Matematika A1

4. gyakorlat

Határérték

1. Következik-e abból, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ az, hogy f értelmezve van az 1 helyen? Ha igen, vajon szükségképpen fennáll, hogy $f(1) = 5$? Állíthatunk egyáltalán *bármit* is az $f(1)$ függvényértékéről?
Megoldás: Nem; nem; nem.

2. Számítsuk ki a határértékeket!

   (a) $\lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
   Megoldás: 3/2

   (b) $\lim_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$
   Megoldás: 3/2

   (c) $\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$
   Megoldás: 4/3

   (d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$
   Megoldás: 1/2

3. Adjuk meg a következő határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ és $\lim_{x\to b} g(x) = -3$.

   (a) $\lim_{x\to b}(f(x) + g(x))$
   Megoldás: 4

   (b) $\lim_{x\to b} f(x) \cdot g(x)$
   Megoldás: -21

   (c) $\lim_{x\to b} 4g(x)$
   Megoldás: -12

   (d) $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$
   Megoldás: -7/3

4. Rajzoljuk le a függvény grafikonját, majd az ábra alapján keressük meg az L határértéket az x_0 pontban, valamint határozzunk meg olyan $\delta > 0$ számot, amelyre bármely x, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén fennáll $|f(x) - L| < \epsilon$.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 1/4$
Megoldás: $\delta = 7/16$

(b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 1$
Megoldás: $\delta = \sqrt{5} - 2$

5. Adott egy $f(x)$ függvény, valamint egy x_0 és egy ϵ szám. Állapítsuk meg, hogy mennyi $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Ezután adjunk meg egy δ számot, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

(a) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = -7$, $\epsilon = 0.1$
Megoldás: $L = -9$, $\delta = 0,05$

(b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0,05$
Megoldás: $L = 4$, $\delta = 0,05$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - 5x}$, $x_0 = -3$, $\epsilon = 0,5$
Megoldás: $L = 4$, $\delta = 0,75$

(d) $f(x) = mx + b$, $x_0 = 1/2$, $\epsilon = c$
Megoldás: $L = (m/2) + b$, $\delta = \frac{c}{m}$

6. Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to c} f(x) = L$ pontosan akkor áll fenn, ha $\lim_{h \to 0} f(h + c) = L$.

7. Mennyi $\lim_{x \to 0} f(x)$, ha minden $-1 \leq x \leq 1$ esetén $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$?
Megoldás: $\sqrt{5}$

8. Tegyük fel, hogy a $[-1, 1]$ intervallum minden x elemére $x^4 \leq f(x) \leq x^2$, $x < -1$ és $x > 1$ esetén pedig $x^2 \leq f(x) \leq x^4$. Mely c pontok esetén tudjuk ennek alapján biztosan, hogy létezik a $\lim_{x \to c} f(x)$ határérték? Mit mondhatunk ezekről a határértékekről?
Megoldás: $c = 0, 1, -1$; a határérték a 0 helyen $c = 0$, $c = \pm 1$ esetén pedig 1.

9. Számítsuk ki a határértékeket!

(a) $\lim_{x \to -0,5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
Megoldás: $\sqrt{3}$

(b) $\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x}{x+1}\right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$
Megoldás: 1

(c) $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5} - \sqrt{5}}{h}$
Megoldás: $2/\sqrt{5}$

(d) $\lim_{x \to -2^+} (x + 3) \frac{|x+2|}{x+2}$
Megoldás: 1

(e) $\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$
Megoldás: -1

(f) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$
Megoldás: 1

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$
Megoldás: 2

(h) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$
Megoldás: 1/2

10. Számítsuk ki a megadott függvények határértékét, amint $x\to\infty$ és amint $x\to-\infty$.

(a) $f(x)=\frac{2}{x}-3$
Megoldás: -3; -3

(b) $g(x)=\frac{1}{2+(1/x)}$
Megoldás: 1/2; 1/2

(c) $h(x)=\frac{-5+(7/x)}{3-(1/x^2)}$
Megoldás: -5/3; -5/3

11. Számítsuk ki a megadott határértékeket.

(a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3x}$
Megoldás: ∞

(b) $\lim_{x\to 7}\frac{4}{(x-7)^2}$
Megoldás: ∞

(c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3x^{1/3}}$
Megoldás: ∞

(d) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3x^{1/3}}$
Megoldás: $-\infty$

12. $\lim\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$, amint

(a) $x\to 0^+$
Megoldás: $-\infty$

(b) $x\to 2^+$
Megoldás: 1/4

(c) $x\to 2^-$
Megoldás: 1/4

(d) $x \to 2$
Megoldás: $1/4$

(e) Mit mondhatunk (ha mondhatunk valamit egyáltalán) a függvény határértékéről, amint $x \to 0$?
Megoldás: $-\infty$ lesz.

13. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}} \right)$, amint

(a) $x \to 0^+$
Megoldás: ∞

(b) $x \to 0^-$
Megoldás: ∞

(c) $x \to 1^+$
Megoldás: ∞

(d) $x \to 1^-$
Megoldás: ∞