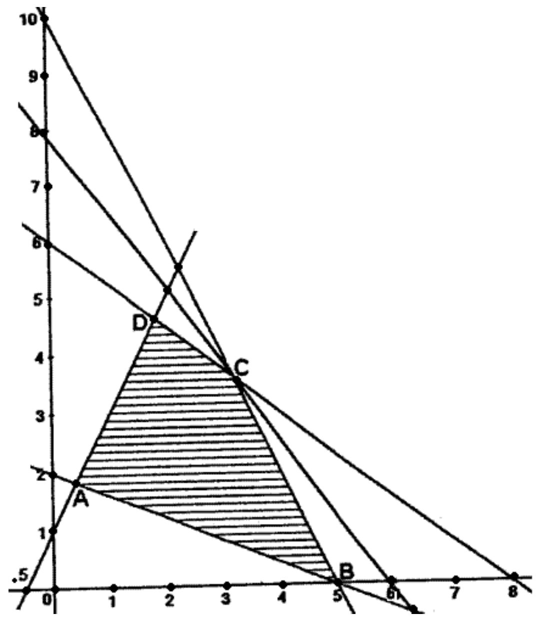

Írjuk fel egyenlőtlenségek formájában a vonalkázott halmazt! Alakítsuk át a feltételrendszert úgy, hogy nemnegatív ismeretlenekre vonatkozó egyenletek alkossák. Bázismegoldásnak felel-e meg az origó? Ha igen, ez a bázismegoldás nemnegatív-e; ha nem, akkor melyik az origóhoz legközelebbi bázismegoldás? Számítsuk ki a C pontnak megfelelő bázismegoldást, és adjunk meg ahhoz két különböző bázist is, sőt az egyik bázist adjuk meg mátixos formában is! Keressük meg azt a bázismegoldást is, amelyiknek megfelelő pont már nem fért az ábrára!

A vízszintes illetve függőleges tengelyek: x_1 és x_2. Az AB egyenes a tengelyeket az $x_1 = 5$ és az $x_2 = 2$ értékeknél metszi, ezért az egyenlete:

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2} = 1$$

Hasonlóképpen a BC, CD és AD egyenesek egyenlete:

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} = 1$$
$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{6} = 1$$
$$\frac{x_1}{-0.5} + \frac{x_2}{1} = 1$$

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} = 1$$
$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Mivel a C pont a BC és CD egyenesek metszéspontja, ezért C koordinátái: $(3.2; 3.6)$. Most a C-n átmenő harmadik egyenessel foglalkozunk. Mivel a 6 illetve 8 értékek közelében metszi az x_1 illetve az x_2 tengelyt, ezért az egyenletét

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{8} = \text{konstans}$$

alakban keressük. Ebbe behelyettesítve a C pontot a konstans értékére ezt kapjuk:

$$\frac{3.2}{6} + \frac{3.6}{8} = \frac{59}{60}$$

A közös nevezőkkel való felszorzások után ezeket az egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 24 \\ -2x_1 + x_2 &= 1 \\ 20x_1 + 15x_2 &= 118 \end{aligned}$$

Tekintve, hogy a vonalkázott terület az AB egyenes fölött és a többi egyenes alatt van, és hogy mindegyik egyenletben az x_2 együtthatója pozitív, a vonalkázott területet meghatározó egyenlőtlenségek a következők:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 20x_1 + 15x_2 &\leq 118 \end{aligned}$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket egyenletté alakítva:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 &= 24 \\ -2x_1 + x_2 + x_6 &= 1 \\ 20x_1 + 15x_2 + x_7 &= 118 \end{aligned}$$

Itt mind a nyolc ismeretlen nemnegatív. Mátrixos formába, azaz $Ax = b$ alakra hozva:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \\ 1 \\ 118 \end{bmatrix}$$

Itt az A mátrixban az utolsó 5 oszlop alkotja az origónak megfelelő bázist. Az ehhez tartozó bázismegoldás:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 10 \\ 24 \\ 1 \\ 118 \end{bmatrix}$$

Mivel ennek van negatív komponense, ezért nem igaz, hogy „$x \geq 0$".

A C ponthoz tartozó bázismegoldást tekintve az összes olyan komponens nulla, amelyhez tartozó egyenes átmegy a C ponton. Tehát a C-hez tartozó bázismegoldás ilyen alakú:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erre az x-re megoldva az $Ax = b$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \\ 1 \\ 118 \end{bmatrix}$$

A megoldás: $x_1 = 3.2$; $x_2 = 3.6$; $x_3 = 14.4$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 3.8$; $x_7 = 0$. Ehhez a bázismegoldáshoz három bázis is tatozik az A mátrix következő három almátrixának megfelelően:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az AB és CD egyenesek metszéspontja már nem fért az ábrára. A metszéspont koordinátái a két egyenes egyenletéből határozhatók meg:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 24 \end{aligned}$$

A megoldás: $x_1 = \frac{80}{7}$; $x_2 = \frac{-18}{7}$. Mivel az AB és CD egyeneseknek megfelelő ismeretlenek x_3 illetve x_5, ezért $x_3 = x_5 = 0$. Ezt a négy értéket visszaírva a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 &= 24 \\ -2x_1 + x_2 + x_6 &= 1 \\ 20x_1 + 15x_2 + x_7 &= 118 \end{aligned}$$

egyenletrendszerbe megkaphatjuk x_4, x_6, x_7 értékét is:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{80}{7} + 5 \cdot \frac{-18}{7} - 0 &= 10 \\ 2 \cdot \frac{80}{7} + \frac{-18}{7} + x_4 &= 10 \\ 3 \cdot \frac{80}{7} + 4 \cdot \frac{-18}{7} + 0 &= 24 \\ -2 \cdot \frac{80}{7} + \frac{-18}{7} + x_6 &= 1 \\ 20 \cdot \frac{80}{7} + 15 \cdot \frac{-18}{7} + x_7 &= 118 \end{aligned}$$

A megoldás: $x_4 = -\frac{-72}{7}$; $x_6 = \frac{185}{7}$; $x_7 = -72$. Tehát az ábrán már nem ábrázolt bázismegoldás:

$x_1 = \frac{80}{7}$; $x_2 = \frac{-18}{7}$; $x_3 = 0$; $x_4 = -\frac{-72}{7}$; $x_5 = 0$; $x_6 = \frac{185}{7}$; $x_7 = -72$.