Második A4 gyakorlat

1. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyeneletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

2. Mi a valószínűsége, hogy a $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

   (a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?

   (b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál?

3. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb 1/4 területegységnél?

4. Mi a valószínűsége, hogy ha a $(0,1)$ intervallumon kiválasztunk

   (a) 2 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x-nél?

   (b) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a legkisebb pont kisebb x-nél?

   (c) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a legnagyobb pont kisebb x-nél?

   (d) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a középső pont kisebb x-nél?

5. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

   (b) A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?

6. Mi a valószínűsége, hogy független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik n-edik gyöke kisebb a másik m-edik gyökénél, azaz $\mathbf{P}\left(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2}\right)$?

7. Jancsi és Juliska 12 és 1 óra között szeretnének találkozni. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a 12 órát 0-val, így mindkettőjük érkezése egy (0, 1)-beli szám. Tudjuk, hogy érkezésük egymástól független (0, 1)-en egyenletes eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha mindketten 20 percet (1/3 órát) várnak a másikra?

8. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?

9. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?

10. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0,1]$ intervallumra egymástól függetlenül, különkülön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?

11. *Bertrand-paradoxon*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    (a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

    (b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

    (c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

12. Egyszerűsítse le az alábbi kifejezéseket: (a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (b) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

13. Legyen A, B és C három tetszőleges esemény. Keressen olyan halmazalgebrai kifejezéseket, amelyek pontosan a következő eseményeket adják meg: (a) csak A következik be, (b) A és B bekövetkezik, de C nem (c) mindhárom esemény bekövetkezik, (d) legalább egyikük bekövetkezik, (e) legalább kettő bekövetkezik, (f) pontosan egyikük következik be, (g) pontosan kettő következik be, (h) egyik sem következik be, (i) legfeljebb kettő következik be.

14. Addig dobálunk fel egy szabályos érmét, amíg az első fej kijön. Írja fel az eseményteret, amelyben a kimenetelek a I (írás) és F (fej) betűk véges ill. végtelen sorozatai! Tegyük fel, hogy egy k betűből álló kimenetel valószínűsége $1/2^k$.

    (a) Mutassa meg, hogy a véges hosszúságú sorozatok valószínűségei összesen egyet adnak, így a végtelen hosszú kimenetel (hogy mindig írást dobunk) valószínűsége zérus, bár ez a kimenetel is lehetséges!

    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb három dobás elegendő a fejhez?

    (c) Mutassa meg, hogy $1/2^k$ a valószínűsége, hogy a dobás-sorozat nem ér véget a k-adik dobásig bezárólag, vagyis nem dobunk fejet az első k dobásban.

15. Három egyformán erős játékos: A, B és C játszik páros mérkőzéseket. Elsőként A és B játszik, majd a győztes játszik C-vel, és így tovább, mindaddig, amíg valaki kétszer egymás után nyer és így megnyeri az egész meccset. (A döntetlen lehetőségét kizárjuk.) Írja fel az eseményteret, amelyben a kimenetelek a mérkőzések győzteseit megadó betűk véges ill. végtelen sorozatai! Tegyük fel, hogy bármely mérkőzést bármely játékos 1/2 valószínűséggel nyer meg, és egy k betűből álló kimenetel valószínűsége $1/2^k$.

    (a) Mutassa meg, hogy a véges hosszúságú sorozatok valószínűségei összesen egyet adnak, így a végtelen hosszú kimenetelek valószínűsége zérus (bár ezek a kimenetelek is lehetségesek)!

    (b) Mutassa meg, hogy A, ill. B 5/14 valószínűséggel nyeri meg a meccset, míg C győzelme 4/14 valószínű!

    (c) Mutassa meg, hogy $1/2^{k-1}$ a valószínűsége, hogy a meccs nem ér véget a k-adik mérkőzésig bezárólag.

16. Feldobunk két szabályos kockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott számok összege páratlan, B az az esemény, hogy legalább egy hatost dobtunk. Írja fel az $A \cap B$, $A \cup B$, és $A \cap \bar{B}$ eseményeket mint kimenetelek részhalmazát! Számítsa ki a valószínűségüket!

17. Egy szabályos kockával dobtam. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobtam, ha barátomtól tudom, hogy párosat dobtam? hogy legalább 3-ast dobtam? hogy legfeljebb 5-öst dobtam?

18. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok 5 - 5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

19. Feldobunk 2 kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

20. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnek az anyák lányt illetve fiút. A kétgyerekes családokat vizsgálva, mennyi annak a valószínűsége, hogy két fiú van, ha tudjuk, hogy van fiú? És mennyi az esélye, hogy van lány is, ha tudjuk, hogy van egy fiú?

21. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

   (a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé? ii) betegé? iii) beteg fiúé?

   (b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

   (c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

   (d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?