

Matematika A1 építőkeri hallgatóknak

Integrálás gyakorlófeladatok MEGOLDÁSSAL

1. Hatványfüggvény: $\int x^2(x^2 - 1)dx = \int (x^4 - x^2)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$
2. Hatványfüggvény: $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + C$
3. Hatványfüggvény: $\int \frac{\sqrt{x-x+x^4}}{x^2}dx = \int (x^{-\frac{3}{2}} - x^{-1} + x^2)dx = -2x^{-\frac{1}{2}} - \ln|x| + \frac{x^3}{3} + C$
4. Hatványfüggvény: $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx = \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}dx = \int (\frac{x}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$
5. Rac. törtfüggvény, számláló foka nagyobb: $\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)^2+3}{x-2}dx = \int (x-2 + \frac{3}{x-2})dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3 \ln|x-2| + C$
6. Hatványfüggvény: $\int (2x + 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+1})dx = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C$
7. Rac. törtfüggvény, 1. típus: $\int \frac{3}{2x+5}dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+\frac{5}{2}}dx = \frac{3}{2} \ln|x + \frac{5}{2}| + C$
8. Rac. törtfüggvény, számláló foka megegyezik a nevező fokával: $\int \frac{3x+10}{2x+5}dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+5+\frac{5}{2}}{2x+5}dx = \frac{3}{2} \int (1 + \frac{5}{6x+15})dx = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \frac{5}{6} \ln|x + \frac{15}{6}| + C$
9. Rac. törtfüggvény, 4. típus: $\int \frac{3}{2x^2+5}dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+\frac{5}{2}}dx = \frac{3}{2} \frac{2}{5} \int \frac{1}{(\sqrt{\frac{2}{5}}x)^2+1}dx = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} \arctan(\sqrt{\frac{2}{5}}x) + C$, hiszen a helyettesítés: $t = \sqrt{\frac{2}{5}}x$, $x = \sqrt{\frac{5}{2}}t$, $dx = \sqrt{\frac{5}{2}}dt$
10. Rac. törtfüggvény, 5. típus: $\int \frac{3x}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4} \ln(2x^2+5) + C$
11. Rac. törtfüggvény, 5. típus + 4. típus: $\int \frac{3x+10}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4} \ln(2x^2+5) + 2\sqrt{\frac{5}{2}} \arctan(\sqrt{\frac{2}{5}}x) + C$ (ld. az előző két feladatot!)
12. Rac. törtfüggvény, számláló fokszáma nagyobb, majd 1. típus: $\int \frac{3x^2}{2x+5}dx = \int \frac{(2x+5)(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}) + \frac{75}{4}}{2x+5}dx = \int (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} + \frac{75}{8x+20})dx = \frac{3x^2}{4} - \frac{15x}{4} + \frac{75}{8} \ln|x + \frac{20}{8}| + C$
13. Rac. törtfüggvény, számláló foka megegyezik a nevezőével, majd 4. típus: $\int \frac{3x^2}{2x^2+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x^2+5) - \frac{15}{2}}{2x^2+5}dx = \int (\frac{3}{2} - \frac{15}{4x^2+10})dx = \frac{3x}{2} - \frac{15}{4} \int \frac{1}{x^2+\frac{10}{4}}dx = \frac{3x}{2} - \frac{15}{4} \frac{4}{10} \int \frac{1}{(\frac{2x}{\sqrt{10}})^2+1}dx = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{10}}{2} \int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{3x}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{4} \arctan(\frac{2x}{\sqrt{10}}) + C$, hiszen a helyettesítés: $t = \frac{2}{\sqrt{10}}x$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}t$, $dx = \frac{\sqrt{10}}{2}dt$
14. 2. típus: $\int \frac{3}{\sqrt{2x+5}}dx = \frac{3}{2} \int 2(2x+5)^{-\frac{1}{2}}dx = 3(2x+5)^{\frac{1}{2}} + C$
15. 3. típus: $\int \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5) - \frac{15}{2}}{\sqrt{2x+5}}dx = \frac{3}{2} \int \sqrt{2x+5}dx - \frac{15}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx = \frac{1}{2}(2x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{2}(2x+5)^{\frac{1}{2}} + C$

16. Helyettesítés: $\int \frac{3}{\sqrt{2x^2+5}} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}((\sqrt{\frac{2}{5}}x)^2+1)}} dx = \frac{3}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{5}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt =$
 $\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh}(\sqrt{\frac{2}{5}}x) + C$, hiszen a helyettesítés: $t = \sqrt{\frac{2}{5}}x$, $x = \sqrt{\frac{5}{2}}t$, $dx =$
 $\sqrt{\frac{5}{2}}dt$

17. $f'(x)f^n(x)$ alakú: $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+5}} dx = \frac{3}{4} \int 4x(2x^2+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2}(2x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C$

18. Vegyes (összegre bontás és két helyettesítés + ch és sh azonosságai): $\int \frac{3x^2+4x+7,5}{\sqrt{2x^2+5}} dx =$
 $\int \frac{\frac{3}{2}(2x^2+5)+4x}{\sqrt{2x^2+5}} dx = \frac{3}{2} \int \sqrt{2x^2+5} dx + \int \frac{4x}{\sqrt{2x^2+5}} dx.$

Az összeg első felének számolása: $\frac{3}{2} \int \sqrt{2x^2+5} dx = \frac{3}{2} \sqrt{2} \int \sqrt{x^2+\frac{5}{2}} dx =$
 $\frac{3}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \int \sqrt{(\sqrt{\frac{2}{5}}x)^2+1} dx = \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{5}{2} \int \sqrt{sh^2t+1} chtdt = \frac{15\sqrt{2}}{4} \int ch^2t dt =$
 $\frac{15\sqrt{2}}{4} \int \frac{ch2t+1}{2} dt = \frac{15\sqrt{2}}{4} \frac{sh2t}{4} + \frac{15\sqrt{2}}{8} t + C = \frac{15\sqrt{2}}{4} (\frac{sh2\operatorname{arsh}(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{4} + \frac{\operatorname{arsh}(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{2}) +$
 C , mert a helyettesítés: $sh t = \sqrt{\frac{2}{5}}x$, $x = \sqrt{\frac{5}{2}}sh t$, $dx = \sqrt{\frac{5}{2}}chtdt$, és
 $t = \operatorname{arsh}(\sqrt{\frac{2}{5}}x).$

Az összeg második felének számolása: $\int 4x(2x^2+5)^{-\frac{1}{2}} dx = 2(2x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C.$

A feladat megoldása tehát a kettő összege: $\int \frac{3x^2+4x+7,5}{\sqrt{2x^2+5}} dx = \frac{15\sqrt{2}}{4} (\frac{sh2\operatorname{arsh}(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{4} +$
 $\frac{\operatorname{arsh}(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{2}) + 2(2x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C.$

19. Hatványfüggvény, exponenciális függvény (alap): $\int (x^5+5^x) dx = \frac{x^6}{6} +$
 $\frac{5^x}{\ln 5} + C$

20. Trigonometrikus (alap): $\int (4 \sin x - 3 \cos x) dx = -4 \cos x - 3 \sin x + C$

21. f'/f alakú: $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$

22. Trigonometrikus átalakítás: $\int \tan^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) dx =$
 $-\cot x - x + C$

23. Trigonometrikus átalakítás: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} dx =$
 $\sin x - \cos x + C$

24. Hiperbolikus átalakítás: $\int \frac{1}{\sinh x + \cosh x} dx = \int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh x + \cosh x} dx = \sinh x -$
 $\cosh x + C$

25. Trigonometrikus átalakítás: $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

26. f'/f alakú: $\int \frac{e^x}{e^x+11} dx = \ln(e^x+11) + C$

27. f'/f alakú: $\int \frac{\cos 3x}{8+\sin 3x} dx = \frac{1}{3} \ln |\sin 3x+8| + C$

28. f'/f alakú: $\int \frac{1}{x(\ln x+2003)} dx = \ln |\ln x+2003| + C$

29. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int 2x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

30. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + C$

31. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2\sqrt{\sin x} + C$
32. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$
33. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \sqrt[3]{\cos^7 x} \sin x dx = \frac{3}{10}(\cos x)^{\frac{10}{3}} + C$
34. alapintegrál: $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$
35. exponenciális függvény: $\int 5^{2-3x} dx = -\frac{1}{3} \frac{5^{2-3x}}{\ln 5} + C$
36. Helyettesítés: $\int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + C + C$, itt a helyettesítés: $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.
37. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int x\sqrt{25+x^2} dx = \frac{1}{3}(25+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
38. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{14}{(6-4x)^7} dx = -\frac{7}{2} \int (-4)(6-4x)^{-7} dx = \frac{7}{12}(6-4x)^{-6} + C$
39. $f' \cdot f$ alakú: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$
40. Parciális ($u = x$, $v' = \sin 3x$): $\int x \sin 3x dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$
41. Parciális (átalakítás után majdnem ua. mint az előző): $\int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C$
42. Összeggé bontás után kétszer parciális ($u_1 = 2x$, $v_1' = -\cos x$ és $u_2 = x$, $v_2' = \sin x$): $\int (x^2-1) \sin x dx = \int x^2 \sin x dx - \int \sin x dx = -x^2 \cos^2 x + 2 \int x \cos x dx + \cos x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 3 \cos x + C$
43. Parciális ($u = \ln x$, $v' = 1$): $\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$
44. Két módszer:
- (a) Parciális ($u = \ln x$, $v' = \ln x$, felhasználva az előző feladat eredményét): $\int \ln^2 x dx = \ln x(x \ln x - x) - \int (\ln x - 1) dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$
- (b) Helyettesítés ($t = \ln x$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$), majd kétszer parciális: ezzel is ugyanaz az eredmény.
45. Parciális, ugyanaz az ismeretlen integrál a jobboldalon, tehát egyenletrendezésből kijön: $\int x^2 \ln x dx = x^2(x \ln x - x) - \int 2x(x \ln x - x) dx = x^3 \ln x - x^3 - 2 \int x^2 \ln x dx + \frac{2}{3} x^3$, ebből a kért integrál $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3$.