Ötödik A4 gyakorlat

1. Elméleti összefoglaló

1. *Várható érték*
   A lehetséges kimeneteleket jelöljük x_i-vel, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig $p(x_i)$-vel vagy p_i-vel. Ekkor a várható érték: $\mathbb{E}(X) = \sum_i p(x_i) \cdot x_i$.

   A nagy számok törvénye (tétel) szerint a kisérletszám növekedésével a kisérleti eredmények számtani átlaga tart az elméleti úton kiszámolt várható értékhez.

   X helyett tekinthetjük $t(X)$-et, azaz X egy függvényét (például a kockadobás eredményeit négyzetre emeljük). A $t(X)$ várható értékére a következő összefüggés adódik: $\mathbf{E}(t(X)) = \sum_i p(x_i) \cdot t(x_i)$.

   Jelöljük X-szel a kockadobás eredményét. X^2 várható értékét szemléletesen úgy is kiszámolhatnánk, hogy a kocka oldalaira új címkéket ragasztanánk $1, 4, 9, 16, 25, 36$ számokkal. Így nem meglepő, hogy a képletekben a p_i értékek változatlanok maradnak, míg x_i-t mindenhol formálisan kicseréljük $t(x_i)$-re.

2. *Nevezetes eloszlások várható értékei*
   Az (A, B, n) paraméterű hipergeometriai eloszlás várható értéke: $E(X) = n\frac{A}{A+B}$.
   Az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke: $E(X) = np$.
   A p paraméterű optimista geometriai eloszlás várható értéke $E(X) = \frac{1}{p}$.
   Az (n, p) paraméterű optimista negatív binomiális eloszlás várható értéke $E(X) = \frac{n}{p}$.

3. *Poisson-eloszlás*
   Ha az X valószínűségi változó a $0, 1, 2, \dots$ értékeket veheti fel és

   $$\mathbb{P}(X = k) = p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

   ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük. Várható értéke λ.
   A λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke λ.

2. Feladatok

1. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van? (Számoljuk ki a korábban tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)

2. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

3. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset!

4. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

5. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van?

6. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt.

   a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?

   b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?

   c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

7. Mennyi annak a valószínusége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz? Elég-e ennyi szelvényt kitölteni ahhoz, hogy legalább 10%-os eséllyel legyen telitalálat, ha nem akkor adjunk egy becslést a szükséges szelvények számára (fél-milliós nagyságrendben)?

8. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozó központba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?

9. A „Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

10. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

11. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?

12. A diszkrét X valószínűésgi változó súlyfüggvénye: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ $(x = 1, 2, 3, 4)$. Mennyi X várható értéke? És X^2 várható értéke? $E(\frac{1}{X}) =?$

13. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-ot kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

14. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

15. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, egy szelvénnyel fogadva mennyi a nyereségünk várható értéke?

16. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?

17. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

18. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a) Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását! b) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét!

19. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p, illetve $q(= 1 - p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?

20. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

21. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

    a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?

    b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?

22. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

23. Piroska és Zoli kockáznak. Piroska feldob egy piros, Zoli feldob egy zöld kockát. Ha Piroska 1-et vagy 2-t dob, ő nyer, és kap Zolitól 5 Ft-ot; ha Zoli 6-ot dob, ő a nyertes, és 11 Ft-ot kap Piroskától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem elölröl kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Ferit, dobáljon ő egyetlen fehér kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes-e elfogadni Piroskának Zoli ajánlatát?

24. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

25. Mennyi az ötös lottón a találatok számának várható értéke?