Haladvány Kiadvány 2014.02.26

Talpalatnyi arányosság

Hujter Mihály

Ajánlás: A szerző ezt az írást Császár Ákosnak ajánlja a kilencvenedik születésnapja alkalmából; az egyik legfontosabb tanára a hetvenes években Császár professzor volt, akinek pedig a legelső fontos matematikus oktatója a harmincas években az itt említett Hadarits atya.

A Középiskolai Matematikai Lapok (röviden KöMaL) 1936-odik évi márciusi számában, az éves kötet 188-adik oldalán került kitűzésre a következő feladat:

Megadjuk a háromszög területét és szögeit. Mekkora a talpponti háromszög területe?

A feladat kitűzőjeként csak ennyi áll: *Hadarits.* (A feladat sorszáma: 1213.)

Sikerült kinyomoznunk, hogy a feladat kitűzőjének teljes születési neve: *Hadarics Kálmán.* A történelmi Magyarország ezredik évében (1895-ben) született, január 19-én, *Endréd* községben. (A falu jelenlegi neve: *Fertőendréd.*) A családnév horvát eredetű. Egy szintén Kálmán nevű nagybácsi, aki a közeli (Fertő)Szentmiklóson volt plébános, Hadarits változatban használta a családnevet; az ifjabb Kálmán is ezt a névváltozatot kezdte viselni. 1921-ben tett ciszterci szerzetesi fogadalmat, Budapesten a tudományegyetemen tanult, majd a *Budai Szent Imre Főgimnázium* tanára lett. Fizikát és matematikát tanított. Szerzetesi névnek a *Vendel* nevet kapta; akkoriban tehát *Hadarits Vendel* tanár úr néven ismerték. Később a családnév *Endrédy* lett. (Idős korában a tanár úr azon tréfálkozott, hogy ezt a végső a családnevét a kommunisták *megfertőzték*; arra utalt, hogy szülőfalujának szép csengésű ősrégi nevét *fertő* előnévvel látták el, és ezáltal fájdalmasan kimondhatóvá, gusztustalan hangzásúvá tették.)

A gimnáziumban a tanár urat a diákjai rajongó szeretettel vették körül. Élményszerű tanórái megszerettették a gimnazistákkal az olykor nehéz matematikát és fizikát. A gyengébb képességű tanulókat sosem alázta meg, hanem bíztatta, a rendetlenkedőket pedig szellemes tréfákkal fegyelmezte. 1938-ban a gimnázium igazgatója lett, de ezt a tisztséget nem sokáig viselhette, mert a rendi káptalan Endrédy Vendelt választotta zirci apátnak. Ilyen minőségben a magyar történelem fontos, példamutató szereplőjévé vált. A kommunista időkben rengeteg szenvedést kellett elviselnie; 1981 végén hunyt el; egyházi körökben a boldoggá avatását 2012-ben indították meg. Életéről már több könyvet is írtak, és napjainkra sok adat és fénykép található vele kapcsolatban az interneten. (Ha a boldoggá avatási eljárás sikerre jut, akkor Hadarits Kálmán tanár úr szabályos elnevezése *endrédi boldog Vendel* lesz.)

Térjünk vissza a harmincas évekre! 1930-ban a budai ciszterci gimnáziumban alakult egy *Matematikai és Fizikai Kör*, mai néven szakkör. Vezető *tanár-elnök* a kezdetektől fogva *Vendel atya* volt; amikor pedig már igazgató, majd zirci apát lett, *Lovas Ambró* és *Losonczi Timót* vették át ezt a szerepet. A szakkör aktív résztvevői közül itt most csak négy nevet emelünk ki: *Nagy Elemér, Szebehely Győző, Schmidt Endre, Császár Ákos.* Közülük Szebehely Győző (akinek családnevét *szebehelyi* változatban kell ejteni), világhírű fizikus, matematikus lett; még itthon doktorált, majd öszöndíjat elnyerve nyugatra került; végül ő lett az *Apolló Űrprogram* legfőbb pályaszámítási szakembere. Nagy Elemér és Császár Ákos itthon lettek világhírű professzorok. Schmidt Endre pedig az egyik legígéretesebb matematikai tehetség volt, de az 1939-ben esedékes érettségije előtt pár héttel hirtelen meghalt.

A szakkör diákjai rendszeres megoldói voltak a KöMaL kitűzött feladatainak egészen addig, amíg a folyóirat — nyilván a háború okán — 1939-ben meg nem szűnt.

Hadarits tanár úr fent említett feladatának megoldását a KöMaL 1936 májusában közölte le. *Pázmándi László* akkor érettségiző diák megoldásának a lényege az, hogy az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjait a csúccsal szemközti oldalon A_1, B_1, C_1 jellel ellátva és a magasságpontot M-nek nevezve és egyébiránt is a szokásos jelölésekkel élve, továbbá három húrnégyszöget felismerve (melyek AC_1MB_1, BA_1MC_1, CB_1MA_1) könnyen belátható, hogy $B_1C_1 = a\cos\alpha$, $A_1B_1 = b\cos\beta$, $C_1A_1 = c\cos\gamma$. Mindezekből hamar kihozható, hogy a talpponti háromszög területe: $bc\sin 2\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Tekintettel arra, hogy a háromszög területének kétszerese ismerten $bc\sin\alpha$, megkapjuk, hogy a talpponti és az eredeti háromszög területének aránya éppen

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Nem meglepő, hogy a feladat megoldóinak felsorolásában megtaláljuk a fent szakkörtagként említett Nagy Elemért. Érdekes viszont, hogy ott van a Harsányi J. név is. *Harsányi János* még nem volt 16 éves, amikor a megoldását beküldte; hat évtizeddel később (*Nash* és *Selten* tudósokkal megosztva) *a nem kooperatív játékok elméletében az egyensúlyelemzés terén végzett úttörő munkásságért* elnyerte a Közgazdasági Nobel-emlékdíjat. (Vegyész létére matematikai tudása okán kapott közgazdasági Nobel-díjat!)

Különlegessége a leközölt feladatmegoldásnak, hogy — míg az eredeti feladat vélhetően csak hegyesszögű háromszögre értelmezett, derékszögűre semmi érdemlegeset nem mond — a tompaszögű háromszög esetében is értelmezésre került az állítás azzal az észrevétellel, hogy ilyenkor a talpponti háromszög fordított körüljárású lesz, és ennek megfelelően a terület is negatívnak értelmezendő. Tehát a fentemlített

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

hányados minden fajta háromszögre érvényben van.

Nevezzük a hányadost *Vendel koronája* hányadosnak. Az elnevezést két dolog indokolja. Egyrészt ismert, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt köre a híres *Feuerbach*-kör, vagy más néven *kilenc-pont-köre*, amely átmegy az eredeti háromszög oldalainak felezőpontján épp úgy, mint az AM, BM, CM szakaszok felezőpontján. (Igazából a *tizenhárom-pont-köre* elnevezés volna a helyes, mert egy általános helyzetű háromszög esetében további négy pont van a körön: az a négy pont, ahol a talppontok köre a háromszög oldalegyeneseit szimultán érintő négy kört is érinti.) Másrészt az a *Saint Wendelin*, akinek a nevét Hadarits tanár úr majdnem egy évszázada megkapta, eredetileg skót királyi herceg volt, de egyszerű pásztorként dolgozott, és ezért jellegzetes ábrázolásán jobb kezében pásztorbot látunk, jobb *talpa* alatt pedig az eldobott hercegi koronát.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Wendelin_of_Trier`

Trier városának címerében egy három ágú korona és Szent Vendel talpa alatt egy körív hirdeti ezeket a kapcsolatokat.

`http://hu.wikipedia.org/wiki/Trier`

Térjünk vissza a KöMaL által közölt megoldás szerzőjéhez. 1941-ben műegyetemi gépészmérnöki diplomát szerzett. Villamosenergiaipari kutató lett; zárlatvédelem lett a szakterülete; több találmányát elfogadták. Állami díjat is kapott 1980-ban.

A Vendel koronája hányadost most a szögek helyett az oldalakkal fejezzük ki. A koszinusztétel alapján ezt kapjuk:

$$2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

A képlet némi átrendezése után Hadarits Vendel Kálmán atya tanár úr tételét tehát így fogalmazhatjuk:

A talpponti háromszögnek és a középvonalak alkotta háromszögnek a területaránya az alábbi szorzat:

$$\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{c^2+a^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}-1\right)$$