Tizedik A4 gyakorlat

Gyakorlaton volt

A gyakorlaton két feladatot veséztünk ki teljesen és megnéztük két független exponenciális együttes sűrűségét:

1. Legyen U_1 és U_2 egyenletes eloszlású $(0,1)$-en. Definiáljuk az (X,Y) valószínűségi változókat:

   $$X := \sqrt{U_1}, \quad Y := \frac{\sqrt[3]{U_2}}{X}.$$

   Kiszámoltuk X sűrűségét, $(Y|X=x)$ sűrűségét. Ezekből meg tudtuk határozni az $f(x,y)$ együttes sűrűségfüggvényt, Y sűrűségét és $(X|Y=y)$ feltételes sűrűséget. Meghatároztuk $\mathbf{E}(XY)$ értéket és számoltunk feltételes valószínűségeket, ahol a feltétel valószínűsége nulla volt, mint pl. $\mathbf{P}\big(0.25 < X < 0.5 \,\big|\, Y = 0.6\big)$.

2. Az analóg mennyiségeket megnéztük két dimenziós diszkrét eloszlásokra is. A pl az volt, hogy X legyen egy szabályos kockadobás eredménye és $Y|X=i$ feltételes eloszlás pedig legyen egyenletes $1,\ldots,i$ halmazon.

3. Adott az $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ együttes sűrűség, ahol $x > 0$ és $y > 0$. Rájöttünk, hogy ez két független $Exp(\lambda)$ együttes sűrűsége. Kiszámoltuk $\mathbf{P}(1 < X < 5, 2 < Y < 8)$ valószínűséget és ügyesen megindokoltuk, hogy $\mathbf{P}(X < Y)$ miért pont $1/2$.

HF

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

2. Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:
   Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

3. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

   $$f(x,y) = 1 \text{ , ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x).$$

   a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) =?$ b) Független-e X és Y?

4. Adott az alábbi függvény: $h(x,y) := c \cdot (x + xy + y), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$
   a) c=?, hogy $\int_0^1 \int_0^1 h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ legyen (azaz valódi sűrűség).
   b) $\mathbf{P}(X + Y < 1)$=? c) $\mathbf{P}\big(0.1 < X < 0.5 \,\big|\, Y = 0.2\big)$=?