Numerikus módszerek zárthelyi 2006.11.29.

1. [15p] a. Milyen nagyságrendben közelíti a spline interpolációs függvény második deriváltja a függvény második deriváltját?
b. Adjuk meg a spline képletét, ha csak két alappontban interpolálunk.

2. [15p] Keressük meg azt a kiegyensúlyozott, 1-periodikus T_2 trigonometrikus polinomot, melyre $T_2(0) = 1$, $T_2(1/4) = 0$, $T_2(1/2) = 1$, $T_2(3/4) = 0$.

3. [15p] Legyen $f(t) = g(t - \pi)$, ahol g páratlan, integrálható fügvény és legyen $Q_n(f)$ a trapézformula $\int_0^{2\pi} f$ közelítésére. Mutassuk meg, hogy páros n-re $Q_n(f)$ pontos és adjunk nagyságrendi becslést $Q_n(f)$ hibájára, ha n páratlan.

4. [15p] Legyen $Q^*(f) = f(-1/\sqrt{2}) + f(1/\sqrt{2})$, $Q^{**}(f) = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$, mindkettő $\int_{-1}^{1} f$ közelítésére. Melyik a Gauss-kvadratúra? Miért?

5. [15p] Mekkora a hiba nagyságrendje az

$$f'(0) \approx \frac{f(-2h) - 4f(-h) + 4f(h) - f(2h)}{4h}$$

numerikus deriválás során? 18 jegyű aritmetikában számolva milyen h-t érdemes választani és hány jegy veszteség várható a képlet alkalmazásakor?

6. [15p] Newton-módszerrel keressük az $x + y^2 = 2, \quad y \ln x + x^2 = 1$ rendszer megoldását. Számítsuk ki $x^{(1)}$-et, ha $x^{(0)} = (1, 2)^T$.

7 [15p] Az $f(x) = 1 + 2 \ln x$ függvény $s = 1$ fixpontját keressük iterációval.
a. Mutassuk meg, hogy az iteráció általában nem konvergál s-hez.
b. Becsüljük meg, hogy az inverz függvényre felírt iterációt s közeléből indítva 10 lépésenként hány tizedesjegy javulás várható.
c. Adjuk meg a Δ^2-módszer szerint azt a $g(x)$ függvényt, amelyre (s közeléből indítva) az iteráció négyzetesen konvergens lesz.

****

Munkaidő 100 perc. Jegyhatárok: 35, 50, 65, 80 pont