

Matematika A1

7. feladatsor

Differenciálás

Meredekség, érintők

1. Írjuk fel a görbét az adott pontban érintő egyenletét; számításunkat ellenőrizzük a görbe és az érintő ábrázolásával.

(a) $y = 4 - x^2$, $(-1, 3)$
Megoldás: $y = 2x + 5$

(b) $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$
Megoldás: $y = x + 1$

(c) $y = x^3$, $(-2, -8)$
Megoldás: $y = 12x + 16$

(d) $y = \frac{x}{x-2}$, $(3, 3)$
Megoldás: $y = -2x + 9$

2. Állapítsuk meg a görbét az adott abszcisszájú pontban érintő egyenes meredekségét.

(a) $y = 5x^2$, $x = -1$
Megoldás: $m = -10$

(b) $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 3$
Megoldás: $m = -1/4$

3. A megadott görbék melyik pontjában lesz vízszintes az érintő.

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$
Megoldás: $(-2, -5)$

(b) $f(x) = x^3 - 3x$
Megoldás: $(-1, 2), (1, -2)$

4. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban?

Megoldás: Igen.

5. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban? Indokoljuk válaszunkat.

Megoldás: Igen.

A derivált kiszámítása

6. A definíció alapján határozzuk meg a függvény deriváltját; számítsuk ki a derivált értékét a megadott helyen.

(a) $f(x) = 4 - x^2$, $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'(1)$

Megoldás: derivált: $-2x$, 6 , 0 , -2

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'(\sqrt{3})$

Megoldás: derivált: $-\frac{2}{x^3}$, 2 , $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(c) $f(x) = \sqrt{3x}$, $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(2/3)$

Megoldás: derivált: $\frac{3}{2\sqrt{3x}}$, $\frac{3}{2\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

7. Ábrázoljuk a megadott függvényeket, majd a jobb és a bal oldali deriváltak kiszámításával igazoljuk, hogy a függvények a megadott P pontban nem deriválhatók.

(a) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $P = (0, 0)$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$, $P = (1, 2)$

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $P = (1, 1)$

Deriválási szabályok

8. Határozzuk meg a függvények első és második deriváltját

(a) $y = -x^2 + 3$

Megoldás: $-2x$, -2

(b) $y = \frac{4x^3}{3} - x$

Megoldás: $4x^2 - 1$, $8x$

(c) $y = \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2x}$

Megoldás: $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{2x^2}$, $\frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^3}$

(d) $y = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

Megoldás: $4x^3$, $12x^2$

(e) $y = \left(\frac{x^2+3}{12x}\right) \left(\frac{x^4-1}{x^3}\right)$
Megoldás: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^{-3} + x^{-5}, \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^{-4} - 5x^{-6}$

9. Határozzuk meg a függvények első deriváltját.

(a) $y = \frac{2x+5}{3x-2}$
Megoldás: $-\frac{19}{(3x-2)^2}$

(b) $y = (1-x)(1+x^2)^{-1}$
Megoldás: $\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

(c) $y = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
Megoldás: $-\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

(d) $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
Megoldás: $\frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

10. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ függvény n -edik deriváltját, n tetszőleges pozitív egész szám esetén.

11. Tegyük fel, hogy u és v egyaránt differenciálható függvények, továbbá $u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$. Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = 0$ helyen.

(a) $\frac{d}{dx}(uv)$
Megoldás: 13

(b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$
Megoldás: -7

(c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$
Megoldás: $7/25$

(d) $\frac{d}{dx}(7v - 2u)$
Megoldás: 20

12. Igazoljuk, hogy ha az f , g , h differenciálható függvény és az fgh függvény létezik, akkor fgh is differenciálható és

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$