7. Divergencia, rotáció

I. Legyen $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $r := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges. Számoljuk ki a következő mennyiségeket.

1.	$\operatorname{div}(\lvert r\rvert \cdot \operatorname{grad}\log\lvert r\rvert^3)$	$\operatorname{div}((x,y,z)\mapsto \lvert r\rvert \operatorname{grad}\log(\lvert r\rvert^3))$
2.	$\operatorname{div}\operatorname{grad}\lvert r\rvert^5$	$\operatorname{div}\operatorname{grad}((x,y,z)\mapsto \lvert r\rvert^5)$
3.	$\operatorname{rot}\left(\frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k\right)$	$\operatorname{rot}\left((x,y,z)\mapsto \left(\frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k\right)\right)$
4.	$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(\lvert r\rvert)$	$\operatorname{div}\operatorname{grad}((x,y,z)\mapsto f(\lvert r\rvert))$

II. Igazoljuk a rotációra vonatkozó alábbi összefüggéseket! (Itt $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és A egy 3×3-as valós vagy komplex elemekből álló mátrix.)

1. $\operatorname{rot}(a\times r) = 2a$
2. $\operatorname{rot}(r^2\cdot r) = 0$
3. $\operatorname{rot}((ar)\cdot r) = a\times r$
4. $\operatorname{rot}(Ar) = 0 \quad \Leftrightarrow A$ szimmetrikus
5. $\operatorname{rot}(a\lvert r\rvert) = \dfrac{r\times a}{\lvert r\rvert}$
6. $\operatorname{rot}(r^2\cdot a) = 2r\times a$
7. $\operatorname{rot}(fg) = f\operatorname{rot} g + \operatorname{grad} f\times g$

III. Igazoljuk a

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0 \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$$

azonosságokat!

IV. Potenciálos terek.

1. Tegyük fel, hogy a $\{\varphi(x,y,z) := x^3 + xy^2 + z; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ potenciálfüggvény ír le valamilyen fizikai kölcsönhatást. Milyen $\{\mathbb{R}_0^+ \ni r \mapsto v(r)\}$ hely-erő vektormező származtatható a potenciálból?

2. Határozzuk meg a $\{v(x,y,z) := (2yz + x^2, 2xz + y^2, 2xy + z^2); (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ vektormező potenciálját! Számítsuk ki a vektormező vonalmenti integrálját tetszőleges görbe mentén a $(2,1,3)$ és a $(-1,3,-2)$ pont között!

3. Az alábbi v vektormezők származtathatók-e potenciálos térből az adott

1. Matematika A3, 2007.10.23., 1. lap, Andai Attila nyomán

V tartományban? Ha igen, határozzuk meg a potenciált!

a.	$v(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$	$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x,y,z > 0\}$
b.	$v(r) = \frac{r}{\lvert r\rvert^2}; r := (x,y,z)$	$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
c.	$v(x,y) = (y,x)$	$V = \mathbb{R}^2$
d.	$v(x,y) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}\right)$	$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$
e.	$v(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$	$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$

V. (*) Tekintsük a végtelen egyenes vezetőben folyó egyenáram mágneses mezejét leíró

$$S : \mathbb{R}^3 \setminus \big(\{0,0\} \times \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

vektormezőt. Igazoljuk, hogy $\operatorname{rot} S = 0$ teljesül, azonban S mégsem állítható elő egy függvény gradienseként! Miért?