

# Matematika A1

## 12. feladatsor

### Inverz trigonometrikus függvények

1. Határozzuk meg a függvényértékeket!

(a)  $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

(b)  $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

(c)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right))$  (A megoldás *nem*  $-\pi/4$ )

2. Egyszerűsítsük a trigonometrikus kifejezéseket!

(a)  $\operatorname{tg}(\arccos x)$

(b)  $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 2x}), \quad x \geq 2$

(c)  $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

(d)  $\cos\left(\arcsin \frac{y}{5}\right)$

3. Határozzuk meg az  $y$  deriváltját!

(a)  $y = \arccos(x^2)$

(b)  $y = \arcsin \frac{3}{x^2}$

(c)  $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$

(d)  $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

4. Határozzuk meg az integrálokat!

(a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

(b)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$

(c)  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+3x^2}$

(d)  $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

(e)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

(f)  $\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(g)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$

## Hiperbolikus függvények

5. Egyszerűsítsük a kifejezéseket! Első lépésben írjuk fel a hiperbolikus függvényeket exponenciálisok segítségével!

- (a)  $2\operatorname{ch}(\ln x)$
- (b)  $\operatorname{ch} 3x - \operatorname{sh} 3x$
- (c)  $\ln(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + \ln(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$

6. Deriváljuk a függvényeket!

- (a)  $y = 6\operatorname{sh} \frac{x}{9}$
- (b)  $y = \ln(\operatorname{sh} x)$
- (c)  $y = \operatorname{arsh} \sqrt{x}$
- (d)  $y = \operatorname{arsh}(\operatorname{tg} x)$

7. Határozzuk meg az integrálokat!

- (a)  $\int \operatorname{sh} 2x dx$
- (b)  $\int 4\operatorname{ch}(3x - \ln 2) dx$
- (c)  $\int_0^{\ln 2} \operatorname{th} x dx$
- (d)  $\int_0^{\ln 2} 4e^{-x} \operatorname{sh} x dx$
- (e)  $\int_1^4 \frac{8\operatorname{ch} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

8. Számítsuk ki az integrálokat

- az inverz hiperbolikus függvények,
- a természetes logaritmus

segítségével!

- (a)  $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$
- (b)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$
- (c)  $\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

## Integrálási technikák

### Egyszerű integrációs formulák

9. Megfelelő helyettesítés segítségével végezzük el az integrálást!

- (a)  $\int \frac{3 \cos x dx}{\sqrt{1+3 \sin x}}$
- (b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

$$(c) \int \frac{\operatorname{ctg}(3+\ln x)}{x} dx$$

$$(d) \int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x \cos(\ln x)}$$

10. Végezzük el az integrálásokat! Ahol szükséges, alkalmazzunk helyettesítést!

$$(a) \int_1^2 \frac{8dx}{x^2-2x+2} \quad (\text{Teljes négyzetté kiegészítés})$$

$$(b) \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} \quad (\text{Teljes négyzetté kiegészítés})$$

$$(c) \int \frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4} dx \quad (\text{Maradékos polinomosztás})$$

$$(d) \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{Törtek szétválasztása})$$

$$(e) \int \frac{1}{1+\sin x} dx \quad (1\text{-gyel való szorzás})$$

$$(f) \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx \quad (\text{Gyökjel eltüntetése})$$

11. Különböző átalakítások használatával számoljuk ki az integrálokat!

$$(a) \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \operatorname{ctg}(x + \ln x) dx$$

$$(b) \int 3 \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} + \ln 5\right) dx$$

$$(c) \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$$

### Parciális integrálás

12. Számítsuk ki az integrálokat!

$$(a) \int x^2 \cos x dx$$

$$(b) \int (x^2 + x + 1)e^x dx$$

$$(c) \int_0^{\sqrt{2}} 2x \arcsin x^2 dx$$

$$(d) \int e^{2x} \cos 3x dx$$

13. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! Először alkalmazzunk helyettesítést, majd integráljunk parciálisan!

$$(a) \int e^{\sqrt{3x+9}} dx$$

$$(b) \int \ln(x + x^2) dx$$

$$(c) \int \sin(\ln x) dx$$

### Racionális törtfüggvények integrálása

14. Parciális törtekre bontással végezzük el az integrálást!

$$(a) \int \frac{x+4}{x^2+5x-6} dx$$

$$(b) \int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx$$

$$(c) \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

$$(d) \int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$$

- (e)  $\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2} dx$   
 (f)  $\int \frac{x^4}{x^2-1} dx$   
 (g)  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + \cos x - 2}$   
 (h)  $\int \frac{(x-2)^2 \operatorname{arctg} 2x - 12x^3 - 3x}{(4x^2+1)(x-2)^2} dx$

## Trigonometrikus integrálok

15. Számoljuk ki a határozott integrálokat!

- (a)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx$   
 (b)  $\int_0^{\pi} 8 \sin^4 x \cos^2 x dx$   
 (c)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx$   
 (d)  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} dx$   
 (e)  $\int_0^{\pi/4} 4 \operatorname{tg}^3 x dx$   
 (f)  $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 3x dx$   
 (g)  $\int_0^{\pi} \cos 3x \cos 4x dx$

## Trigonometrikus helyettesítések

16. Számítsuk ki az integrálokat!

- (a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$   
 (b)  $\int \sqrt{1-9x^2} dx$   
 (c)  $\int \frac{\sqrt{x^2-49}}{x} dx, \quad x > 7$   
 (d)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}}$   
 (e)  $\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4} dx$   
 (f)  $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$   
 (g)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$

**A**  $\operatorname{tg}(x/2) = z$  **helyettesítés**

Segítség:

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

17. Számoljuk ki az integrálokat.

(a)  $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

(b)  $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos x \, dx}{\sin x \cos x + \sin x}$

(c)  $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$