

Hiszterézises káoszgenerátor vizsgálata

Csikja Rudolf

2007. november 14.

Smale-patkó a káosz prototípusa

- ❖ Smale-patkó
- ❖ Smale-patkó
- ❖ Smale-patkó
- ❖ Cantor-halmaz
- ❖ A végtelen sorozatok tere

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

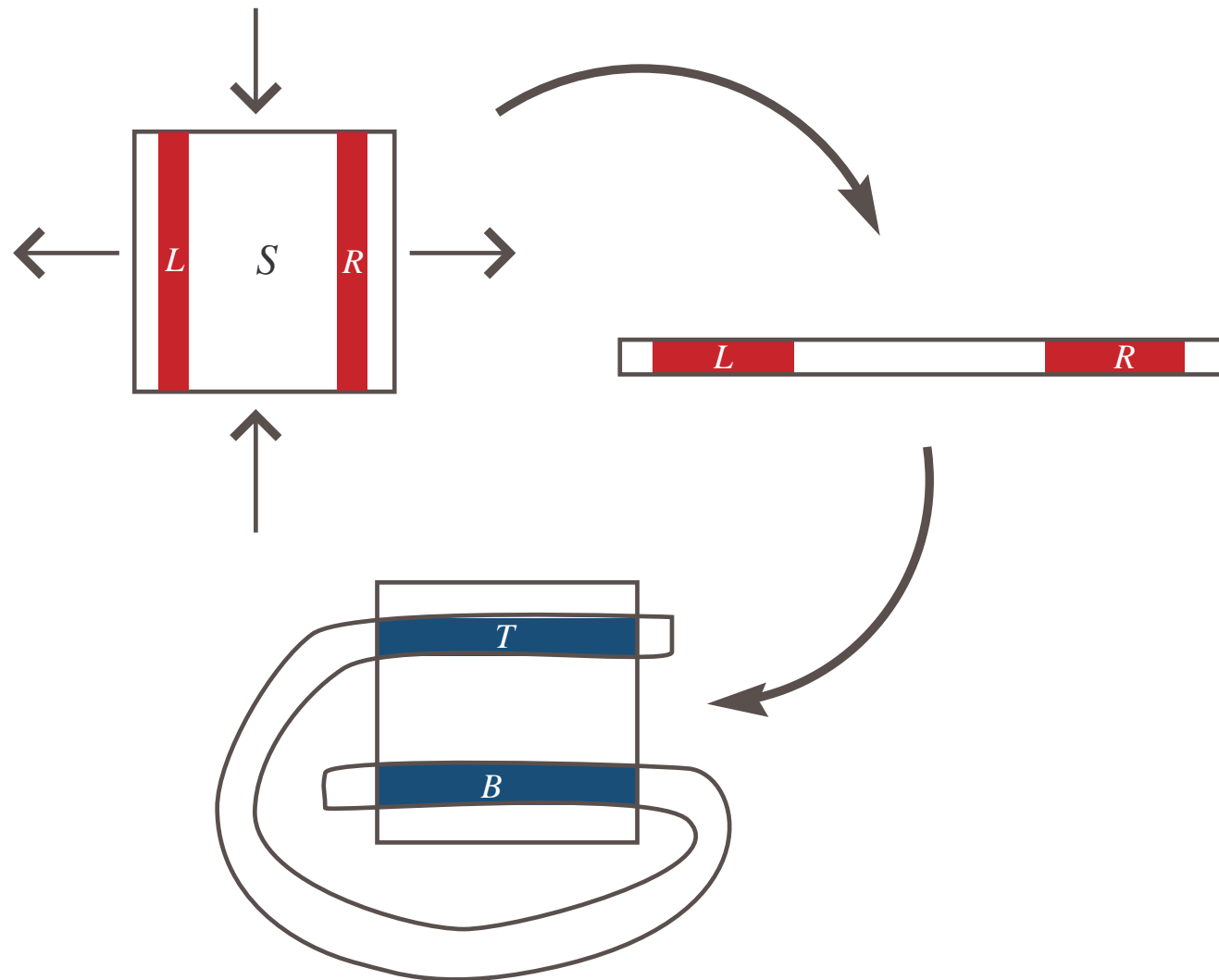
Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Smale-patkó a káosz prototípusa

Smale-patkó

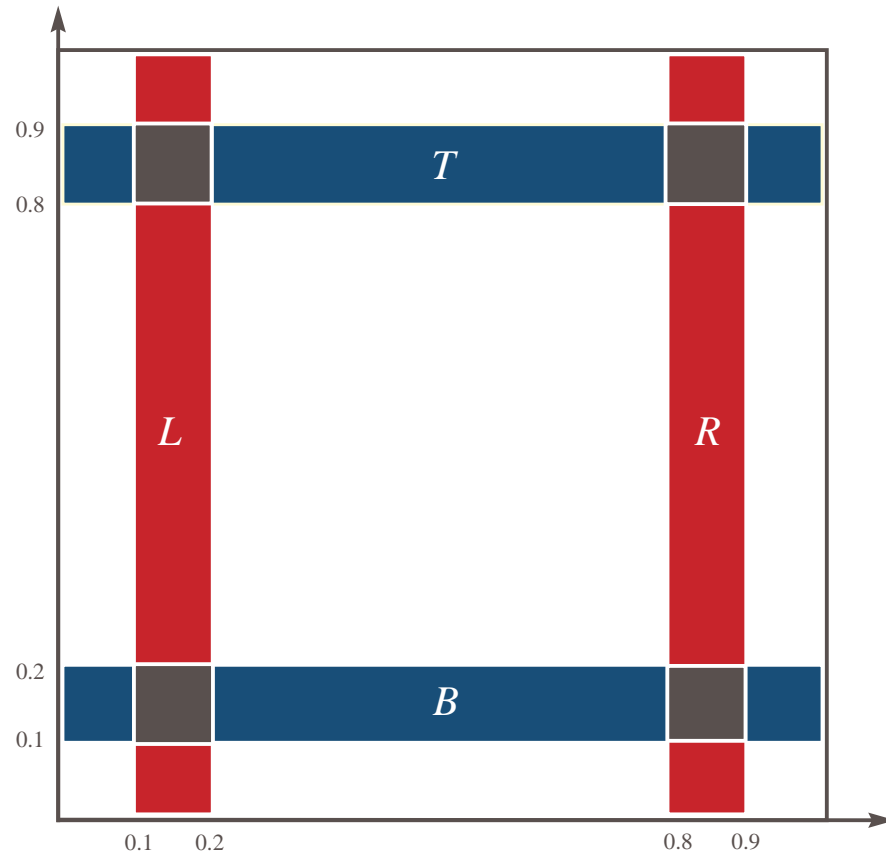


Smale-patkó

$$f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(x)$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in L \\ 8, & \text{ha } x \in R \end{cases}$$



Smale-patkó

Smale-patkó a
káosz prototípusa

❖ Smale-patkó

❖ Smale-patkó

❖ Smale-patkó

❖ Cantor-halmaz

❖ A végtelen
sorozatok tere

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Minden $(x, y) \in L \cup R$ pont felírható a koordinátájával:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.a_0a_1a_2 \dots \\ 0.b_1b_2b_3 \dots \end{bmatrix} \quad a_0 \in \{1, 8\}.$$

Belátható, hogy ekkor

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0.a_1a_2a_3 \dots \\ 0.a_0b_1b_2 \dots \end{bmatrix} \quad f(x, y) \in B \cup T.$$

Az $f(z)$ leképezés mindkét irányban végtelen sokszor iterálható akkor és csak akkor, ha z koordinátás alakjában $a_i, b_i \in \{1, 8\}$.

Milyen halmazba tartoznak ezek a pontok?

Cantor-halmaz

Smale-patkó a káosz prototípusa

❖ Smale-patkó

❖ Smale-patkó

❖ Smale-patkó

❖ **Cantor-halmaz**

❖ A végtelen sorozatok tere

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{10^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k} \quad (a_k, b_k \in \{1, 8\}).$$

Diadikus Cantor-halmaz:

$$\mathcal{C} := \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k} : c_k \in \{1, 8\} \right\}.$$

Így a $z_{k+1} = f(z_k)$ diszkrét dinamikai rendszer trajektóriái a $\Lambda := \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ halmazban haladnak.

$$f(\Lambda) = \Lambda.$$

A végtelen sorozatok tere

Smale-patkó a káosz prototípusa

❖ Smale-patkó

❖ Smale-patkó

❖ Smale-patkó

❖ Cantor-halmaz

❖ A végtelen sorozatok tere

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Definiáljuk a σ leképezést:

$$\sigma: \Lambda \rightarrow \Sigma_2,$$

ahol $\Sigma_2 := \{ \{ \dots b_3, b_2, b_1 \mid a_0, a_1, a_2 \dots \} : a_i, b_i \in \{1, 8\} \}$.

Lássuk el Σ_2 -t a

$$d_F(s, \tilde{s}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \frac{|s_k - \tilde{s}_k|}{1 + |s_k - \tilde{s}_k|},$$

Fréchet-távolsággal, ekkor σ homeomorfizmus. Így igazak az

$$f \simeq S_R \quad f^{-1} \simeq S_L$$

izomorfizmusok, ahol S_R és S_L a jobbra-, illetve balra-tolás operátorok.

Sikeresen átfogalmaztuk a problémát!

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

❖ Kombinatorikus
bonyolultság

❖ Kezdeti értéktől
való érzékeny
függés

❖ Sűrű pályák

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Kombinatorikus bonyolultság

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

❖ Kombinatorikus
bonyolultság

❖ Kezdeti értéktől
való érzékeny
függés

❖ Sűrű pályák

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

A továbbiakban $1 \leftrightarrow L$ és $8 \leftrightarrow R$.

Tetszőleges, mindkét irányban végtelen L - R sorozathoz egyértelműen létezik olyan $z \in \Lambda$, hogy $f^k(z) \in L$, vagy R a megadott sorrendben. Azaz z pályája az L és R halmazt a megadott sorrendben látogatja végig.

Például:

$\dots LLLRLRLL | RRRLLRRL \dots$

$z = (0.88811881 \dots, 0.11818111 \dots)$

Kezdeti értéktől való érzékeny függés

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

❖ Kombinatorikus
bonyolultság

❖ Kezdeti értéktől
való érzékeny
függés

❖ Sűrű pályák

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

A kezdeti értéktől való érzékeny függés azt fejezi ki, hogy akármilyen z és $\tilde{z} \neq z$ pontból indított pályák egy idő után, adott távolságtól messzebb kerülnek egymástól.

Létezik olyan $\eta > 0$ állandó, hogy tetszőleges két $z, \tilde{z} \in \Lambda$, $z \neq \tilde{z}$ pontra van olyan $N \in \mathbb{Z}$, amire $|f^N(z) - f^N(\tilde{z})| > \eta$.

Sűrű pályák

Smale-patkó a káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

❖ Kombinatorikus bonyolultság

❖ Kezdeti értéktől való érzékeny függés

❖ Sűrű pályák

Káosz egydimenziós leképezésekben

Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Van olyan pálya, amely az összes többi pályát tetszőlegesen kis távolságra megközelíti.

Például:

$$\{ \dots; R, L; L, L; R; L \mid L; R; L, L; L, R; R, L; R, R; L, L, L; \dots \}.$$

A periodikus pályák is sűrűek, olyan értelemben, hogy minden ponthoz tetszőlegesen közel van periodikus pálya, például:

$$\{ \dots \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{R} \mid \mathbf{L}, \mathbf{L}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{R} \dots \}$$

$$\{ \dots L, R, L, R, L, R, L, \mathbf{R} \mid \mathbf{L}, R, L, R, L, R, L \dots \}$$

$$\{ \dots L, L, L, R, L, L, \mathbf{L}, \mathbf{R} \mid \mathbf{L}, \mathbf{L}, L, R, L, L, L \dots \}$$

$$\{ \dots L, R, L, L, L, \mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{R} \mid \mathbf{L}, \mathbf{L}, \mathbf{L}, R, L, R, L \dots \}$$

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

**Káosz egydimenziós
leképezésekben**

❖ Leképezési gráf

❖ A káosz
elégéses feltétele

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Káosz egydimenziós leképezésekben

Leképezési gráf

Smale-patkó a káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

❖ Leképezési gráf

❖ A káosz elégséges feltétele

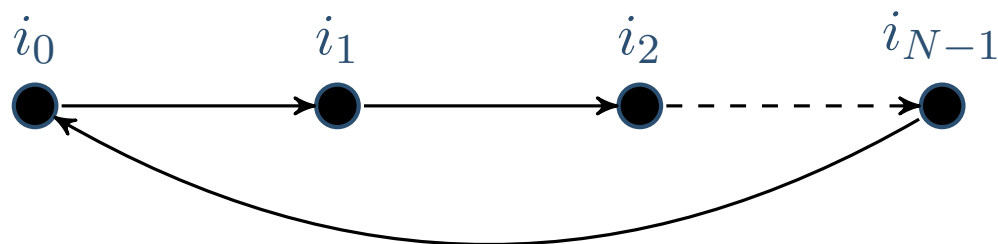
Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Legyen $\mathbb{I} := [0, 1]$ intervallum és $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ folytonos függvény, ekkor f^N tetszőleges $N \in \mathbb{Z}$ esetén értelmes.

Legyen $\mathbb{I}_0, \dots, \mathbb{I}_M \subset \mathbb{I}$ diszjunkt, zárt intervallum, és definiáljuk a G_f leképezési gráfot: $V(G_f) := \{0, 1, \dots, M\}$, $E(G_f) := \{(i, j) \in V(G_f) \times V(G_f) : f(\mathbb{I}_i) \supset \mathbb{I}_j\}$.



Ha a fenti gráf részgráfja G_f gráfnak, akkor létezik $x_i \in \mathbb{I}_i$ minden $i = 0, \dots, N - 1$ esetén, hogy

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, \dots, N$$

N -periodusú pálya, azaz $f^N(x_0) = x_0$.

A káosz elégséges feltétele

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

❖ Leképezési gráf

❖ A káosz
elégséges feltétele

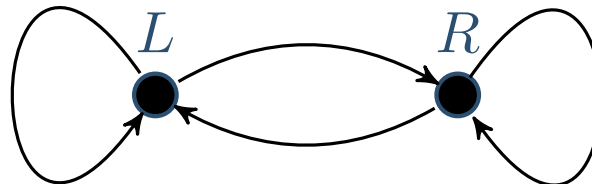
Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Ha a G_f leképezésgráfban van két egymást metsző irányított kör, akkor minden G_f gráfbeli mindkét irányban végtelen irányított úthoz létezik őt követő trajektória.

Például az alábbi gráfhoz tartozó dinamika pontosan úgy kaotikus, mint a Smale-patkó.



Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

**Hiszterézises
káoszgenerátor**

- ❖ A vizsgált modell
- ❖ Hiszterézis
- ❖ Trajektória I.
- ❖ Trajektória II.

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

Hiszterézises káoszgenerátor

A vizsgált modell

Smale-patkó a káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

Hiszterézises káoszgenerátor

❖ A vizsgált modell

❖ Hiszterézis

❖ Trajektória I.

❖ Trajektória II.

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

A következő állapotvisszacsatolással rendelkező oszcillátort vizsgáljuk:

$$\dot{x} = \sigma x + \omega y$$

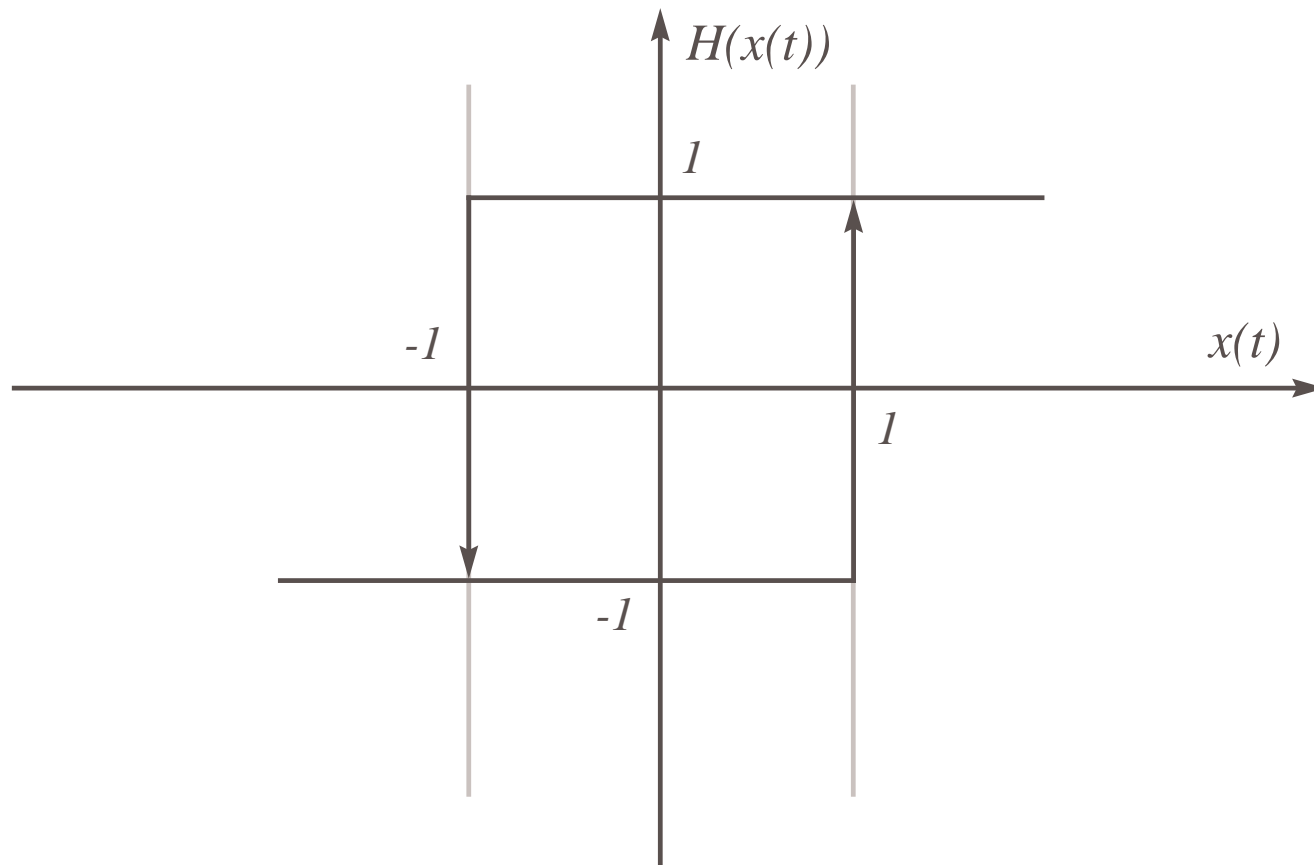
$$\dot{y} = -\omega x + \sigma y + H \circ x,$$

ahol az instabilitás biztosításához legyen $\sigma > 0$, továbbá $\sigma^2 + \omega^2 = 1$, illetve H hiszterézissel rendelkező szakaszonként lineáris leképezés:

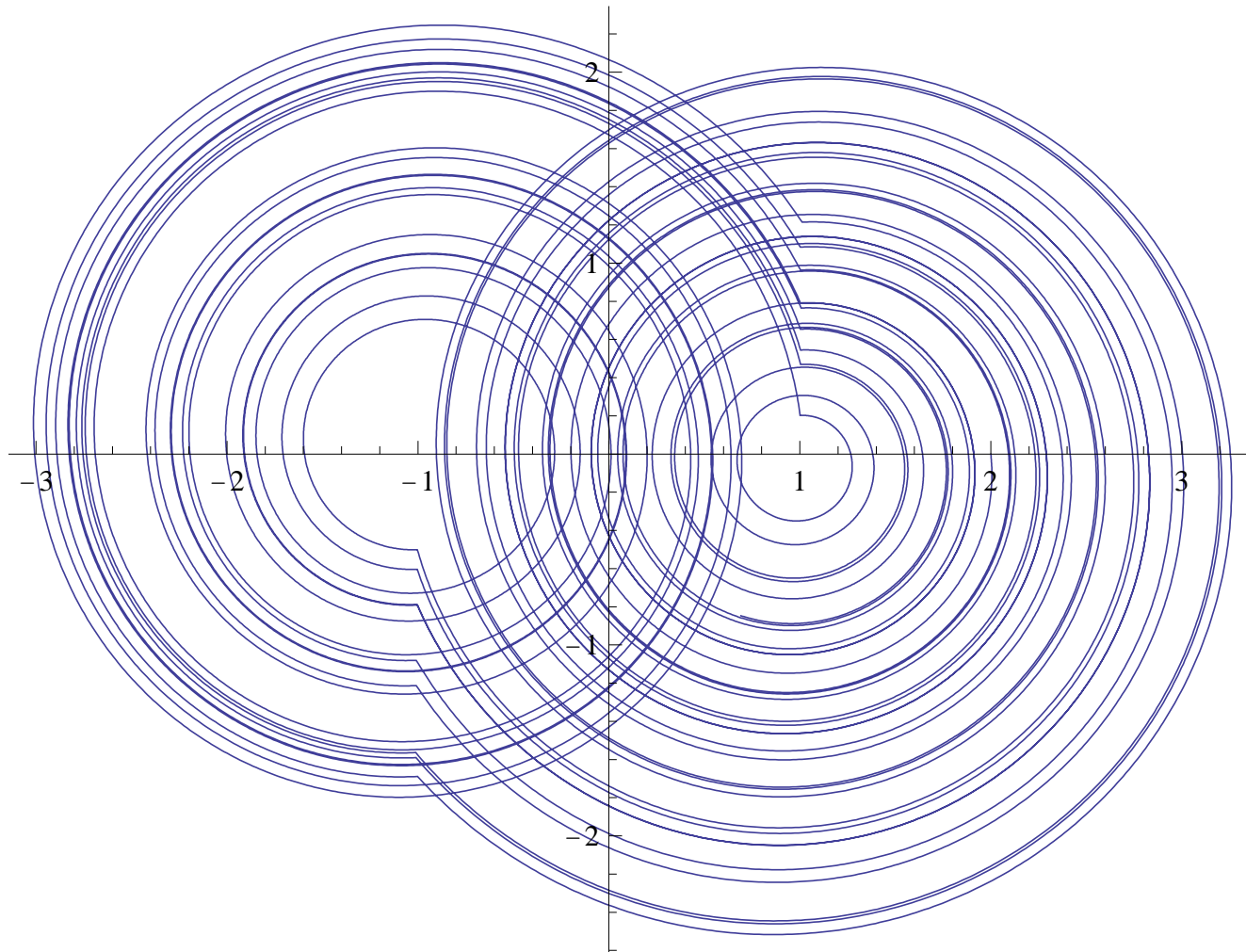
$$H(p, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p > 1 \\ -1, & \text{ha } p < -1 \\ \eta, & \text{ha } -1 \leq p \leq 1, \end{cases}$$

ahol $\eta \in \{1, -1\}$.

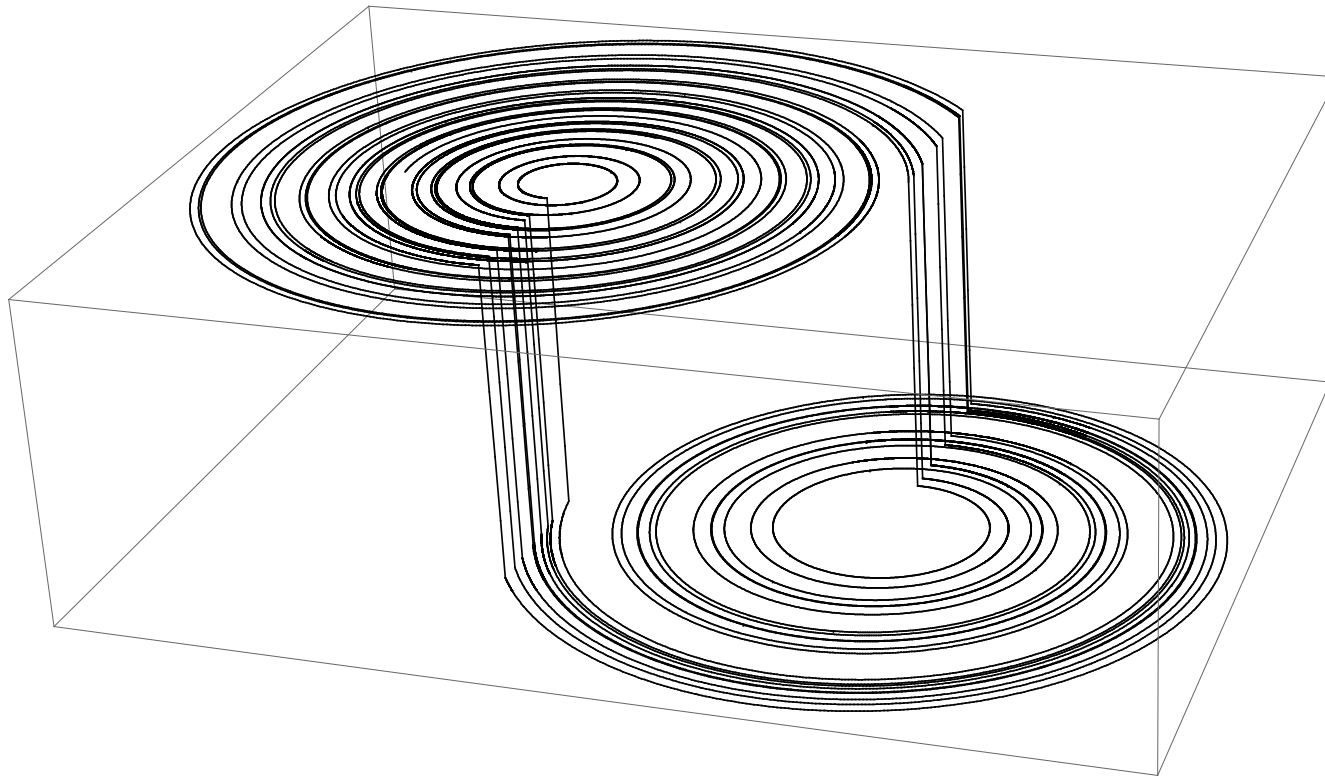
Hiszterézis



Trajektória I.



Trajektória II.



Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

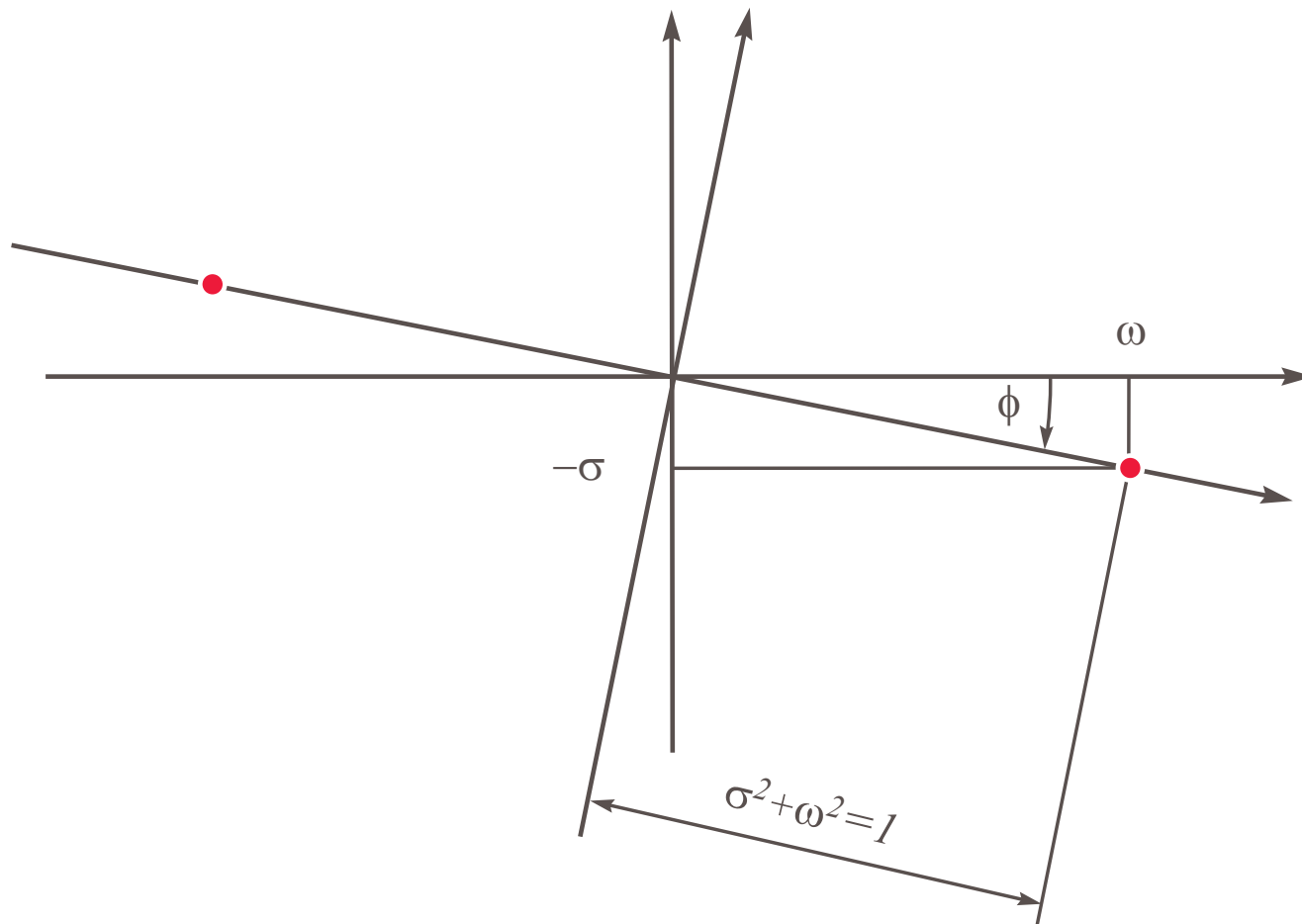
Poincaré-metszet

- ❖ A koordináta-rendszer elforgatása
- ❖ Az új leképezés
- ❖ Poincaré-leképezés I.
- ❖ Poincaré-leképezés II.
- ❖ Poincaré-leképezés
- ❖ Az eredeti és a diszkrét trajektóriák

Periodikus pályák

Poincaré-metszet

A koordináta-rendszer elforgatása



Az új leképezés

Smale-patkó a káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

❖ A koordináta-rendszer elforgatása

❖ Az új leképezés

❖ Poincaré-leképezés I.

❖ Poincaré-leképezés II.

❖ Poincaré-leképezés

❖ Az eredeti és a diszkrét trajektóriák

Periodikus pályák

A transzformált rendszer egyensúlyi pontjai

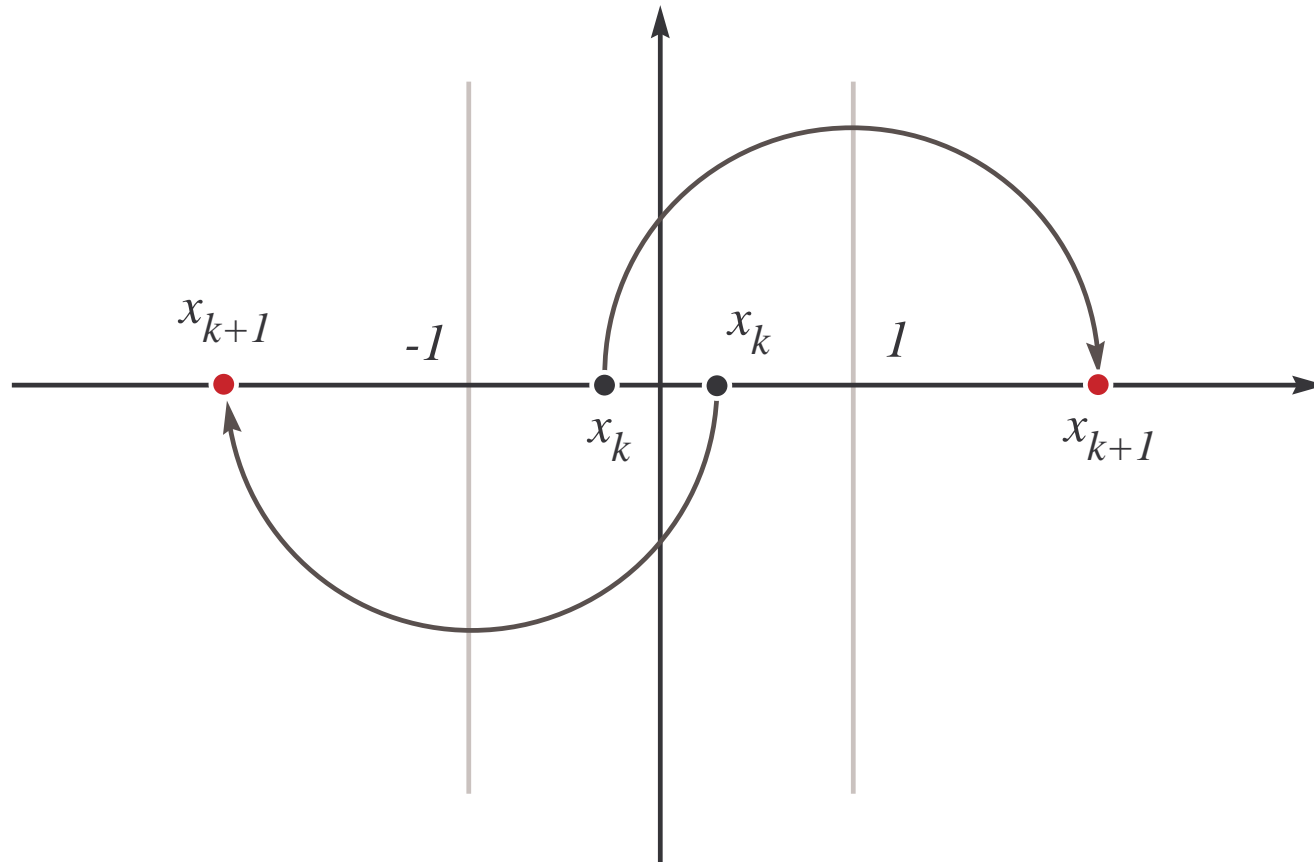
$$(1, 0) \quad (-1, 0)$$

A trajektóriák ezen pontok körül forognak:

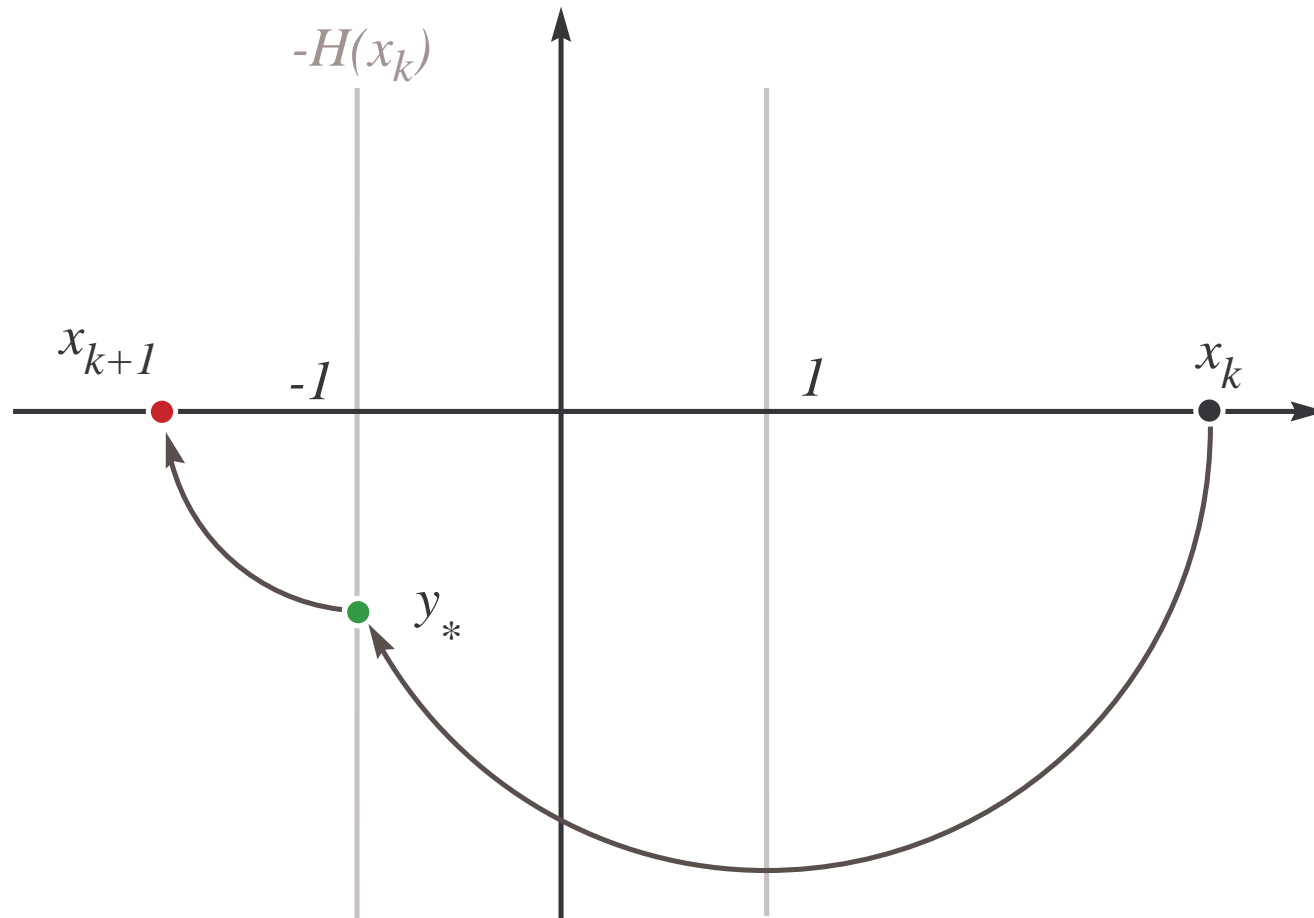
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \mp 1 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol $a(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $b(t) = e^{\sigma t} \sin(\omega t)$.

Poincaré-leképezés I.



Poincaré-leképezés II.



Poincaré-leképezés

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

❖ A
koordináta-rendszer
elforgatása

❖ Az új leképezés

❖ Poincaré-
leképezés
I.

❖ Poincaré-
leképezés
II.

❖ Poincaré-
leképezés

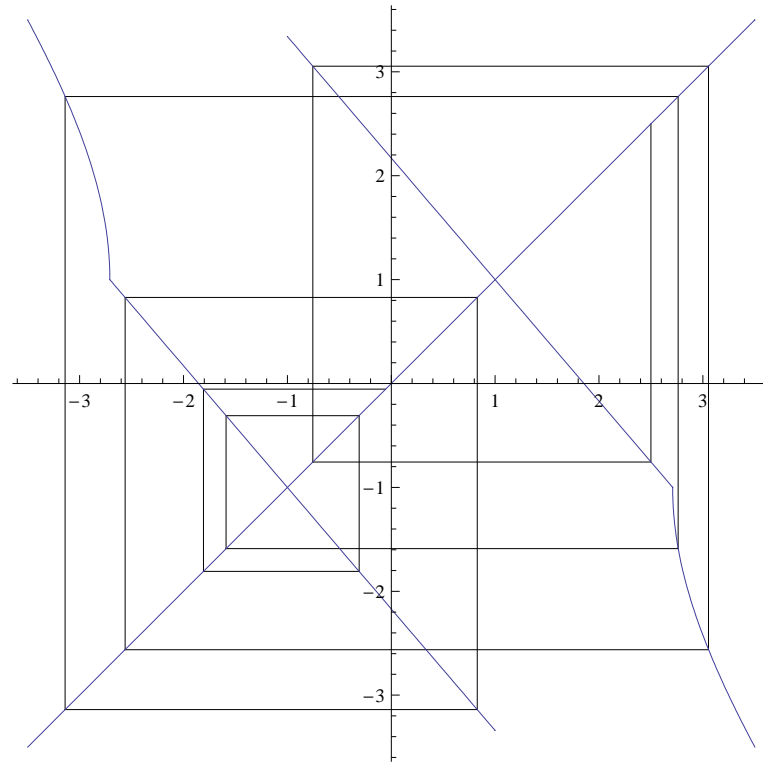
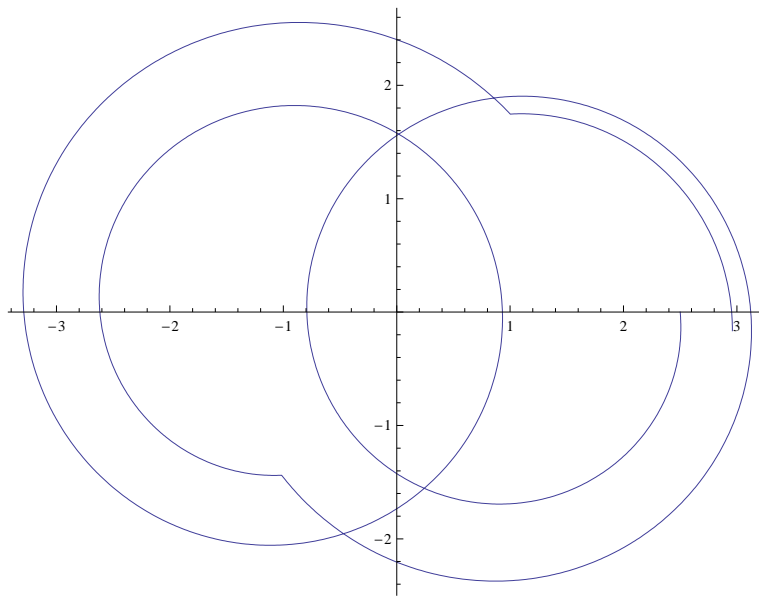
❖ Az eredeti és a
diszkrét trajektóriák

Periodikus pályák

$$m := \exp(\pi\sigma/\omega)$$

$$f(x_k) = \begin{cases} 1 + m\sqrt{m^2(x_k + 1)^2 - 4} & \text{ha } x_k < -\frac{2}{m} - 1 \\ -m(x_k + 1) - 1 & \text{ha } -\frac{2}{m} - 1 \leq x_k \leq 1 \\ -m(x_k - 1) + 1 & \text{ha } -1 \leq x_k \leq \frac{2}{m} + 1 \\ -1 - m\sqrt{m^2(x_k - 1)^2 - 4} & \text{ha } x_k > \frac{2}{m} + 1 \end{cases}$$

Az eredeti és a diszkrét trajektóriák



Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

- ❖ Periodikus pályák keresése
- ❖ Kereső kód
- ❖ Periodikus pályák
- ❖ Leképezési gráf
- ❖ Empirikus sűrűségfüggvény
- ❖ Köszönet
- ❖ Vége

Periodikus pályák

Periodikus pályák keresése

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

❖ Periodikus pályák
keresése

❖ Kereső kód

❖ Periodikus pályák

❖ Leképezési gráf

❖ Empirikus
sűrűségfüggvény

❖ Köszönet

❖ Vége

A *Mathematica* beépített függvényei:

`Interval[{min, max}]`

`IntervalIntersection[...]`

`IntervalUnion[...]`

`IntervalMemberQ[...]`

Példa:

$$\text{Sin}[\text{Interval}[\pi]] = \text{Interval}[\{0, 0\}]$$

$$\text{Sin}[\text{Interval}[\text{N}[\pi]]] = \text{Interval}[\{-3.21625 \times 10^{-16}, 5.66554 \times 10^{-16}\}]$$

Kereső kód

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

❖ Periodikus pályák
keresése

❖ **Kereső kód**

❖ Periodikus pályák

❖ Leképezési gráf

❖ Empirikus
sűrűségfüggvény

❖ Köszönet

❖ Vége

```
XX = Table[
  NestList[
    T, {Interval[{i, i + 0.01}], 1}, 20
  ]/.{x_, y_}->x, {i, 0., 1.0, 0.01}
]/ Interval[]->0 /. T[_]->0;
Table[
  IntervalIntersection[XX[[j, 1]], XX[[j, i]]],
  {j, 1, Length[XX]}, {i, 1, 20}
]//TableForm

Outer[IntervalIntersection, P1, P2]/.Interval[]->0
```

Periodikus pályák

Smale-patkó a káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz megjelenése a Smale-patkóban

Káosz egydimenziós leképezésekben

Hiszterézises káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

❖ Periodikus pályák keresése

❖ Kereső kód

❖ **Periodikus pályák**

❖ Leképezési gráf

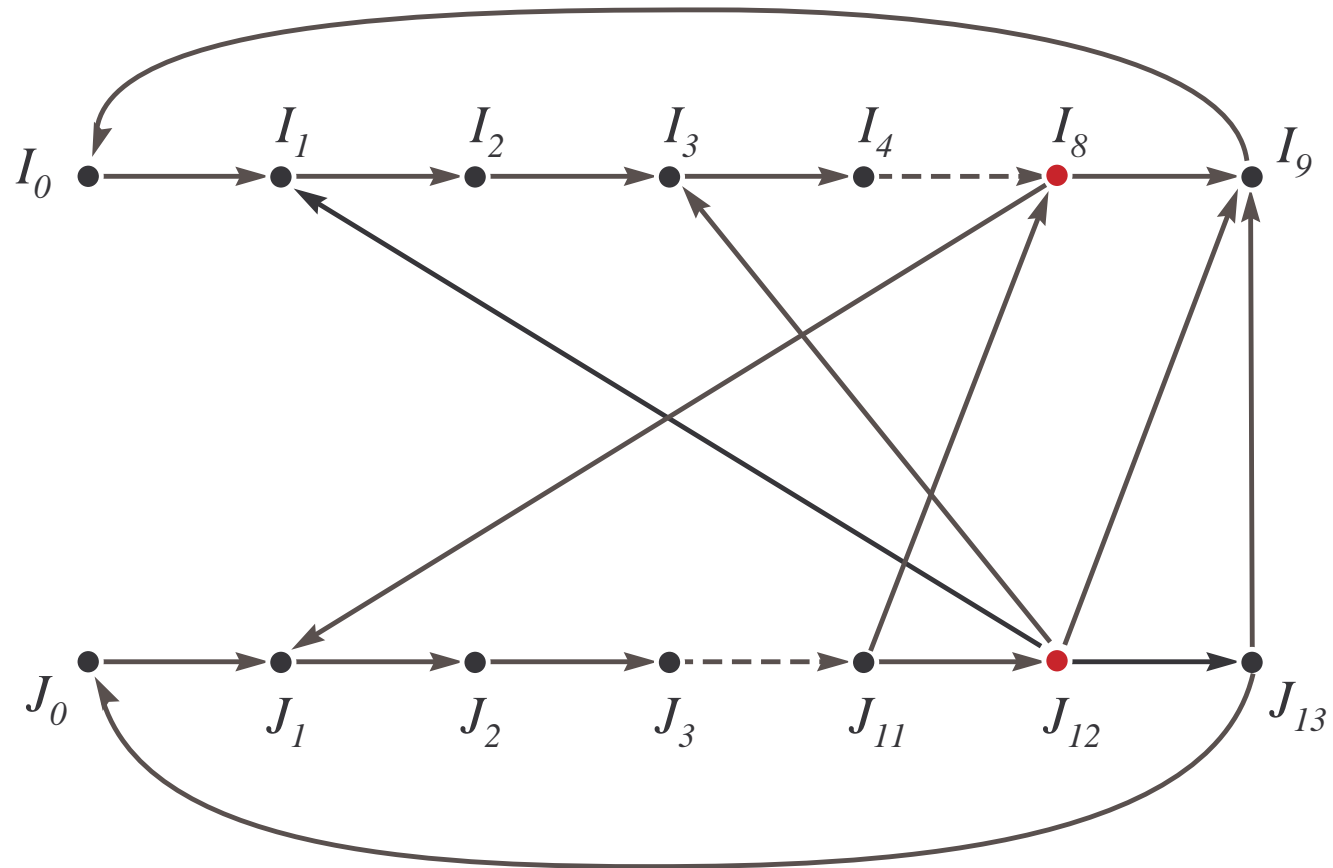
❖ Empirikus sűrűségfüggvény

❖ Köszönet

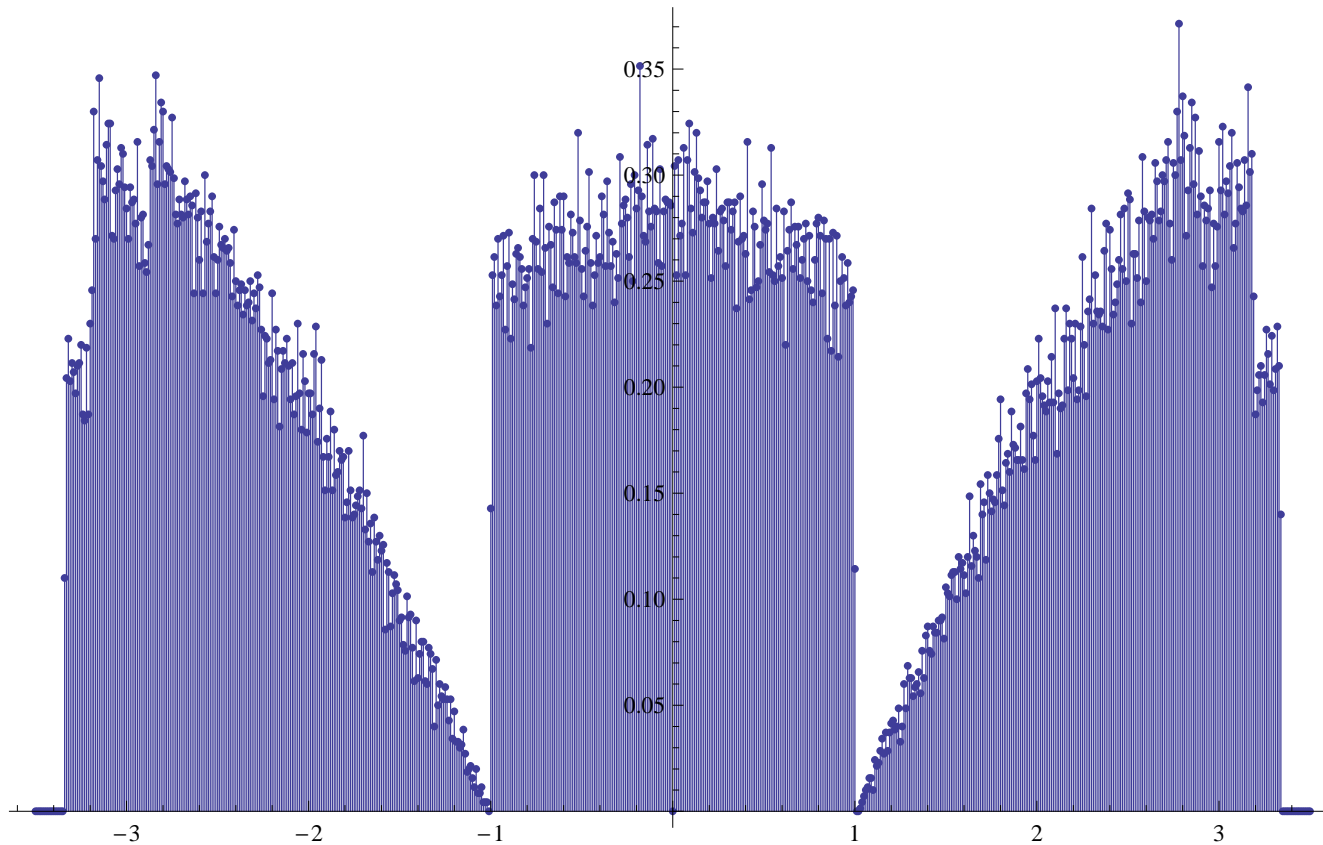
❖ Vége

k	\mathbb{I}_k	$H(x_k^1)$	\mathbb{J}_k	$H(x_k^2)$
0	[0.28, 0.29]	1	[0.38, 0.39]	1
1	[1.83093, 1.84263]	1	[1.71389, 1.7256]	1
2	[0.0138545, 0.027551]	1	[0.150819, 0.164516]	1
3	[2.13808, 2.1541]	1	[1.97778, 1.99381]	1
4	[-0.350671, -0.331911]	1	[-0.163078, -0.144318]	1
5	[2.55876, 2.58072]	1	[2.33922, 2.36117]	1
6	[-0.849942, -0.824248]	1	[-0.593005, -0.567312]	1
7	[3.13495, 3.16502]	1	[2.83425, 2.86432]	1
8	[-2.82058, -2.7527]	-1	[-2.02059, -1.91267]	-1
9	[1.53308, 1.85977]	1	[0.0681149, 0.194413]	-1
10	[-0.00619975, 0.376123]	1	[-2.39784, -2.25004]	-1
11	—	—	[0.46294, 0.635923]	-1
12	—	—	[-2.91455, -2.71211]	-1
13	—	—	[1.14264, 2.18223]	1
14	—	—	[-0.383582, 0.833061]	1

Leképezési gráf



Empirikus sűrűségfüggvény



Köszönet

Garay Barnabás, Differenciálegyenletek Tanszék.
Tóth János, Analízis Tanszék.

OTKA:
T047132, NK63066

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

- ❖ Periodikus pályák keresése
- ❖ Kereső kód
- ❖ Periodikus pályák
- ❖ Leképezési gráf
- ❖ Empirikus sűrűségfüggvény
- ❖ **Köszönet**
- ❖ Vége

Smale-patkó a
káosz prototípusa

A Σ_2 -káosz
megjelenése a
Smale-patkóban

Káosz egydimenziós
leképezésekben

Hiszterézises
káoszgenerátor

Poincaré-metszet

Periodikus pályák

- ❖ Periodikus pályák keresése
- ❖ Kereső kód
- ❖ Periodikus pályák
- ❖ Leképezési gráf
- ❖ Empirikus sűrűségfüggvény
- ❖ Köszönet

❖ Vége

- [1] Csendes, T.; Bánhelyi, B.; Garay, B.: A verified optimization technique to locate chaotic regions of Hénon systems *J. Global Optim.*, **35** (2006) 145–160.
- [2] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, *Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo* (1983).
- [3] Saito, T.; Mitsubori, K.: Control of chaos from a piecewise linear hysteresis circuit, *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **42** (1995) 168–172.
- [4] Smale, S.: Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio, *Mathematical Intelligencer*, **20** (1998) 39–44.