

Matematika A1

11. feladatsor

Integrálás

Newton-Leibnitz-tétel

1. Számítsuk ki az integrálok értékét!

(a) $\int_{-2}^0 (2x + 5) dx$

(b) $\int_1^{32} x^{-6/5} dx$

(c) $\int_0^\pi (1 + \cos x) dx$

(d) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$

(e) $\int_{-4}^4 |x| dx$

2. Az alábbi deriváltakat keressük meg

- az integrál kiszámításával és azt követő deriválással;
- az integrál közvetlen deriválásával!

(a) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^4} \sqrt{t} dt$

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$

(c) $\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Helyettesítéses integrálás

3. Számítsuk ki a határozatlan integrálok értékét és hozzuk őket a megszokott alakra!

(a) $\int \sin 3x dx, \quad u = 3x$

(b) $\int (1 - \cos \frac{x}{2})^2 \sin \frac{x}{2} dx, \quad u = 1 - \cos \frac{x}{2}$

(c) $\int \frac{9x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} dx, \quad u = 1 - x^3$

(d) $\int \frac{1}{x^2} \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

4. Számítsuk ki az integrálokat!

(a) $\int x \sqrt[4]{1-x^2} dx$

(b) $\int \sin(8x - 5) dx$

(c) $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$

(d) $\int \frac{\sin(2x+1)}{\cos^2(2x+1)} dx$

(e) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$

(f) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx$

5. A helyettesítési szabály segítségével számítsuk ki az integrálok értékeit!

(a) $\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx$

(b) $\int_0^1 \frac{5x}{(4+x)^2} dx$

(c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3 \sin x}} dx$

(e) $\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

(f) $\int_0^1 (x^3 + 6x^2 - 12x + 9)^{-1/2}(x^2 + 4x - 4) dx$

Transzcendens függvények

6. Az $y = f(x)$ függvény képlete alapján határozzuk meg az f^{-1} inverz függvény képletét, és adjuk meg f^{-1} értelmezési tartományát és értékkészletét. Ellenőrzés gyanánt mindegyik feladatnál mutassuk meg, hogy $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

(a) $f(x) = x^5$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$

7. Legyen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = -1 = f(3)$ helyen!

8. Legyen $f(x) = x^2 - 4x - 5, x > 2$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = 0 = f(5)$ helyen!

A logaritmusfüggvény

9. Fejezzük ki a logaritmikusat $\ln 2$ és $\ln 3$ segítségével!

(a) $\ln 0.75$

(b) $\ln 3\sqrt{2}$

(c) $\ln \sqrt[3]{9}$

10. Egyszerítsük az alábbi kifejezéseket!

(a) $\ln(8x + 4) - 2 \ln 2$

(b) $3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t + 1)$

11. Adjuk meg az y deriváltját!

(a) $y = \ln x^3$

(b) $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

(c) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$

12. Határozzuk meg az integrálokat!

(a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx$

$$(b) \int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$(c) \int_0^{\pi/12} 6 \operatorname{tg} 3x dx$$

13. A logaritmikus deriválás módszerével adjuk meg y deriváltját!

$$(a) y = \sqrt{x(x+1)}$$

$$(b) y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$$

$$(c) y = \frac{x+5}{x \cos x}$$

Az exponenciális függvény

14. Fejezzük ki y -t!

$$(a) \ln(1-2y) = x$$

$$(b) \ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \ln(\sin x)$$

$$(c) 100e^{10y} = 200$$

$$(d) e^{\sqrt{y}} = x^2$$

15. Határozzuk meg az y deriváltját!

$$(a) y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$$

$$(b) y = xe^x - e^x$$

$$(c) y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

16. Határozzuk meg az integrálokat!

$$(a) \int x^3 e^{x^4} dx$$

$$(b) \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$(c) \int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2} \cos(e^{x^2}) dx$$

17. Határozzuk meg a sorozatok határértékét!

$$(a) a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$$

$$(b) a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Általános hatványkifejezések

18. A logaritmikus deriválás módszerével határozzuk meg y deriváltját!

$$(a) y = (x+1)^x$$

$$(b) y = x^{\sqrt{x}}$$

$$(c) y = (\ln x)^{\ln x}$$

19. Határozzuk meg az integrálokat!

$$(a) \int_0^1 2^{-x} dx$$

$$(b) \int_2^4 x^{2x}(1+\ln x) dx$$

$$(c) \int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x} dx$$