Z. Liu and W. R. Li, Discussion on the analytic solutions of the second-order iterated differential equation, *Bull. Korean Math. Soc.* 43(2006), No.4, pp. 791–804.

[53] M. C. Mackey and J. Milton, Feedback, delays, and the origins of blood cell dynamics, *Comm. on Theor. Biol.* (1990) 1, 299–327.

[54] P. Magal and O. Arino, Existence of periodic solutions for a state dependent delay differential equation, *Journal of Differential Equations*, 165 2000, 61–95.

[55] V. Mureşan, *Ecuaţii diferenţiale cu modificarea afină a argumentului*, Ed. Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1997.

[56] V. Mureşan, Volterra integral equations with iterations of linear modification of the argument, *Novi Sad J. Math.*, Vol. 33, No. 2, 2003, 1–10.

[57] V. Mureşan, Existence, uniqueness and data dependence for the solution of a Fredholm integral equation with linear modification of the argument, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68**(2002), 117–124.

[58] A. D. Myshkis, General theory of differential equations with delay, *Uspekhi Mat. Nauk* , 4 : 5 (1949) pp. 99–141.

[59] R. J. Oberg, On the local existence of solutions of certain functional–differential equations, *Proc. AMS*, 20(1969), 295–302.

[60] D. Otrocol, *Lotka–Volterra system with two delays via weakly Picard operators*, Nonlinear Anal. Forum, 10(2005), 193–199.

[61] D. Otrocol, *Contribuţii la teoria sistemelor Lotka-Volterra cu argument întârziat*, Cluj-Napoca, 2006.

[62] A. I. Perov and A. V. Kibenko, On a general method to study the boundary value problems, *Iz. Acad. Nauk.*, **30** (1966), 249–264.

[63] A. Petruşel, *Multi-funcţii şi aplicaţii*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002.

[64] V. R. Petuhov, On a boundary value problem, *Trudy Sem Teor Diff Uravnenii Otklon Argument* Univ. Druzby Narodov Patrisa Lumumby, 3(1965), 252–255 (in Russian).

[65] R. Precup, Some existence results for differential equations with both retarded and advanced arguments, *Mathematica* (Cluj) **44** (2002). no. 1, 25–31.

[66] I. A. Rus, A fiber generalized contraction theorem and applications, *Mathematica*, **41**(1) (1999), 85–90.

[67] I. A. Rus, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj–Napoca, 1979.

[68] I. A. Rus, Picard operators and applications, *Scientiae Math. Japonicae*, 58(2003), No.1, 191–219.

[69] I. A. Rus, Functional-differential equations of mixed type, via weakly Picard operators, *Seminar on fixed point theory*, Cluj–Napoca, 2002, 335–345.

[70] I. A. Rus, Weakly Picard mappings, *Comment. Math.* Univ. Carolinae, 34, 4(1993), 769–773.

[71] I. A. Rus, Weakly Picard operators and applications, *Seminar on fixed point theory*, Babeş–Bolyai Univ., Cluj–Napoca, **2** (2001), 41–58.

[72] I. A. Rus, *Generalized contractions and applications*, University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[73] I. A. Rus, Fiber Picard operators on generalized metric spaces and application, *Scripta Scientiarium Math.*, 1 (1999), fas.2, 326–334.

[74] I. A. Rus, On a class of functional-integral equations, *Sem. on Best Approx. Theory*, Cluj-Napoca, 2000.

[75] I. A. Rus, Maximum principle for some nonlinear differential equations with deviating arguments, *Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math.*, (32) (1987), Nr. 1, 53–59.

[76] I. A. Rus, Maximum principle for some nonlinear differential equations with deviating arguments, *Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math.*, (32) (1987), Nr. 2, 53–57.

[77] I. A. Rus, Fiber Picard operators and applications, *Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math.*, (44)(1999), 89–98.

[78] I. A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice (Differential equations, integral equations and dynamical systems)*, Transilvania Press, 1996.

[79] I. A. Rus and E. Egri, Boundary value problems for iterative functional-differential equations, *Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math.*, Vol. LI, Nr.2, 2006, 109–126.

[80] I. A. Rus and S. Mureşan, Data dependence of the fixed points of some weakly Picard operators, *Studia Univ. Babeş-Bolyai*, 43(1998), fas.1, 79–84.

[81] I. A. Rus, A. Petruşel and G. Petruşel, *Fixed point theory 1950–2000 Romanian Contributions* House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[82] B. Rzepecki, On some functional–differential equations, *Glasnik Mat.*, 19(1984), 73–82.

[83] A. N. Sarkovskii, Functional and functional-differential equations in which the deviation of argument depends on the unknown function, *Functional and Differential-Difference Equations*, Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev, 1974, 148–155 (in Russian).

[84] J. A. Šaškin, V. Minachin and G. W. Mackey, *Fixed Points*, American Mathematical Society, 1991.

[85] M. Ó. Searcóid, *Metric spaces*, Springer-Verlag, 2006.

[86] J. G. Si, W. R. Li and S. S. Cheng, Analytic solutions of an iterative functional differential equation, *Computers Math. Applic.*, 33(1997)(6), 47–51.

[87] J. G. Si and X. P. Wang, Analytic solutions of a second-order iterative functional differential equation, *J. Comput. Appl. Math.* 126 (2000) 277–285.

[88] J. G. Si and X. P. Wang, Analytic solutions of a second-order functional differential equation with state dependent delay, *Results Math.* 39 (2001) 345–352.

[89] J. G. Si, X. P. Wang, Analytic solutions of a second-order iterative functional differential equation, *Comput. Math. Appl.* 43 (2002) 81–90.

[90] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Math., Cambridge Univ. Press, New York, 1974.

[91] S. Stanek, Global properties of decreasing solutions of equation $x'(t) = x(x(t)) + x(t)$, *Funct. Diff. Eq.*, 4(1997), No.1–2, 191–213.

[92] S. Stanek, On global properties of solutions of functional differential equation $x'(t) = x(x(t)) + x(t)$, *Dynamic Systems and Applications* 4 (1995) 263–278.

[93] S. Stanek, Periodic solutions of autonomous functional-differential equations with state dependent deviations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 49 (2006), 87–105.

[94] A. Tămăşan, Differentiability with respect to lag for nonlinear pantograph equation, *Pure Math. Appl.*, **9**(1998), 215–220.

[95] A.-A. Tarţa, *Contributions to the delay differential equations* (Doctoral thesis), Cluj-Napoca, 2006.

[96] K. Wang, On the equation $x'(t) = f(x(x(t)))$, *Funkcial. Ekvac.* 33 (1990) 405–425.

Köszönöm a figyelmet!

Chapter 4

Elsőrendű paraméteres egyenlet

$$x'(t) = f(t, x(t), x(x(t))) + \lambda, \quad t \in [a, b]; \tag{4.1}$$

$$x|_{[a_1,a]} = \varphi, \qquad x|_{[b,b_1]} = \psi. \tag{4.2}$$

(C_1) $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a < b \leq b_1$;

(C_2) $f \in C([a, b] \times [a_1, b_1]^2, \mathbb{R})$;

(C_3) $\varphi \in C([a_1, a], [a_1, b_1])$ şi $\psi \in C([b, b_1], [a_1, b_1])$;

A (4.1)+(4.2) Cauchy-feladat megoldása azon (x, λ) pár, amelyre

$$x \in C([a_1, b_1], [a_1, b_1]) \cap C^1([a, b], [a_1, b_1]), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

valamint (x, λ) teljesti (4.1)+(4.2)-t.

4.1 A megoldás létezése

A (4.1)+(4.2) feladat ekvivalens az

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a_1, a], \\ \varphi(a) + \int_a^t f(s, x(s), x(x(s)))\,\mathrm{d}s + \lambda(t-a), & t \in [a, b], \\ \psi(t), & t \in [b, b_1]. \end{cases} \tag{4.3}$$

fixpontegyenlettel. Mivel x folytonos $t = b$-ben, kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{\psi(b) - \varphi(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s, x(s), x(x(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

Tekintjük az $A : C([a_1, b_1], [a_1, b_1]) \to C([a_1, b_1], \mathbb{R})$

$$A(x)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a_1, a], \\ \varphi(a) + \frac{t-a}{b-a}(\psi(b) - \varphi(a)) - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b f(s, x(s), x(x(s)))\,\mathrm{d}s + \int_a^t f(s, x(s), x(x(s)))\,\mathrm{d}s, & t \in [a, b], \\ \psi(t), & t \in [b, b_1]. \end{cases} \tag{4.5}$$

operátort.

Megjegyezzük, hogy (x, λ) akkor és csak akkor megoldása a (4.1)+(4.2) problémának, ha $x \in C([a_1, b_1], [a_1, b_1])$ fixpontja az A operátornak és a λ paramétert (4.4) értelmezi.

Tétel 4.1.1. (E. Egri şi I. A. Rus [34]) *Tegyük fel, hogy*

(i) *teljesülnek a* $(\mathrm{C}_1) - (\mathrm{C}_3)$ *feltételek;*

(ii) $m_f, M_f \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $m_f \leq f(t, u_1, u_2) \leq M_f,\ \forall\, t \in [a,b],\ u_i \in [a_1, b_1],\ i = 1, 2,$ *továbbá*

$$a_1 \leq \min\{\varphi(a), \psi(b)\} - \max\{0, M_f(b-a)\} + \min\{0, m_f(b-a)\},$$

$$\max\{\varphi(a), \psi(b)\} - \min\{0, m_f(b-a)\} + \max\{0, M_f(b-a)\} \leq b_1.$$

Ekkor a $(4.1) + (4.2)$ *feladatnak létezik megoldása.*

Példa

$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(x(t)) + \lambda; \quad t \in [0,1],\ \mu \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ x|_{[-h,0]} = 0; \quad x|_{[1,1+h]} = 1, \quad h \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \tag{4.6}$$

ahol $x \in C([-h, 1+h], [-h, 1+h]) \cap C^1([0,1], [-h, 1+h])$.

Kijelentés 4.1.1. *Tegyük fel, hogy* $\mu \leq \dfrac{h}{1+2h}$. *Ekkor a* (4.6) *feladatnak létezik megoldása.*

4.2 Kitűzött feladatok

- Az iteratív funkcionál-differenciálegyenletek effektív megoldása (analitikus megoldások, sorbafejtés)
- A megoldások tulajdonságainak vizsgálata (stabilitás, periodicitás)
- Hasonló modellek keresése, amelyekre alkalmazhatóak a fenti eredmények