Matematika A1

5. gyakorlat

Számsorozatok

1. Igazoljuk a határérték definiciója alapján az állítást és határozzunk meg egy N küszöbindexet az $\varepsilon = 10^{-4}$ hibakorláthoz!

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2}$
   Megoldás: $N = 12501$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-3}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$
   Megoldás: $N = 105$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 0$
   Megoldás: $N = 6931$

2. A ∞-hez tartás definiciója alapján mutassa meg, hogy az $a_n = n^3 - 2n^2$ sorozat a ∞-hez tart, és határozzon meg az $M = 1000$ alsó küszöbértékhez egy N küszöbindexet!
   Megoldás: $N = 10$

3. Az alább megadott sorozatok közül állapítsuk meg, hogy melyek konvergensek, és melyek divergensek. A konvergens sorozatok esetében határozzuk meg a sorozat határértékét is!

   (a) $a_n = 1 + (0.1)^n$
   Megoldás: Konvergens, 1

   (b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$
   Megoldás: Konvergens, -1

   (c) $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$
   Megoldás: Konvergens, -5

   (d) $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$
   Megoldás: Divergens

   (e) $a_n = 1 + (-1)^n$
   Megoldás: Divergens

   (f) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
   Megoldás: Konvergens, 0

(g) $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$
Megoldás: Konvergens, $\sqrt{2}$

(h) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
Megoldás: Konvergens, 1

(i) $a_n = 8^{1/n}$
Megoldás: Konvergens, 1

(j) $a_n = \sqrt[n]{10n}$
Megoldás: Konvergens, 1

(k) $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$
Megoldás: Konvergens, 4

(l) $a_n = \frac{n!}{n^n}$
Megoldás: Konvergens, 0

(m) $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$
Megoldás: Divergens

(n) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$
Megoldás: Konvergens, 1

(o) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
Megoldás: Konvergens, 0.5

4. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \frac{n^k + k}{n^k}$ általános taggal adott sorozat adott k pozitív egész esetén konvergens. Adjuk meg $k = 1, 2, 3, 4$ esetben az $\varepsilon = \frac{1}{100}$-hoz tartozó küszöbindexet.
Megoldás: 100, 14, 6, 4

5. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorozatok növekvőek, illetve korlátosak-e.

   (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$
   Megoldás: Növekvő, korlátos

   (b) $a_n = \frac{2^n \cdot 3^n}{n!}$
   Megoldás: Korlátos

   (c) $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$
   Megoldás: Növekvő, korlátos

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{a_n\}$ konvergens sorozat, akkor minden pozitív ε számhoz létezik olyan N egész szám, amelyre teljesül, hogy minden m és n esetén

$$m > N \text{ és } n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

7. Mi a határértéke az $a_1 = 4$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 2$ sorozatnak?
   Megoldás: 4

8. Az $\{a_n\}$ sorozat első eleme a, általános tagját pedig az $a_{n+1} = ba_n + c$ képlettel adjuk meg, ahol a, b, c adott valós számokat jelentenek. Az a, b és c paraméter mely értékei esetén lesz az $\{a_n\}$ sorozat kovergens?
   Megoldás: Ha $|b| < 1$, akkor a és c tetszleges, a határérték $\frac{c}{1-b}$. Ha $b = -1$, akkor $c = 2a$, ahol a tetszleges, a határérték a. Ha $b = 1$, akkor $c = 0$, a határérték a. Ha $|b| > 1$, akkor $c = a(1-b)$, a határérték a.

9. Tekintsük az $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$, $n > 1$ képlettel adott sorozatot. Igazoljuk, hogy a sorozat határértéke $\sqrt{2}$.
   Megoldás: Először mutassuk meg, hogy a sorozat minden eleme nagyobb $\sqrt{2}$-nél, majd bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő.

10. Tekintsük az $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ képlettel adott sorozatot.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens.

    (b) Mutassuk meg, hogy a sorozat határértéke $\frac{1}{3}$.

11. Határozzuk meg a megadott sorozatok torlódási pontjainak halmazát.

    (a) $a_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$
    Megoldás: $\{-2, 0, 2\}$

    (b) $\sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$
    Megoldás: $\{0, \frac{\sqrt{6}}{3}\}$