

Matematika A1 építőkeri hallgatóknak

Integrálás összefoglaló

1. Integrálási módszerek

1. Az integrandus $f(ax + b)$ alakú

$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int af(ax + b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$, ahol F az f függvény primitív függvénye, például:

$$\int (3x + 2)^3 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^4}{4} + C = \frac{1}{12} (3x + 2)^4 + C$$

Feladatok: integráljuk ki e^{5x+4} , $\sin 6x - 4$, $\frac{5}{\cos^2(-6x+4)}$, $\sinh(2 - 7x)$

2. Az integrandus $f^n(x)f'(x)$ alakú

$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, például:

$$\int x^2(2x^3 + 4)dx = \frac{1}{6} \int 6x^2(2x^3 + 4)dx = \frac{1}{6} \frac{(2x^3+4)^2}{2} + C$$

Feladatok: integráljuk ki $\sin x \cos x$, $\frac{\ln x}{x}$, $e^x(1 - e^x)^3$, $\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}$

3. Az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$, például:

$$\int \frac{2x}{x^2+7} dx = \ln(x^2 + 7) + C$$

Feladatok: integráljuk ki $\tan x$, $\frac{1}{x \ln x}$, $\frac{-\sin 2x}{5+\cos^2 x}$, $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$

4. Integrálás helyettesítéssel

$\int f(u(x))dx$ esetén alkalmazhatjuk a $t = u(x)$ helyettesítést, ebből az egyenletből x kifejezhető, és dx helyébe az inverz függvény deriváltjával megszorított dt kerül, például:

$\int (3x + 2)^3 dx$, ekkor legyen $t = 3x + 2$, ezzel $x = \frac{t-2}{3}$, azaz $dx = \frac{1}{3} dt$, és így

$$\int (3x + 2)^3 dx = \frac{1}{3} \int t^3 dt = \frac{t^4}{12} + C = \frac{1}{12} (3x + 2)^4 + C$$

Feladatok: integráljuk ki $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$, $x\sqrt{5x+3}$, $\sqrt{1-x^2}$, $x\sqrt{1+x^2}$

5. Parciális integrálás

$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$, ennek használatát a feladatok során láthatjuk, például:

$\int xe^{5x} dx$ esetén $v = x$, $u' = e^{5x}$, ezzel tehát $v' = 1$, $u = \frac{1}{5}e^{5x}$, azaz

$$\int xe^{5x} dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x} dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{e^{5x}}{25} + C$$

Feladatok: integráljuk ki $\ln x$, $x \sin 2x$, $2x \arctan x$, $e^{2x} \sin x$

2. Racionális törtfüggvények

A törtet addig alakítjuk, amíg el nem érjük, hogy a számláló foka kisebb legyen, mint a nevezőé. Ezután általában a következő alapesetek valamelyikéhez jutunk:

1. típus: $\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln |ax+b| + C$, például:

$$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3} \ln |3x+2| + C$$

2. típus: $\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx = \frac{A}{a} \int a(ax+b)^{-n} dx = \frac{A}{a} \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + C$ (itt $n \neq 1$), például:

$$\int \frac{5}{(3x+2)^3} dx = \frac{5}{3} \frac{(3x+2)^{-2}}{-2}$$

3. típus: $\int \frac{Ax}{(ax+b)^n} dx = \frac{A}{a} \int \frac{ax+b-b}{(ax+b)^n} dx$ (itt $n \neq 1$), azaz összeggé bontva az előbbiek szerint megoldható, például:

$$\int \frac{5x}{(3x+2)^3} dx = \frac{5}{3} \int \frac{3x+2-2}{(3x+2)^3} dx = \frac{5}{3} \int \frac{1}{(3x+2)^2} dx - \frac{5}{3} \int \frac{2}{(3x+2)^3} dx = \frac{5}{9} \int 3(3x+2)^{-2} dx - \frac{10}{9} \int 3(3x+2)^{-3} dx = \frac{5}{9} \frac{(3x+2)^{-1}}{-1} - \frac{10}{9} \frac{(3x+2)^{-2}}{-2} + C$$

4. típus: a nevező olyan másodfokú polinom, aminek valós gyökei vannak, ekkor parciális törtekkel két elsőfokú nevezőjűvé lehet bontani, például:

$$\frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-5}{x-1} + \frac{8}{x-2} dx = -5 \ln |x-1| + 8 \ln |x-2| + C$$

5. típus: a nevező olyan másodfokú polinom, aminek nincs valós gyöke, ekkor visszavezetjük egy ln és egy arctan összegére, például:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+8}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-2x+5| + \int \frac{1}{1+(\frac{x-1}{2})^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-2x+5| + 2 \arctan(\frac{x-1}{2}) + C$$

3. Trigonometrikus függvények hatványai

1. Ha sin páratlan, cos bármilyen (nem első) hatványon szerepel

Ekkor $\sin^{2n+1} x = \sin x \sin^{2n} x = \sin x (1 - \cos^2 x)^n$ átalakítással minden szépen alakul, például:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x) dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + C$$

Feladat: integráljuk ki $\sin^3 x$

2. Ha cos páratlan, sin bármilyen (nem első) hatványon szerepel

Ekkor ugyanezt csináljuk fordítva: $\cos^{2n+1} x = \cos x \cos^{2n} x = \cos x (1 - \sin^2 x)^n$, például:

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) \sin^2 x dx = \int (\cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x) dx = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

Feladatok: integráljuk ki $\cos^3 x$

3. Ha sin és cos is páros kitevőn szerepel

Ekkor pedig a $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ illetve $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ azonosságokat használjuk, például:

$$\int \cos^2 x dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Feladat: integráljuk ki $\sin^2 x \cos^2 x$