Hetedik A4 gyakorlat

1. Eloszlás paraméterei

Az X valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben: $\mathbf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$,
A μ várható értékű diszkrét valószínűségi változó *szórásnégyzete*: $\sigma^2 = \sum\limits_{x_k} (x_k - \mu)^2 \, p(x_k)$.
Folytonos esetben: $\sigma^2 = \mathbf{D}^2(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x)dx$.
A szórásnégyzet kiszámítása momentumokból: $\sigma^2 = \mu_2 - mu^2$, ahol μ a vátható érték μ_2 pedig a második momentum, másképp $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}X)^2$. **Független!** valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege.
A momentumok pl. a folytonos esetben: $\mu_k = \mathbf{E}\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.
A folytonos F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.

2. Feladatok

1. Számítsa ki az indikátor, a binomiális, a Poisson-eloszlás, a geometriai eloszlás; illetve az egyenletes, az exponenciális, a standard és általános normális eloszlás szórását!

2. Számítsa ki a λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változónak a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke?

3. Számítsa ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! (Az utóbbi az $\mathbb{E}|\mathbb{X} - \text{medián}|$ várható értéket jelenti.)

4. Számítsa ki az $f(x) = 2x \quad$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó várható értékét, szórását és átlagos abszolút eltérését!

5. Mennyi az előző három feladatban a következő valószínűségek értéke (μ, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

   a) $\mathbb{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(\mu - d < X < \mu + d)$
   c) $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$
   d) $\mathbb{P}(\mu - 2d < X < \mu + 2d)$

6. Egy tetszőleges véges szórású X valószínűségi változó esetén milyen becslést adhatunk az előző kérdés (a) és (b) feladatában lévő valószínűségre?

7. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > 1/2$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

8. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

9. Legyen $\alpha > 1$ rögzített valós szám. *Pareto-típusú (lassan lecsengő) eloszlásúnak* nevezzük azokat az eloszlásokat, amelyeknek sűrűségfüggvénye $f(x) = (\alpha - 1)/x^{\alpha}$, ha $x > 1$ és nulla egyébként.

   a) Határozza meg $\alpha = 4$ esetén az eloszlásfüggvényt, a várható értéket és a szórást!
   b) Határozza meg tetszőleges α esetén az eloszlásfüggvényt!
   c) Melyik az a legkisebb küszöb, aminél nagyobb α érték esetén a várható érték már véges?
   d) Melyik az a legkisebb küszöb, aminél nagyobb α érték esetén a szórás már véges?

10. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a bergengócot? Átlagosan mennyit időt bírnak ki ezek a DVD-k?

11. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek? (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)dx$ (c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi(x)dx$ (d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi(x)dx$ (e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^k\,\varphi(x)dx$ (Útmutatás: Integráljon parciálisan és használjon indukciót!)

12. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

13. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

14. Legyenek az $X_i (i = 1 \ldots 4)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak, azaz értékük p valószínűséggel 1 és $(1-p)$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum\limits_{i=1}^{j} X_i (j = 1 \ldots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \ldots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?
intervallumon.

15. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Mi X mediánja, azaz milyen x-re lesz $F(x) = 0.5$?

16. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?

17. Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg az alábbi értékeket:

   a) $\mathbf{E}\left((2+X)^2\right)$,
   b) $\mathbf{D}^2(4+3X)$.

18. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

várható értékét és szórását.

19. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város (0, 0) középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

20. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.