

A faktoriális alsó- és felső becslései

Lóczy Lajos

2001. június

A matematika számos ágában bukkan fel és tölt be fontos szerepet az n nemnegatív egész szám faktoriálisa, melyet pozitív egész n -ekre az

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

összefüggés definiál, $0!$ értéke pedig megállapodás szerint 1. Cikkünk célja, hogy az $n!$ kifejezést egyszerűbb, az analízis szempontjából könnyebben kezelhető mennyiségekkel becsüljük meg, illetve ismertessük a nagyságrendjére vonatkozó legfontosabb közelítéseket. A cikk további részében n mindvégig pozitív egész számot jelöl.

Kiindulásul tekintsük a Négyjegyű függvénytáblázatban is szereplő

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

összefüggést, ahol szokás szerint e (≈ 2.71828) jelöli a természetes logaritmus alapszámát. A fenti képlet – mely *Stirling-formula* néven ismert – *aszimptotikus becslést* fejez ki, ami azt jelenti, hogy $n!$ értéke „nagy” n -ekre „körülbelül” $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Precízen ezen azt értjük, hogy az

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

képlettel definiált sorozat határértéke $n \rightarrow +\infty$ esetén 1. Ahhoz hogy képet kapjunk a formula lényegéről, érdemes néhány n -re megvizsgálni $n!$ és $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ egymáshoz viszonyított értékeit. (Az itt fellépő elképesztően nagy számokat szemlélteti a cikk végén szereplő 4. Megjegyzés.)

n	$n!$	$(n/e)^n \sqrt{2\pi n}$	a_n
1	1	0.9221	1.08444
2	2	1.919	1.04221
3	6	5.836	1.02806
$\vdots$			
10	3628800	3598695.6	1.008365
$\vdots$			
100	$9.33262 \cdot 10^{157}$	$9.32484 \cdot 10^{157}$	1.0008336
$\vdots$			
1000	$4.02387 \cdot 10^{2567}$	$4.02353 \cdot 10^{2567}$	1.00008333
$\vdots$			
10000	$2.84625 \cdot 10^{35659}$	$2.84623 \cdot 10^{35659}$	1.000008333

Konkrét n -ekre azonban a Stirling-formula semmit sem mond $n!$ nagyságáról, ezért szeretnénk minden pozitív n -re érvényes alsó- és felső becsléseket nyerni.

Nemrégiben *Pfeil Tamás* az alábbi egyenlőtlenséget bizonyította be:

$$\frac{e}{\sqrt{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} < n! < e\sqrt{2} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

illetve ekvivalensen átírva

$$\frac{e}{2\sqrt{\pi}} < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < \frac{e}{\sqrt{\pi}},$$

azaz

$$0.766 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < 1.533.$$

Bizonyításában az a szép, hogy teljesen elemi eszközöket használ – csupán elemi egyenlőtlenségeket és a binomiális tételt. Tőle függetlenül sikerült a szerzőnek a valamivel élesebb

$$0.911 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < 1.085$$

egyenlőtlenséget bebizonyítani, ám a bizonyítás elemi volta elveszett: a felső becslés ugyanis deriválást használ, az alsó becsléshez pedig egy integrált kellett kiszámítani.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy még erősebb eszközökkel, nevezetesen deriválással és a Stirling-formula felhasználásával (melynek bizonyítása hosszadalmas és szintén nem elemi) ezen egyenlőtlenségek tovább javíthatók, és meg is adjuk a_n legélesebb alsó- és felső korlátját, azaz megkeressük a legnagyobb c_1 és a legkisebb c_2 valós számokat, melyekre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$c_1 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \leq c_2.$$

A bizonyítás az alábbi észrevételen múlik.

Állítás. *Az a_n sorozat szigorúan monoton fogyó.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $a_n > a_{n+1}$ ($n \geq 1$), azaz (mivel minden mennyiség pozitív) $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. Ez ekvivalens a következőkkel:

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1} e^n \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n} (n+1) e^{n+1}} = \\ &= \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} (n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}} (n+1) e} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

vagyis az $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ egyenlőtlenséget kell igazolnunk. Kész lesz a bizonyítás, mielőst megmutatjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ sorozat szigorúan monoton fogyó, hiszen az e szám

definíciója folytán $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e$, és szigorúan monoton fogyó sorozat minden tagja nagyobb a sorozat határértékénél.

Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ sorozat helyett az $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ függvényt vizsgálva deriváltjára

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)}\right)$$

adódik (itt $\ln$ jelöli a természetes alapú logaritmust). Elég tehát megmutatni, hogy minden $x > 0$ esetén az $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}$ függvény negatív. Ez viszont némi számolással következik abból, hogy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ és minden $x > 0$ -ra $f'(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$.

1. Megjegyzés. A $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) alakú sorozatok $\alpha = 0$ -ra, illetve $\alpha = 1$ -re az e szám szokásos definíciójában fordulnak elő. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$. Bebonyolítható továbbá, hogy éppen $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén leggyorsabb a konvergencia.

Mivel a Stirling-formula szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ és beláttuk, hogy a_n szigorúan monoton fogyó, ezért tetszőleges $n \geq 1$ esetén $a_n > 1$ valamint $a_n \leq a_1$ következik. Igaz tehát az alábbi

Következmény. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$1 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \leq \frac{e}{\sqrt{2\pi}},$$

és a bal-, illetve jobb oldalon álló $c_1 = 1$ és $c_2 = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ konstansok nem javíthatók.

Eredeti kérdésünkhöz visszatérve $n!$ -ra a fenti értelemben legjobb becsléseket kapjuk:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{n}.$$

2. Megjegyzés. Taylor-sorfejtés és további függvényvizsgálatok segítségével (melyek nagyon sok számolást igényelnek) egyre finomabb becslések láthatóak be. Ezek közül egy (minden pozitív egész n -re érvényes) egyenlőtlenség az alábbi:

$$1 + \frac{1}{12n} < a_n < e^{\frac{1}{12n}} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots$$

vagyis

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right) < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

A bizonyításban a

$$c_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}}$$

sorozatról megmutatjuk, hogy szigorúan monoton növekvő, a

$$d_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right)}$$

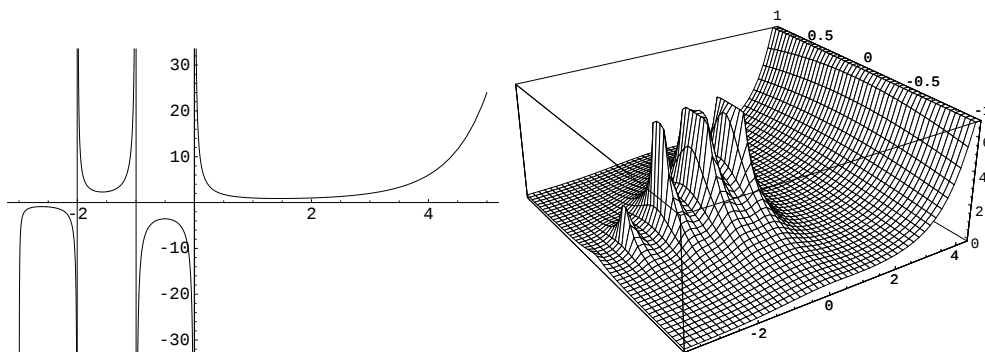
sorozatról pedig azt, hogy szigorúan monoton fogyó. A Stirling-formula szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1,$$

ebből pedig (minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetére) $c_n < 1 < d_n$ következik, ami ekvivalens a fent idézettel.

3. Megjegyzés. A faktoriális függvényt a nemnegatív egész helyekről ki lehet terjeszteni (a negatív egész helyek kivételével) valós, sőt komplex értékekre is, így kapjuk az ún. Γ függvényt, ahol Γ a görög *nagy gamma* betű. (Pozitív egész n -ek esetére $\Gamma(n) = (n-1)!$) Speciális esetként adódnak például az alábbi nevezetes értékek: $(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, illetve $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$.

Az $x \mapsto \Gamma(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) és a $z \mapsto |\Gamma(z)|$ ($z \in \mathbb{C}$) függvény grafikonját az alábbi ábrákon láthatjuk.



4. Megjegyzés. Az $n!$ függvény hihetetlenül gyorsan nő. Ha hagyományos "kockás" füzetben próbálnánk ábrázolni értékeit, már $n = 28$ -nál (azaz 14 cm-re jobbra az origótól) megakadnánk: itt ugyanis a $28! \approx 3.049 \cdot 10^{29}$ értéket veszi fel függvényünk. Ehhez pedig füzetünkben felfelé többet kellene haladnunk, mint a ma ismert Világegyetem mérete!