Matematika A1

8. feladatsor

Differenciálás 2

Trigonometrikus függvények deriváltja

1. Határozzuk meg a dy/dx függvényt.

   (a) $y = -10x + 3\cos x$
   Megoldás: $-10 - 3\sin x$

   (b) $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
   Megoldás: $-\csc x \operatorname{ctg} x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

   (c) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}$
   Megoldás: $\frac{-\csc^2 x}{(1+\operatorname{ctg} x)^2}$

   (d) $y = \operatorname{tg} x - x$
   Megoldás: $\sec^2 x - 1$

   (e) $y = \frac{1+\csc x}{1-\csc x}$
   Megoldás: $\frac{-2\csc x \ \operatorname{ctg} x}{(1-\csc x)^2}$

   (f) $y = \sec x \csc x$
   Megoldás: $\sec x \csc x(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

A láncszabály. Paraméteres egyenletek

2. Határozzuk meg a megadott $y = f(u)$ és $u = g(x)$ függvények alapján a $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$ deriváltat.

   (a) $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$
   Megoldás: $12x^3$

   (b) $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$
   Megoldás: $3\cos(3x + 1)$

   (c) $y = \operatorname{tg} u, \quad u = 10x - 5$
   Megoldás: $10\sec^2(10x - 5)$

3. Deriváljuk a függvényeket.

   (a) $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
   Megoldás: $\left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-8}$

   (b) $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
   Megoldás: $4\left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^3 \left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

   (c) $y = \sec(\operatorname{tg} x)$
   Megoldás: $\sec(\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$

   (d) $y = \sin^3 x$
   Megoldás: $3\sin^2 x(\cos x)$

   (e) $y = \cos^4(1-2x)$
   Megoldás: $8\cos^3(1-2x)\sin(1-2t)$

   (f) $y = \sin(\cos(2x-5))$
   Megoldás: $-2\cos(\cos(2x-5))(\sin(2x-5))$

   (g) $y = (1 + \operatorname{ctg}(t/2))^{-2}$
   Megoldás: $\frac{(\csc^2 \frac{x}{2})}{(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2})^2}$

   (h) $y = \sin(x^2)\cos(2x)$
   Megoldás: $-2\sin(x^2)\sin(2x) + 2x\cos(2x)\cos(x^2)$

   (i) $y = 4\sin\sqrt{1+\sqrt{x}}$
   Megoldás: $\frac{\cos\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{x}}$

   (j) $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}$
   Megoldás: $\frac{-1}{2x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}}$

   (k) $y = (2x+1)\sqrt{2x+1}$
   Megoldás: $3\sqrt{2x+1}$

   (l) $y = \frac{3}{(5x^2+\sin^2 x)^{3/2}}$
   Megoldás: $-9\left(\frac{5x+\cos 2x}{(5x^2+\sin 2x)^{5/2}}\right)$

4. Határozzuk meg a az y'' függvényt.

   (a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
   Megoldás: $\frac{6}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

   (b) $y = \frac{1}{9}\operatorname{ctg}(3x-1)$
   Megoldás: $2\csc^2(3x-1)\operatorname{ctg}(3x-1)$

5. Legyen $y = x^{3/2}$, határozzuk meg a dy/dx értékét a láncszabály alapján, amennyiben y-t
   (a) az $y = u^3$ és az $u = \sqrt{x}$; illetve
   (b) az $y = \sqrt{u}$ és az $u = x^3$ függvények kompoziciójának tekintjük.

   Megoldás: $dy/dx = (3/2)x^{1/2}$

6. Határozzuk meg az xy-síkban mozgó részecske pályájának alakját és egyenletét Descartes-féle koordinátákban a helyzetét megadó paraméteres egyenletek alapján. Jelezzük, hogy a görbe mely részén, milyen irányban halad végig a részecske.
   (a) $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
   (b) $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$
   (c) $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \operatorname{tg} t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

7. Írjuk fel a paraméteresen megadott görbéget a megadott paraméterétékhez tartozó pontjukban érintő egyenes egyenletét. Adjuk meg ugyanebben a pontban a d^2y/dx^2 derivált értékét is.
   (a) $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad t = \pi/4$
   Megoldás: $y = -x + 2, \quad -\sqrt{2}$

   (b) $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$
   Megoldás: $y = x + \frac{1}{4}, \quad -2$

   (c) $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \pi/2$
   Megoldás: $y = 2, \quad -1$

   (d) $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$
   Megoldás: $y = x - 4, \quad \frac{1}{2}$

Implicit függvény deriváltja

8. Határozzuk meg az implicit deriválás módszerével a dy/dx deriváltat.
   (a) $x^2y + xy^2 = 6$
   Megoldás: $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

   (b) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
   Megoldás: $\frac{1}{y(x+1)^2}$

   (c) $x = \operatorname{tg} y$
   Megoldás: $\cos^2 y$

   (d) $y^2 = \frac{x}{x+1}$
   Megoldás: $\frac{1}{2y(x+1)^2}$

9. Az implicit deriválás módsterével határozzuk meg a dy/dx, majd a d^2y/dx^2 deriváltat.

(a) $x^2 + y^2 = 1$
Megoldás: $y' = -\frac{x}{y}$, $\quad y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

(b) $y^2 = x^2 + 2x$
Megoldás: $y' = \frac{x+1}{y}$, $\quad y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

(c) $2\sqrt{y} = x - y$
Megoldás: $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}$, $\quad y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

10. Elenrizzük, hogy a megadott pont illeszkedik a görbére, majd írjuk fel az adott pontbeli érintő és normális egyenletét.

(a) $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$
Megoldás: érintő: $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$, normális: $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

(b) $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$
Megoldás: érintő: $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$, normális: $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

(c) $y = \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$
Megoldás: érintő: $y = 2\pi x - 2\pi$, normális: $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

Kapcsolt deriváltak

11. **Térfogat.** Ha egy henger alapja r sugarú kör, magassága pedig h, akkor térfogata $V = \pi r^2 h$

(a) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt és a dh/dt derivált között, ha r konstans?
Megoldás: $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

(b) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt és dr/dt deriváltak között, ha h konstans?
Megoldás: $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr \frac{dr}{dt}$

(c) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt, a dr/dt és dh/dt deriváltak között, ha sem r, sem h nem konstans?
Megoldás: $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi hr \frac{dr}{dt}$

12. **Távolság.** Tegyük fel, hogy x és y egyaránt a t változó differenciálható függvénye. Az xy sík $(x, 0)$ és $(0, y)$ pontjainak távolsága $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Milyen kapcsolat áll fenn ds/dt és a dx/dt deriváltak között, ha y konstans?
Megoldás: $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{dt}$

(b) Milyen kapcsolat áll fenn ds/dt, dx/dt és a dy/dt derivált között, ha egyik mennyiség sem állandó?
Megoldás: $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dy}{dt}$

(c) Milyen kapcsolat áll fenn dx/dt és dy/dt deriváltak között, ha s konstans?
Megoldás: $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$

13. **Növekvő homokdomb.** Egy konténerből percenként 10m^3 homokot szórnak ki egy kúp alakú homokdomb tetejére. A kúp magassága mindvégig az alapkör átmérőjének az egyharmada. Mekkora a domb **(a)** magasságának és **(b)** alapköre sugarának változási sebessége (cm/min egységben), amikor a homokdomb éppen 4m magas? (Kúp térfogata: $V = (1/3)\pi r^2 h$)
Megoldás: (a) $\frac{dh}{dt} = 11.19 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$, **(b)** $\frac{dr}{dt} = 14.92 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$

14. **Síkbeli mozgás.** Az xy-síkban mozgó test x- és y-koordinátája egyaránt a t idő differenciálható függvénye; $dx/dt = -1\text{m/s}$, $dy/dt = -5\text{m/s}$. Milyen sebességgel távolodik a részecske az origótól, amikor áthalad az $(5, 12)$ ponton?
Megoldás: $-5\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Linearizáció és differenciáltak

15. Keressük meg az $f(x)$ függvény $L(x)$ linearizációját az $x = a$ helyen.

    (a) $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
    Megoldás: $L(x) = 10x - 13$

    (b) $f(x) = x\frac{1}{x}, \quad a = 1$
    Megoldás: $L(x) = 2$

    (c) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = -\pi/4$
    Megoldás: $L(x) = 2x + \frac{\pi-2}{2}$

16. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = (1 + x)^k$ függvény linearizációja az $x = 0$ helyen $L(x) = 1 + kx$
Megoldás: $f(0) = 1$; továbbá $f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$, így $f'(0) = k$. Az $x = 0$ helyen vett linearizáció ennélfogva $L(x) = 1 + kx$

17. Keressük meg az $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ függvény linearizációját az $x = 0$ pontban. Hogyan viszonyul ez a lineáris közelítés a $\sqrt{x+1}$ és a $\sin x$ függvény $x = 0$ pontbeli linearizációihoz?

18. Írjuk fel a dy differenciált.

    (a) $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
    Megoldás: $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx$

    (b) $2y^{3/2} + xy - x = 0$
    Megoldás: $\frac{1-y}{3\sqrt{y}+x} dx$

    (c) $y = \sin(5\sqrt{x})$
    Megoldás: $\frac{5}{2\sqrt{x}} \cos(5\sqrt{x}) dx$