A Bernoulli-egyenlőtlenségről

Lóczi Lajos

2001. június

A valós analízis egyik fontos egyenlőtlensége a *Bernoulli-egyenlőtlenség*, mely szokásos megfogalmazásban így szól: ha n tetszőleges természetes szám és $h > -1$ tetszőleges valós szám, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + n \cdot h. \tag{1}$$

Cikkünkben megmutatjuk, hogy a h-ra tett feltevés javítható: nevezetesen igaz az alábbi

1. állítás. Az (1) egyenlőtlenség pontosan akkor igaz minden n természetes számra, ha $h \geq -2$.

Mindenekelőtt egy apró megjegyzést teszünk. Az (1) egyenlőtlenség bal oldala $h = -1$ és $n = 0$ esetén nincs definiálva (hiszen 0^0 lépne fel). Ezért – hogy az $n = 0$ esetet se kelljen kizárnunk – megállapodunk, hogy a továbbiakban a 0^0 szimbólumon 1-et értünk.

Az fenti állításban azon valós h-k szerepelnek, amelyek a Bernoulli-egyenlőtlenséget $n \in \mathbb{N}$ *tetszőleges* választása mellett teljesítik. Vizsgáljuk meg először (1) érvényességi körét *konkrét* n-ek esetén. Jelöljük H_k-val ($k \in \mathbb{N}$) azon $h \in \mathbb{R}$ számok halmazát, melyekre (1) igaz az $n = k$ választás mellett:

$H_0 = \mathbb{R}$ nyilván, hiszen $(1+h)^0 \geq 1 + 0 \cdot h$, minden $h \in \mathbb{R}$-re.

$H_1 = \mathbb{R}$ is triviálisan látszik.

H_2 meghatározásához az $(1+h)^2 \geq 1 + 2 \cdot h$ másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldanunk, amely szintén minden valós h-ra fennáll, tehát $H_2 = \mathbb{R}$.

Ha $n = 3$, akkor (1) bal oldalát kifejtve és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy $3h^2 + h^3 \geq 0$, azaz $h \geq -3$. Így $H_3 = [-3, \infty)$.

A következő néhány H_k halmaz pedig így néz ki:

$H_4 = \mathbb{R}$,
$H_5 = [-2.650, \infty)$,
$H_6 = \mathbb{R}$,
$H_7 = [-2.491, \infty)$,
$H_8 = \mathbb{R}$,

$H_9 = [-2.399, \infty)$, stb.

(Ezekből a numerikus számításokból sejthetjük meg például, hogy a H_k halmazok közös része $k \in \mathbb{N}$-re a $[-2, \infty)$ intervallum lesz.) Az 1. állítással – H_k definíciójából következően – nyilván ekvivalens az alábbi

2. állítás. $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} H_k = [-2, \infty)$.

Térjünk rá az 1. állítás teljes indukciós bizonyítására. Az állítás egyik irányaként először azt mutatjuk meg, hogy ha $h \geq -2$ valós szám, akkor az (1) egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll.

$n = 0$-ra és $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel tehát, hogy valamely n természetes számra már igaz az egyenlőtlenség; belátjuk, hogy ekkor $(n+1)$-re is igaz.

$$(1+h)^{n+1} = (1+h) \cdot (1+h)^n = (1+h)^n + h \cdot (1+h)^n \geq$$

$$\geq 1 + n \cdot h + h \cdot (1+h)^n,$$

az indukciós feltételt használva. Elég tehát belátni, hogy

$$1 + n \cdot h + h \cdot (1+h)^n \geq 1 + (n+1) \cdot h,$$

vagyis hogy

$$h \cdot (1+h)^n \geq h.$$

Ha $h = 0$, ez triviálisan igaz. Ha $h > 0$, h-val osztva az egyenlőtlenséget a bal oldalon 1-nél nagyobb-egyenlő szám áll. Ha pedig $h < 0$, h-val osztva legutóbbi egyenlőtlenségünk ebbe megy át:

$$(1+h)^n \leq 1,$$

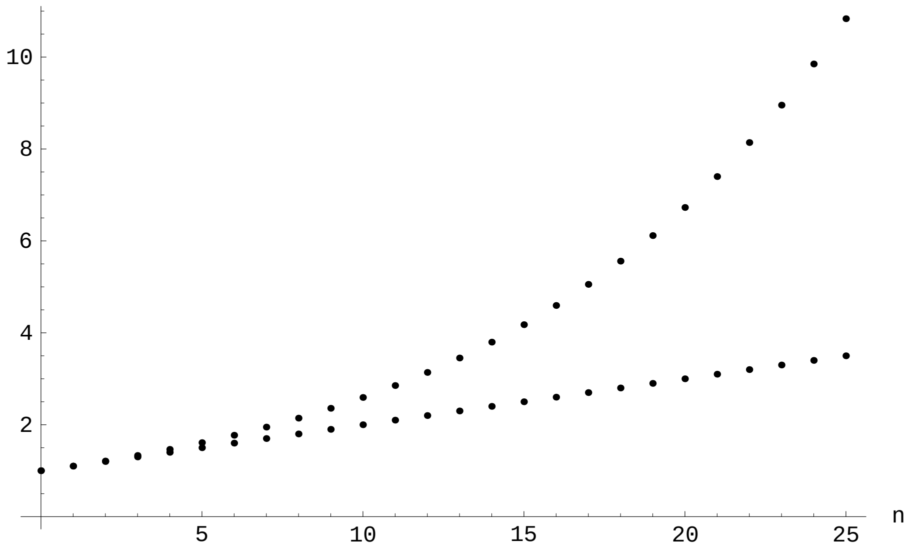
ami szintén igaz, hiszen $-2 \leq h < 0$ miatt a bal oldalon (-1) és 1 közötti számok szorzata áll, ami nem lehet nagyobb 1-nél. ■

Megjegyezzük, hogy hibát követtünk volna el a bizonyításban, ha az első átalakításnál az indukciós feltételt közvetlenül a szorzatra alkalmaztuk volna; nevezetesen

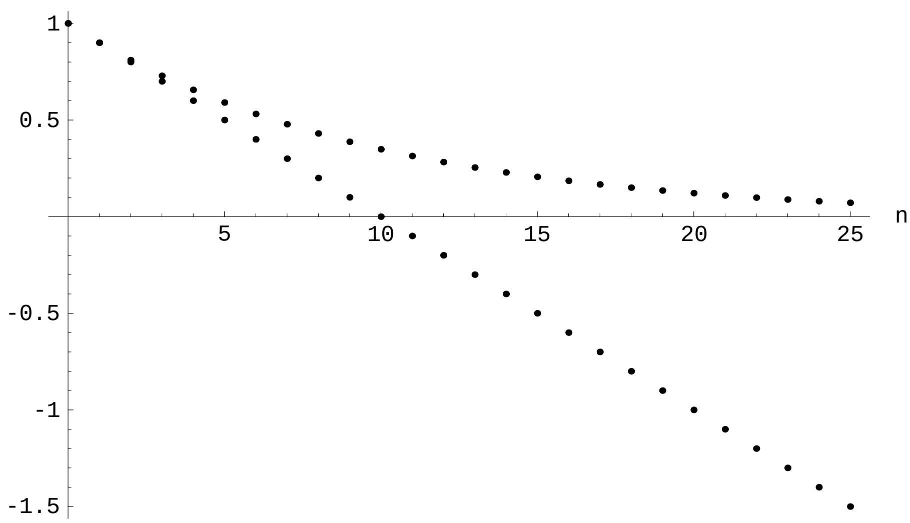
$$(1+h)^{n+1} = (1+h) \cdot (1+h)^n \geq (1+h)(1 + n \cdot h)$$

általában nem igaz, ugyanis $(1+h)$ negatív is lehet, és ekkor fordított reláció állna fenn a két oldal között.

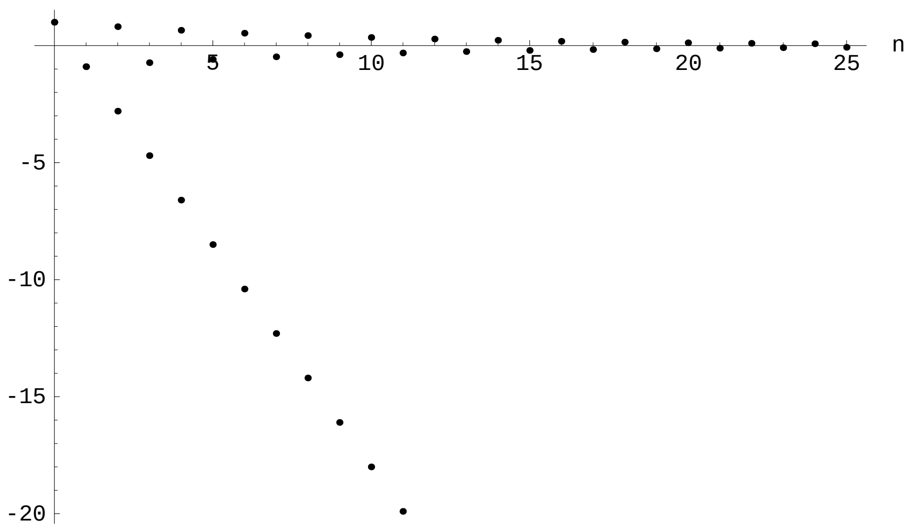
Az alábbi ábrák mutatják (1) bal- és jobb oldalának tipikus viselkedését különböző (rögzített) $h \geq -2$ számokra n függvényében. Jól látszik, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán álló (n-ben exponenciális) kifejezés mindig nagyobb-egyenlő a jobb oldalon álló (n-ben elsőfokú) kifejezésnél.



$h = 0.1$



$h = -0.1$



$h = -1.9$

Az 1. állítás másik irányához azt kell belátnunk, hogy ha $h < -2$ valós szám, akkor *van olyan* n természetes szám, melyre

$$(1+h)^n < 1 + n \cdot h. \tag{2}$$

A bizonyítás lényege a következő lesz: ha $h < -2$ rögzített szám, akkor (2) bal oldala abszolút értékben exponenciális sebességel nő, amint n végigfut a pozitív egészeken, míg a jobb oldal n-ben csak egy (elsőfokú) polinom. Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény azonban minden rögzített fokszámú polinomnál „gyorsabban nő", ezért lesz olyan n érték, ahol $|1+h|^n > |1 + n \cdot h|$, amiből már egyszerű előjelmegfontolással következik egyenlőtlenségünk. A precíz kivitelezéshez szükségünk lesz a Bernoulli-egyenlőtlenség egy újabb általánosítására, melyet szintén indukcióval igazolunk.

3. állítás. Legyen $h \geq 0$ tetszőleges valós és n tetszőleges természetes szám. Ekkor

$$(1+h)^n \geq 1 + n \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2.$$

Bizonyítás. Az $n = 0$, $n = 1$ és $n = 2$ esetekre nyilván igaz az állítás. Az $(n+1)$-re vonatkozó alak igazsága következik az n-re felírt becslésből, ugyanis

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n + h \cdot (1+h)^n \geq$$

$$\geq 1 + n \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2 + h \cdot (1+h)^n.$$

Elegendő lenne tehát megmutatni, hogy

$$1 + n \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2 + h \cdot (1+h)^n \geq 1 + (n+1) \cdot h + \frac{(n+1)n}{2} \cdot h^2,$$

azaz

$$h \cdot (1+h)^n \geq h + n \cdot h^2.$$

Ha $h = 0$, ez nyilvánvaló, ha pedig $h > 0$, akkor h-val osztva

$$(1+h)^n \geq 1 + n \cdot h$$

adódik, amit már beláttunk. ■

Ennek segítségével bebizonyítjuk a (2) egyenlőtlenséget. Legyen tehát $h < -2$ rögzített valós szám. Legyen p az a valós szám, melyet $|1+h| = 1+p$ definiál, azaz $p\colon = |1+h| - 1 = (-1-h) - 1 = -2-h$. Nyilván $p > 0$. Becsüljük meg (2) jobb és bal oldalának abszolút értékét.

A jobb oldal pozitív n egészek esetén negatív előjelű, mert $1+n\cdot h < 0 \iff h < -\frac{1}{n}$, és ez utóbbi $h < -2$ miatt igaz. Így $|1+n\cdot h| = -1-n\cdot h = -1+n(2+p)$, ha $n \in \mathbb{N}^+$.

A bal oldal abszolút értékének becsléséhez használjuk az imént bebizonyított 3. állítást:

$$|(1+h)^n| = (1+p)^n \geq 1 + n \cdot p + \frac{n(n-1)}{2} \cdot p^2.$$

Képezve most az

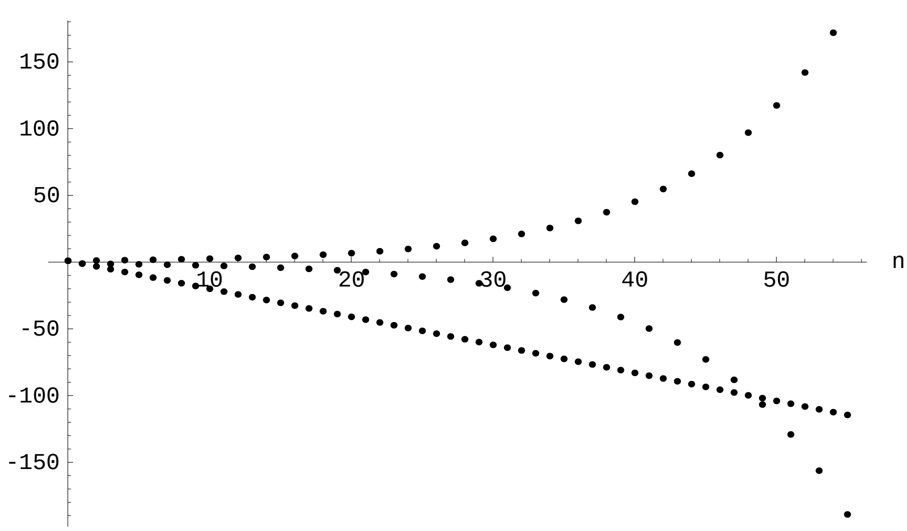
$$(1 + n \cdot p + \frac{n(n-1)}{2} \cdot p^2) - (-1 + n(2+p))$$

különbséget látható, hogy ez n-ben egy *pozitív* főegyütthatós másodfokú polinom, így elég nagy n természetes számtól kezdve értéke biztosan pozitív lesz. Ez azt jelenti, hogy elég nagy n természetes számtól kezdve

$$|(1+h)^n| > |1 + n \cdot h|.$$

Mivel pedig $(1+h)^n$ a páratlan n természetes számokra $(1+h) < 0$ miatt negatív, és $1 + n \cdot h$ a pozitív egész n-ekre negatív, az imént megállapított abszolút értékes becslés következtében biztosan lesz olyan $n \in \mathbb{N}$ szám, melyre (2) fennáll. ■

Az ábra szépen szemlélteti mindezt, ahol a $h = -2.1$ választás mellett ábrázoltuk (2) bal- illetve jobb oldalát $n \in \mathbb{N}$ függvényében.



$$h = -2.1$$

Ezzel az 1. állítást (és így a vele ekvivalens 2. állítást is) teljes egészében beláttuk.