

Matemaitka A1

3. gyakorlat

Térvektorok

Alapműveletek

- Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a(z)
 - x-tengelyre és azt a $(3, 0, 0)$ pontban metszi,
 - z-tengelyre és azt a $(0, 0, 2)$ pontban metszi.
- Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3, -1, 2)$ ponton és párhuzamos a(z)
 - x-tengellyel,
 - y-tengellyel,
- Legyen $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$ és $\mathbf{v} = (-2, 5, 0)$. Határozzuk meg a megadott vektorok komponenseit és nagyságát (hosszát)!
 - $3\mathbf{u}$
 - $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$
- Keressük meg a $P_1\vec{P}_2$ irányvektorát, és a P_1P_2 szakasz felezőpontját!
 - $P_1(-1, 1, 5)$ $P_2(2, 5, 0)$
 - $P_1(3, 4, 5)$ $P_2(2, 3, 4)$

Skalárszorzat

- Határozzuk meg az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ értékeit; \mathbf{u} és \mathbf{v} szögének koszinuszát; \mathbf{u} -nak a \mathbf{v} irányú skaláris komponensét.
 - $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- A rombusz átlói:** Mutassuk meg, hogy a rombusz (egyenlő oldalú paralelogramma) átlói merőlegesek egymásra!
- Vektorra merőleges egyenes:** Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektor merőleges az $ax + by = c$ egyenesre. Gondoljunk arra, hogy v meredeksége negatív reciproka az egyenes meredekségének.

Vektorszorzat

- Számítsuk ki az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ és a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ vektor hosszát és adjuk meg irányát is (amennyiben értelmezve van)!
 - $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

9. Számítsuk ki a P, Q, R pontok által meghatározott háromszögnek a területét, majd adjunk meg egy PQR síkra merleges egységvektort!
- (a) $P(1, 1, 1), Q(2, 1, 3), R(3, -1, 1)$.
 (b) $P(2, -2, 1), Q(3, -1, 2), R(3, -1, 1)$.

Vegyesszorzat

10. Ellenőrizzük az $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$ azonosságot, majd számítsuk ki a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!
- (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \mathbf{v} = 2\mathbf{j}, \mathbf{w} = 2\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
11. Mi az, ami az alábbiak közül mindig igaz, és mi az, ami nem mindig? Indokoljunk is!
- (a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$
 (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$
 (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$
 (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
12. Adott \mathbf{u}, \mathbf{v} és \mathbf{w} vektorok skaláris vagy vektoriális szorzataként írjuk fel a következőket:
- (a) \mathbf{u} merőleges vetítése \mathbf{v} -re;
 (b) egy \mathbf{u} -ra és \mathbf{v} -re ortogonális vektor;
 (c) az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.

Térgeometria

13. Írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét!
- (a) A $P(3, -4, -2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes.
 (b) A $P(-2, 0, 3)$ és $Q(3, 5, -2)$ pontokon átmenő egyenes.
 (c) A $(0, -7, 0)$ ponton átmenő, az $x + 2y + 2z = 13$ síkra merőleges egyenes.
14. Írjuk fel az $(1, 1, -1), (2, 0, 2), (0, -2, 1)$ pontokon átfektetett sík egyenletét.
15. Keressük meg az $x = 2t + 1, y = 3t + 2, z = 4t + 3$, valamint az $x = s + 2, y = 2s + 4, z = -4s - 1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenesét!
16. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmeny a $P_0(2, 1, -1)$ ponton és merőleges a $2x + y - z = 3, x + 2y + z = 2$ síkok metszésvonalára.
17. Határozzuk meg a $(0, 0, 12)$ pont és az $x = 4t, y = -t, z = 2t$ egyenes távolságát!
18. Határozzuk meg a $(0, -1, 0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík távolságát!
19. Határozzuk meg az $x + y = 1$ és a $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét!
20. Határozzuk meg az egyenes és a sík dőléspontját!
- (a) $x = 1 - t, y = 3t, z = 1 + t; 2x - y + 3z = 6$
 (b) $x = 1 + 2t, y = 1 + 5t, z = 3t; x + y + z = 2$
21. Párhuzamos-e a az $x = 1 - 2t, y = 2 + 5t, z = -3t$ egyenes a $2x + y - z = 8$ síkkal? Indokoljuk a választ!
22. Az a, b, c nemnulla számokkal $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ grafikonja egy sík. Mely síkoknak ilyen alakú az egyenletük?