Numerikus módszerek zárthelyi 2006.10.25.

1. [15p] Ismert, hogy az $x_n = 2^n \mathrm{tg}(2^{-n})$ sorozatra teljesül az

$$x_{n+1} = 2^{2n+1} \frac{\sqrt{1 + 2^{-2n} x_n^2} - 1}{x_n}$$

rekurzió. Ha x_{10} lebegőpontosan 8 jegy pontossággal adott, hány pontos jegyet várhatunk a rekurzióval számolt x_{11}-ben? Miért? Ajánljunk numerikusan kedvezőbb rekurziós képletet.

2. [15p] Számítsuk ki az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

mátrix Cholesky-felbontását.

3. [15p] Az R felső háromszögmátrix inverzét úgy számoljuk ki, hogy Gauss-eliminációval megoldjuk az $Rx = e_i$ egyenletrendszereket. Számítsuk ki az eljárás műveletigényét és mutassuk meg, hogy R^{-1} is felső háromszögmátrix.

4. [15p] Gradiensmódszert alkalmazunk az $5x - y = 4, \quad -x + y = 2$ egyenletrendszer megoldására. Határozzuk meg $x^{(1)}$-et, ha $x^{(0)} = (1\ 0)^T$ a kezdővektor.

5. [15p] Legyen A négyzetes invertálható mátrix. Az A oszlopain balról jobbra haladó Gram-Schmidt ortogonalizációt végzünk (minden oszlopról leválasztjuk az előző oszlopok alterébe eső komponenst), majd az így adódó oszlopokat osztjuk a $\|\cdot\|_2$-normájukkal. Mutassuk meg, hogy az ilyen módon kapott Q mátrix éppen az A mátrix QR-felbontásában szereplő ortogonális mátrix.

6. [15p] Inverz iterációt végzünk az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\tilde{\lambda} = 2.5$-höz legközelebbi sajátértékének kiszámítására. Adjuk meg a konvergencia sebességét.

7 [15p] Az $f(x) = \sin x$ függvénynek a $[0, \pi]$ szakasz ekvidisztans felosztásaihoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjait jelölje $L_n(x)$.
a. Adjuk meg az $L_2(x)$ parabolát és mutassuk meg, hogy az egész $[0, \pi]$-n $|f - L_2| < 1$.
b. Igaz-e, hogy L_n egyenletesen tart f-hez a $[0, \pi]$-n?

****

Munkaidő 100 perc. Jegyhatárok: 35, 50, 65, 80 pont