

Matematika A1

10. feladatsor

Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály

1. A L'Hospital segítségével számítsuk ki a határértéket.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x}{7x^2 + 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$

2. A L'Hospital-szabály segítségével határozzuk meg az alábbi a_n sorozatok határértékét.

(a) $a_n = \frac{n^2 + 5}{n^2 + 3n + 1}$

(b) $a_n = n^2 \sin \frac{4}{n}$

3. Adjunk meg olyan c értéket, amelyre az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3 \sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos lesz az $x = 0$ helyen. Magyarázzuk meg, hogy miért jó az általunk adott c érték.

A Newton-módszer

4. Keressük meg a Newton-módszerrel az $x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet közelítő megoldását. A bal oldali megoldást először közelítsük az $x_0 = -1$ értékkel, a jobb oldali megoldást pedig az $x_0 = 1$ értékkel. Azután mindkét esetben keressük meg x_2 -t is.
5. A Newton-módszert alkalmazva keressük meg az $x^3 + 3x + 1 = 0$ egyenlet valós megoldásának közelítését. Legyen $x_0 = 0$, aztán keressük meg x_2 -t.
6. A Newton-módszerrel adjuk becslést az $f(x) = x^4 + x - 3$ függvény két zérushelyére. A bal oldali zérushely esetén legyen $x_0 = -1$, a jobb oldali zérushely esetén pedig $x_0 = 1$. Mindkét esetben határozzuk meg x_2 -t.
7. Legyen $f(x) = 3x - x^3$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = -4$ egyenletnek van megoldása a $[2, 3]$ intervallumban, s a megoldás megkereséséhez használjuk a Newton-módszert.

Primitív függvények

8. Határozzuk meg a megadott függvények primitív függvényét.

(a) $x^2 - 2x + 1$

(b) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$

(c) $2 - \frac{5}{x^2}$

(d) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(e) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(f) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

(g) $-\pi \sin \pi x$

(h) $3 \sin x$

(i) $x^2 - 2x + 1$

9. Határozatlan integrálok

(a) $\int (x + 1) dx$

(b) $\int (3x^2 + \frac{x}{2}) dx$

(c) $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$

(d) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

(e) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

(f) $\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2} dx$

(g) $\int \frac{4 + \sqrt{x}}{x^3} dx$

(h) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

(i) $\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx$

(j) $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x) dx$

10. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.

(a) $\int (2x + 1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$

(b) $\int 6(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C$

(c) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C$

(d) $\int \sqrt{2x + 1} dx = \sqrt{x^2 + x} + C$

(e) $\int (7x - 2)^2 dx = \frac{(7x-2)^3}{28} + C$

(f) $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$

11. Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

(b) $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

Integrálás

Közelítés véges összegekkel

12. Közelítsük a függvény alatti területet

- két azonos szélesség, alulról közelítő téglalappal!
- négy azonos szélesség, alulról közelítő téglalappal!
- két azonos szélesség, felülről közelítő téglalappal!
- négy azonos szélesség, felülről közelítő téglalappal!

(a) $f(x) = x^2$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.

(b) $f(x) = x^3$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.

(c) $f(x) = 1/x$ az $x = 1$ és az $x = 5$ között.

13. A mellékelt táblázat egy játékmozdony sebességadatait mutatja másodpercenként, 10 másodperc hosszú időintervallumban. Számítsuk ki a mozdony által megtett utat 10, egységnyi hosszúságú intervallumra való felosztással és

(a) bal oldali végpontokban vett függvényértékkel,

(b) jobb oldali végpontokban vett függvényértékkel számolva!

Idő (s)	Sebesség (cm/s)	Idő (s)	Sebesség (cm/s)
0	0	6	11
1	12	7	16
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

14. Kanyargós úton autózunk baráti társasággal egy olyan autóban ülve, amelynek sebességmérője működik ugyan, azonban a megtett távolságot nem mutatja. Meg akarjuk tudni, milyen hosszú ez a kanyargós szakasz, ezért 10 másodperces időközökben feljegyezzük a kocs sebességét. A mérési eredményeket a mellékelt táblázat tartalmazza. Becsüljük meg az útszakasz hosszát

(a) bal oldali végpontokhoz tartozó értékekkel,

(b) jobb oldali végpontokhoz tartozó értékekkel!

Idő (s)	Sebesség (m/s)	Idő (s)	Sebesség (m/s)
0	0	70	5
10	15	80	7
20	5	90	11
30	11	100	15
40	10	110	10
50	15	120	11
60	11		

Riemann-összeg téglalapjai

15. Rajzoljuk fel az $f(x)$ függvény grafikonját az adott intervallumban! Osszuk fel az intervallumot négy, azonos hosszúságú részintervallumra! Azután rajzoljuk be az ábrába a $\sum_{k=1}^4 f(c_k)$ Riemann-összeghez tartozó téglalapokat, ahol c_k a k -adik részintervallum (a) bal oldali, (b) jobb oldali végpontja, (c) felező pontja! (Mindegyik Riemann-összeghez készítsünk külön ábrát!)
- (a) $f(x) = x^2 - 1$, a $[0, 2]$ intervallumon.
 - (b) $f(x) = -x^2$, a $[0, 1]$ intervallumon.
 - (c) $f(x) = \sin x$, a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.
16. Az alábbi $f(x)$ függvényekre írjuk fel a felső közelítő összeget oly módon, hogy az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részintervallumra osztjuk fel! Azután vegyük ezeknek az összegeknek a határértékét $n \rightarrow \infty$ esetén, és számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó görbe alatti területet!
- (a) $f(x) = 1 - x^2$ a $[0, 1]$ intervallumban.
 - (b) $f(x) = x + x^2$ a $[0, 1]$ intervallumban.

Az integrál, mint határérték

17. Fejezzük ki a határértéket, mint a függvény határozott integrálját!

- (a) $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k$, ahol P a $[0, 2]$ egy felosztása.
- (b) $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \Delta x_k$, ahol P a $[1, 4]$ egy felosztása.
- (c) $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$, ahol P a $[0, 1]$ egy felosztása.
- (d) $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos c_k} \Delta x_k$, ahol P a $[-\pi/4, 0]$ egy felosztása.