BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Babcsányi I. - Gyurmánczi J. - Wettl F. - Zibolen E.

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY II.

Műegyetemi Kiadó, 2007

Lektor:
Szász Gábor

Szerkesztő:
Wettl Ferenc

Szerzők:
Babcsányi István (17., 18. fejezet)
Gyurmánczi János (14., 15., 16. fejezet)
Wettl Ferenc (19., 21. fejezet)
Zibolen Endre (20. fejezet)

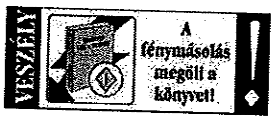
Rajzoló:
Lukács Erzsébet

Műszaki szerkesztő:
Babcsányi István
Wettl Ferenc
Zibolen Endre

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **075003**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 26,64 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 6210/07

Tartalom

Előszó

Ez a kötet a második abból a négykötetes feladatgyűjteményből, melyet a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékének oktatói készítenek Szász Gábor Matematika I-II-III című tankönyvéhez. A kötet nyolc fejezete megfelel a tankönyv második kötetében lévő első nyolc fejezetnek. A fejezetek sorszámozatlan alfejezetekre oszlanak. Minden alfejezet tipográfiailag is elkülönülő elméleti összefoglalóval kezdődik; ez tartalmazza a felhasználandó ismeretek legfontosabb elemeit: definíciókat, tételeket, esetleg számítási technikákat, módszereket, alkalmazásokat, melyek azonosítója egy betűvel kezdődik (ezek jelentése: **D** definíció, **T** tétel, **P** példa, **A** alkalmazás, **M** megjegyzés), majd a fejezet sorszáma, végül a fejezeten belüli saját sorszám következik. Például:

T 20.2 Ez itt a huszadik fejezet elméleti bevezetőjének kettes sorszámú tétele.

Az elméleti bevezető után következnek a feladatok; ezek csak a fejezeten belüli sorszámukat viselik. Azonos fejezetből való hivatkozásnál ez a sorszám (pl.: **56.**), más fejezetből való hivatkozásnál a fejezet és a feladat sorszáma együtt szerepel (pl.: **7.56.**). A feladat sorszámának felső indexében szerepelhet egy jel, melyet az alábbi példákban magyarázunk:

51.$^{\bullet}$ Ez az 51. feladat, megoldását fontosnak tartjuk.

52.$^{\triangleright}$ Ehhez a feladathoz részletes útmutató tartozik a megoldásoknál.

53.* Ez a feladat a nehezebbek közé tartozik.

54.^{k} Ehhez a feladathoz kalkulátor használata szükséges.

55.^{p} Ehhez a feladathoz programozható számoló- vagy számítógép használata szükséges.

A végeredményt, néhány kivétellel, minden feladatnál közöljük. Az ábráknak nincs saját sorszámuk, de minthogy közvetlenül a feladat mellett szerepelnek, a szövegből mindig egyértelmű, hogy melyikhez tartoznak.

A kötet szerzői köszönetet mondanak Szász Gábornak rendkívül gondos lektori munkájáért és hasznos javaslataiért.

A feladatgyűjtemény szövegét a MᴀTEX, rajzait az AUTOCAD programcsomaggal szerkesztettük. Ez könnyebbé teszi egy javított kiadás elkészítését. Ezért kérünk minden olvasót, hogy a megtalált hibákat, javítási ötleteiket juttassák el a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékére.

Budapest, 1993. január 8.

A szerkesztő

14. fejezet

Többváltozós valós függvények differenciálása

Függvényhatárérték és folytonosság

D 14.1 **Heine féle definíció.** A kétváltozós f függvényről akkor mondjuk, hogy az (x_0, y_0) pontban van **határértéke** és ez a határérték h, ha egyrészt f értelmezve van az (x_0, y_0) pont valamely E környezetében, másrészt minden olyan $[(x_n, y_n);\ n \in \mathbf{N}^+]$ pontsorozatra, amelynek valamennyi eleme E-ben fekszik, teljesül az, hogy

$$((x_n \to x_0) \wedge (y_n \to y_0)) \Rightarrow (f(x_n, y_n) \to h).$$

Erre a határértékre az alábbi jelöléseket használjuk:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y), \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y), \qquad \lim_{(x_0, y_0)} f(x, y).$$

Ezzel a definícióval ekvivalens az ún. **Cauchy féle definíció**: a kétváltozós f függvényről akkor mondjuk, hogy az (x_0, y_0) pontban van határértéke, és ez a határérték h, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan pozitív δ szám, hogy a $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő (x, y) értékpárokra f értelmezve van, és $|f(x, y) - h| < \varepsilon$.

D 14.2 Az f kétváltozós függvényt akkor nevezzük **folytonosnak** az (x_0, y_0) pontban, ha ott értelmezve is van, határértéke is van, és ez a határérték az illető pontbeli függvényértékkel egyenlő.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi kétváltozós valós f függvények $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ határértékét:

1.* $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$,

2. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to \infty}} x \cos y$,

3.* $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$,

4. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$,

5. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

6. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to \infty}} \frac{2xy - 1}{y + 1}$,

7.* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$, 8.* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Az alábbi feladatokban számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ határértéket, ha a $(0,0)$ ponthoz tartó $[(x_n, y_n);\ n \in \mathbb{N}^+]$ pontsorozat

a) az x tengelyen

b) az y tengelyen

c) az $y = mx$ egyenletű egyenesen

d) az $y = x^2$ egyenletű parabolán helyezkedik el.

Az eredmények alapján mit mondhatunk az $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y)$ határértékről?

9.* $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, 10. $f(x,y) = \dfrac{xy-x+y}{xy+x+y}$,

11.* $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, 12. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

13.* $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$, 14.* $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$,

15. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 16. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

17.* Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kétváltozós valós $f(x,y)$ függvényekre és a megadott x_0, y_0 értékekre léteznek-e az

$$L_{12} = \lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0} f(x,y)],\quad L_{21} = \lim_{y\to y_0}[\lim_{x\to x_0} f(x,y)] \quad \text{és} \quad L = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$$

határértékek, s ha igen, határozzuk meg ezeket:

18. $\dfrac{xy-x+y}{xy+x+y}$, $x_0 = y_0 = 0$, 19. $x\cos y$, $x_0 = 0$, $y_0 = \infty$,

20. $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $x_0 = y_0 = 0$, 21. $\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $x_0 = y_0 = \infty$,

22. $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0, \end{cases}$ $x_0 = y_0 = 0$,

23. $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $x_0 = \infty$, $y_0 = 0$.

Az n-dimenziós vektortér

D 14.3 Tetszőleges pozitív egész n esetén **n-dimenziós vektoron** n elemű számsorozatot értünk; a sorozat elemeit a vektor koordinátáinak nevezzük. Ha a sorozat elemei valós (ill. komplex) számok, akkor n-dimenziós **valós** (illetve **komplex**) vektorról beszélünk. Az n-dimenziós valós (illetve komplex) vektorok halmazát $\mathbf{R}^{(n)}$ (ill. $\mathbf{C}^{(n)}$) jelöli. A vektorokat koordinátái segítségével kétféle alakban is felírhatjuk, az egyik az $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ jelölésmód, a másik a (**19.** fejezet szerinti mátrix-alakban) oszlopvektorként való felírás:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

D 14.4 Két n-dimenziós vektort egyenlőnek tekintünk, ha megfelelő koordinátáik megegyeznek. Vektorok összegét és számszorosát az alábbi egyenlőségekkel definiáljuk:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] + [b_1, b_2, \dots, b_n] := [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n],$$

$$k[a_1, a_2, \dots, a_n] := [a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot k := [ka_1, ka_2, \dots, ka_n].$$

Az összeadás és számmal való szorzás műveletével ellátott $\mathbf{R}^{(n)}$ (ill. $\mathbf{C}^{(n)}$) halmazt n-dimenziós **valós** (illetve **komplex**) **vektortérnek** nevezzük. (A lineáris függetlenség és lináris kombináció meghatározását lásd a **D 4.4**, **D 4.5** definíciókban.)

D 14.5 Az n-dimenziós $\mathbf{a} := [a_1, \dots, a_n]$ és $\mathbf{b} := [b_1, \dots, b_n]$ vektorok **skaláris szorzatán** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{(n)}$ esetén az $\mathbf{ab} := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ számot, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^{(n)}$ esetén az $\mathbf{ab} := a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}$ számot értjük. Ennek segítségével egy vektor **abszolút értékét** illetve két valós vektor **hajlásszögét** az alábbi összefüggésekkel definiáljuk:

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a}^2}, \qquad \varphi := \arccos\left(\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right).$$

D 14.6 Bizonyítható, hogy ha az n-dimenziós $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor az n-dimenziós vektortér bármely $\mathbf{v}$ eleme egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként. Ha $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$, akkor az a_1, a_2, ..., a_n számokról azt mondjuk, hogy azok a $\mathbf{v}$ vektornak az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vektorrendszerre vonatkozó **koordinátáinak**, és ezt a $\mathbf{v} = [a_1, a_2, \dots, a_n]_\mathbf{e}$ jelöléssel fejezzük ki. Az $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ vektorrendszert a továbbiakban **alapvektor-rendszernek** nevezzük, ha az $\mathbf{e}_i$ vektorok páronként merőleges egységvektorok.

M 14.7 Az n-dimenziós $\mathbf{R}^{(n)}$ vektortér és az $\mathbf{R}^n$ tér elemei természetes módon, kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak az $[x_1, x_2, \dots, x_n] \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ hozzárendeléssel. (Ezért szokás e két teret azonosítani, és mindkettőt $\mathbf{R}^n$-nel jelölni.) Hasonlóan, bármely $u : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}$ skalár-vektorfüggvénynek természetes módon megfelel egy többváltozós $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény (és fordítva), mégpedig úgy, hogy f pontosan akkor van értelmezve a $P_0(x_1, \dots, x_n)$ pontban, ha u az $\mathbf{r}_0 = [x_1, \dots, x_n]$ helyen, és ekkor $f(P_0) = u(\mathbf{r}_0)$.

Feladatok

Legyenek adva a következő vektorok: $\mathbf{a} = [0,2,3,0,6]$, $\mathbf{b} = [1,0,1,0,1]$, $\mathbf{c} = [0,1,-1,1,-1]$, $\mathbf{d} = [i,0,1+i,0,-i]$. Végezzük el az alábbi vektorműveleteket:

24. $(2\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})\mathbf{c}$, **25.** $|\mathbf{a}|\mathbf{b}$, **26.** $\mathbf{cd}-\mathbf{dc}$,

27. $\mathbf{d}^2$, **28.** $\dfrac{\mathbf{b}^2}{|\mathbf{c}|}$, **29.**• $\dfrac{\mathbf{ac}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|}$.

30. Számítsuk ki az előző feladatokban szereplő **b** vektor hosszát, valamint az **a** és **c** vektorok szögét.

31.▷ Határozzuk meg azt a vektort, melynek utolsó koordinátája 1, és amely merőleges az $[1,0,0,-2]$, $[0,1,1,0]$, $[1,1,-1,0]$ vektorok mindegyikére!

32.▷ Mutassuk meg, hogy bármely vektor négyzete nemnegatív valós szám.

33. Mutassuk meg, hogy ha **a** és **b** valós vektorok, akkor $-1 \le \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \le 1$.

34. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{e}_1 = [1,1,1,1]$, $\mathbf{e}_2 = [0,1,1,1]$, $\mathbf{e}_3 = [0,0,1,1]$ és $\mathbf{e}_4 = [0,0,0,1]$ vektorok lineárisan függetlenek. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = [0,1,0,1]$, $\mathbf{b} = [1,1,1,1]$ és $\mathbf{c} = [0,3,1,2]$ vektoroknak az $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ vektorokra vonatkozó koordinátáit.

35. Alapvektor-rendszert alkotnak-e az alábbi vektorok:
$\mathbf{e}_1 = [\frac12,\frac12,\frac12,\frac12]$, $\mathbf{e}_2 = [-\frac12,-\frac12,\frac12,\frac12]$, $\mathbf{e}_3 = [-\frac12,\frac12,-\frac12,\frac12]$, $\mathbf{e}_4 = [-\frac12,\frac12,\frac12,-\frac12]$.

36.• Mutassuk meg, hogy az n-dimenziós $V = \mathbf{R}^{(n)}$ vektortér műveletei kielégítik az alábbi összefüggéseket:

(1) ha $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$, akkor $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$;
(2) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$;
(3) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$;
(4) van olyan $\mathbf{0} \in V$ elem, hogy $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$ minden $\mathbf{u} \in V$ elemre;
(5) minden $\mathbf{u} \in V$ elemhez található olyan $\mathbf{v} \in V$, hogy $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
(6) ha $k \in \mathbf{R}$ és $\mathbf{u} \in V$, akkor $k\mathbf{u} \in V$;
(7) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$;
(8) $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$;
(9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$;
(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

A következő két feladatban megadunk egy-egy V halmazt, valamint két műveletet: V két elemének összeadását és egy elemének számmal való szorzását. Mutassuk meg, hogy ezekre fennállnak az előző feladatban felsorolt összefüggések. (Ezt az algebra nyelvén úgy fejezik ki, hogy V e két művelettel (általánosított) vektorteret alkot.)

37. Legyen V az $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvények halmaza, összeadásuk és számmal való szorzásuk a függvények szokásos összeadása illetve számmal való szorzása.

38. Álljon V azokból a 4-dimenziós $[x, y, z, w] \in \mathbf{R}^4$ vektorokból, melyek kielégítik az $x + 2y - z + 3w = 0$ egyenletet, a két művelet legyen a vektorok szokásos összeadása és számmal való szorzása.

Írjuk fel az alábbi u skalár-vektorfüggvényekhez tartozó többváltozós f függvényt:

39. $u : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}; \mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}|$, **40.** $u : \mathbf{R}^{(2)} \to \mathbf{R}; \mathbf{r} \mapsto [3, 5] \cdot \mathbf{r}$,

41. $u : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}; \mathbf{r} \mapsto |[1, 0, 1] \times \mathbf{r}|$, **42.** $u : \mathbf{R}^{(4)} \to \mathbf{R}; \mathbf{r} \mapsto ([1, 1, 1, 1] \cdot \mathbf{r})^2$.

Írjuk fel az alábbi többváltozós f függvényekhez tartozó u skalár-vektorfüggvényt:

43. $f(x, y) = ax + by$, **44.** $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$,

45. $f(x, y) = xy$, **46.** $f(x, y, z, w) = w + 1$.

Differenciálhatóság

D 14.8 Legyen $u : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}$ skalár-vektorfüggvény és $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ a neki megfelelő többváltozós függvény (lásd **M 14.7**). Az u skalár-vektorfüggvényt az $\mathbf{r}_0$ (illetve a többváltozós f függvényt a P_0) helyen **differenciálhatónak** mondjuk, ha megadható olyan $\mathbf{d}$ vektor és $\mathbf{r}_0$-nak (illetve P_0-nak) olyan teljes környezete, hogy ha $\mathbf{r}$ (illetve P) e környezetből való, akkor $u(\mathbf{r})$ (illetve $f(P)$) értelmezve van, és

$$u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

$$(\text{illetve} \quad f(P) - f(P_0) = \mathbf{d} \cdot \overrightarrow{P_0P} + \varepsilon(P) \cdot \overrightarrow{P_0P},)$$

ahol ε olyan vektorértékű függvény, mely $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ ($P \to P_0$) esetén $\mathbf{0}$-hoz tart. A $\mathbf{d}$ vektort az u (illetve f) függvény **gradiensének** nevezzük és $\mathbf{grad}\, u(\mathbf{r}_0)$-lal (ill. $\mathbf{grad}\, f(P_0)$-lal), vagy $\nabla u(\mathbf{r}_0)$-lal (ill. $\nabla f(P_0)$-lal) jelöljük. (A ∇ jelet "nablá"-nak nevezzük). Megmutatható, hogy a $\mathbf{d}$ gradiensvektor koordinátái az f függvény P_0-beli parciális differenciálhányadosaiból állnak, azaz

$$\mathbf{d} = \mathbf{grad}\, f(P_0) = \nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i f'_{x_i}(P_0) = [f'_{x_1}(P_0), \ldots, f_{x_n}(P_0)],$$

ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ a vektortér alapvektorait, x_1, x_2, …, x_n az f függvény változóit jelöli. (Két változó esetén: $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) = \mathbf{i} f'_x(x_0, y_0) + \mathbf{j} f'_y(x_0, y_0)$. Ennek felhasználásával egy kétváltozós f függvény differenciálhatóságának feltételét az alábbi formában is írhatjuk:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1(x, y)(x - x_0) + \varepsilon_2(x, y)(y - y_0),$$

ahol ε_1 és ε_2 is 0-hoz tartanak, ha $(x, y) \to (x_0, y_0)$.)

T 14.9 Ha a többváltozós valós f függvény parciális deriváltjai a P_0 pontban folytonosak, akkor az f függvény a P_0 pontban differenciálható. (Ha az f függvény parciális deriváltjai léteznek P_0-ban, akkor a parciális deriváltak P_0-beli értékeiből álló gradiensvektor ugyan felírható, de ennek létezése nem biztosítja f differenciálhatóságát e pontban.)

T 14.10 Ha egy többváltozós valós függvény valamely pontban differenciálható, akkor abban a pontban folytonos is.

D 14.11 Ha az egy- vagy többváltozós f függvény az x_0 illetve P_0 pontban differenciálható, akkor a definícióbeli

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0) \text{ illetve } f(P) = f(P_0)+\nabla f(P_0)\overrightarrow{P_0P}+\varepsilon(P)\overrightarrow{P_0P}$$

képletekben az egyenlőség jobb oldalán szereplő

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ illetve } P \mapsto f(P_0) + \nabla f(P_0)\overrightarrow{P_0P}$$

függvényt az f függvény x_0 illetve P_0 ponthoz tartozó **lineáris közelítésének** nevezzük. A közelítésre használt jelöléssel: $f(P) \approx f(P_0) + \overrightarrow{P_0P} \cdot \nabla f(P_0)$, ha $P \approx P_0$.
Ha f egy-, két- illetve háromváltozós, akkor a következő formulákat kapjuk:
$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, ha $x \approx x_0$;
$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$, ha $(x,y) \approx (x_0,y_0)$;
$f(x,y,z) \approx f(x_0,y_0,z_0)+f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$, ha $(x,y,z) \approx (x_0,y_0,z_0)$.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi többváltozós valós függvények gradiensét a megadott P_0 helyen:

47. $f(x,y) = x\ln(x+y)$, $P_0(-2,3)$, **48.** $f(x,y) = \arccos\frac{x}{y}$, $P_0(1,2)$,

49. $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(3,-4,7)$,

50. $f(x,y) = x^2+3xy+y^2$, $P_0(1,-2)$, **51.** $f(x,y,z) = ze^{-x}\operatorname{tg} y$, $P_0(0,\pi,-2)$.

Számítsuk ki közelítőleg az alábbi értékeket egy megfelelően választott függvény egy lineáris közelítésével (lásd **D 14.11**):

52.▷ $\sqrt{3{,}97^3}$, **53.**▷ $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$, **54.**▷ $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$,

55. $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$, **56.** $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$, **57.** $0{,}969^{1{,}05}$.

Keressük meg azokat a pontokat, amelyekben az alábbi f függvények gradiense nullvektor:

58. $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1$,

59. $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 5x + y + 3$,

60. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 3x + 2y + z$.

Állapítsuk meg, hogy az alábbi f függvények gradiense mely pontokban lesz egységvektor:

61. $f(x,y) = xy + x - 2y + 5$, **62.** $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x+y)$,

63. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

64. Állapítsuk meg, hogy hol lesz az $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ függvény gradiense az $\mathbf{a} = [3,4]$ vektorra merőleges, 5 egységnyi abszolút értékű vektor.

65. Állapítsuk meg, hogy hol lesz az $f(x,y) = xy + x - y$ függvény gradiense az $\mathbf{a}[-1,1]$ vektorra merőleges egységvektor.

66. Állapítsuk meg, hogy hol lesz az $f(x,y) = xy - 2x + 3y$ függvény gradiense olyan 10 egységnyi abszolút értékű vektor, amely ellentétes irányú az $\mathbf{a} = [3,-4]$ vektorral.

67. Állapítsuk meg, hogy hol lesz az $f(x,y,z) = xz + y^2/2 - x + y + 5$ függvény gradiense az $\mathbf{a}[0,1,-1]$ és a $\mathbf{b}[1,0,-1]$ vektorokra merőleges egységvektor.

68. Keressük meg azokat a pontokat, ahol az $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 5x - 10y$ függvény gradiense nullvektor, valamint azokat a pontokat, ahol a függvény gradiense egyirányú a $[12,5]$ vektorral, és a gradiens abszolút értéke 26 egység.

69. Állapítsuk meg, hogy mely pontokban lesznek az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény gradiensvektorai az $\mathbf{a}[1,1]$ vektorral 45°-os szöget bezáró egységvektorok, és melyek azok.

70. Állapítsuk meg, hogy mely pontokban zár be az $f(x,y) = xy$ függvény gradiense az $\mathbf{a} = [0,2]$ vektorral 60°-os szöget.

Az alábbi feladatokban

a) számítsuk ki a megadott valós f függvény gradiensét az origóban;

b) mutassuk meg, hogy f az origóban nem differenciálható (l. **D 14.8**):

71. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

72. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

73. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

74. $$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}, & \text{ha } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases}$$

75.* $$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Iránymenti differenciálhányados

D 14.12 Legyen **e** az n-dimenziós valós vektortér valamely egységvektora. Az n változós f függvény P_0 pontbeli **e** **iránymenti differenciálhányadosán** a

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\mathbf{e} \cdot \overrightarrow{P_0P}}$$

határértéket értjük, miközben P úgy tart P_0-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az e vektorral párhuzamos. Jelölése: $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$ vagy $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}\right)_{P=P_0}$. Ha az f függvényt nem többváltozós, hanem skalár-vektorfüggvénynek tekintjük, akkor az $\mathbf{r}_0$ helyhez tartozó e **iránymenti differenciálhányados** a következő alakban is felírható:

$$f'_{\mathbf{e}}(\mathbf{r}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{r}_0)}{h}.$$

Ha a egy tetszőleges nem-nullvektor, és e jelöli az a irányú egységvektort ($\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$), akkor értelemszerűen f-nek P_0-beli a iránymenti deriváltján f-nek P_0-beli e iránymenti deriváltját értjük.

T 14.13 Ha a többváltozós valós f függvény differenciálható a P_0 pontban, akkor ebben a pontban bármely e iránymenti differenciálhányadosa létezik, mégpedig $f'_{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\cdot \operatorname{grad} f(P_0)$. Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $f'_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}/|\mathbf{a}|)\cdot \operatorname{grad} f(P_0)$. Kétváltozós esetben az f függvénynek a $P(x_0, y_0)$ ponthoz tartozó, és az x tengely pozitív felével α szöget bezáró félegyenes e irányára vonatkozó iránymenti deriváltját f'_α-val jelölve:

$$f'_\alpha(x_0, y_0) = f'_{\mathbf{e}}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

T 14.14 Ha $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$, akkor $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$ maximális (illetve minimális) értékét az $\mathbf{e} = \nabla f(P_0)/|\nabla f(P_0)|$ (illetve $\mathbf{e} = -\nabla f(P_0)/|\nabla f(P_0)|$) irányban veszi fel, és ebben az irányban $|\nabla f(P_0)|$ (illetve $-|\nabla f(P_0)|$) az iránymenti differenciálhányados értéke.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények iránymenti differenciálhányadosait a megadott P pontban az a vektor irányában:

76.* $f(x,y,z) = 2^x yz$, $P(1,-1,1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,

77. $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15$, $P(1,1)$, $\mathbf{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$,

78. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $P(3,40)$, $\mathbf{a} = \dfrac{1}{2}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$,

79. $f(x,y,z) = xe^{y^2}z$, $P(2,1,0)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$.

80.* Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Határozzuk meg $f'_x(1,2)$ és $f'_y(1,2)$ értékét, ha $f'_{\mathbf{a}}(1,2) = 6\sqrt{2}$ és $f'_{\mathbf{b}}(1,2) = -2\sqrt{2}$.

81.* Mutassuk meg, hogy ha f kétváltozós függvény, továbbá $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ egymásra merőleges vektorok, akkor $(\nabla f(x,y))^2 = (f_{\mathbf{a}}(x,y))^2 + (f_{\mathbf{b}}(x,y))^2$.

Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények α iránymenti differenciálhányadosát a P helyen:

82. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\alpha = 60°$, $P(\sqrt{3}, -1)$,

83. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = 135°$, $P(-5,5)$,

84. $f(x,y) = \operatorname{tg}(2x + y)$, $\alpha = 7\pi/4$, $P(\pi/6, \pi/3)$.

85. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = xy + \sqrt{2}z$ függvény e iránymenti differenciálhányadosát a $P(-1,1,0)$ helyen, ahol e az az egységvektor, amely az x és y tengelyekkel egyaránt 60°-os szöget zár be.

Keressük meg az alábbi függvények maximális és minimális értékű iránymenti differenciálhányadosát az adott P pontban:

86. $f(x,y) = 4x^3y^2$, $P(-1,1)$, **87.** $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P(4,-3)$,

88. $f(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 4xyz$, $P(-1,1,2)$,

89. $f(x,y,z) = e^x \cos y + e^y \sin z$, $P(2,1,0)$.

Magasabbrendű parciális deriváltak

T 14.15 Ha a kétváltozós valós f függvény második parciális deriváltjai az (x_0,y_0) pont valamely teljes környezetében folytonosak, akkor $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$. Általánosan: ha az n-változós f függvény összes r-edrendű parciális deriváltja folytonos a P_0 pont egy teljes környezetében, akkor f bármely két olyan r-edrendű parciális deriváltja, mely csak a deriválások sorrendjében tér el egymástól, P_0-ban ugyanazt az értéket veszi fel.

T 14.16 Legyenek P és Q az xy sík valamely egyszeresen összefüggő D ponthalmazán folytonos függvények, a P'_y és Q'_x parciális deriváltak létezzenek, és legyenek folytonosak a D ponthalmazon. A felsorolt feltételek esetén a $P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ skalár-vektorfüggvény akkor és csak akkor gradiense valamely $f(x,y)$ függvénynek, ha $P'_y(x_0,y_0) = Q'_x(x_0,y_0)$ a D minden egyes (x_0,y_0) pontjában (lásd a 28. fejezet egzakt differenciálegyenletekről szóló részét). Hasonló tétel igaz háromváltozós függvényekre is: ha a P, Q, R függvények, valamint a P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y deriváltak valamely egyszeresen összefüggő D tartományon folytonosak, akkor a $P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ függvény pontosan akkor gradiense egy $f(x,y,z)$ függvénynek D-n, ha a $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = R'_y$ egyenlőségek teljesülnek a D tartomány minden pontjában.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait.

90. $z(x,y) = x^y$, **91.** $u(x,y,z) = x^{y^z}$, **92.** $u(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.

Mutassuk meg, hogy az alábbi $f(x,y)$ függvényekre $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$:

93. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - x^2y}{x+y}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

94. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az alábbi többváltozós függvények kielégítik a megadott egyenletet:

95. $z(x,y) = e^{-ay}\cos ax$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

96. $z = e^{ax+by}$ (a, b konstansok), $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{b}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

97. $f(x,y) = xe^x\cos y$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0$,

98. $w = \ln(e^x + e^y + e^z + e^t)$, $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x \partial y \partial z \partial t} = -6e^{x+y+z+t-4w}$,

99. $f(x,y,z,t) = zt\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + 5t$, $f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} + f''_{tt} = 0$.

100. Legyen $w = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^p$, $n \geq 2$. Milyen valós p érték esetén teljesül, hogy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} = 0.$$

101. Igazoljuk a **T 14.16** tétel állításainak a következő részét:
a) ha P és Q az xy sík valamely egyszeresen összefüggő D ponthalmazán folytonos függvények, a P'_y és Q'_x parciális deriváltak léteznek és folytonosak a D ponthalmazon, továbbá van olyan f kétváltozós függvény, amelyre a D tartományon $\nabla f = [P, Q]$, akkor D minden pontjában $P'_y = Q'_x$.
b) ha a háromváltozós P, Q, R függvények, valamint a P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y deriváltak valamely egyszeresen összefüggő D tartományon folytonosak, továbbá van olyan f függvény, amelyre a D tartományon $\nabla f = [P, Q, R]$, akkor D minden pontjában $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = R'_y$.

Keressük meg, ha léteznek, azokat a két-, illetve háromváltozós valós f függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartományuk minden pontjához tartozó gradiense az alább megadott $P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, illetve $P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ alakú függvény. (Hangsúlyozzuk, hogy nem minden ilyen alakú skalár-vektorfüggvényhez található olyan két-, illetve háromváltozós valós f függvény, amelyiknek ez a skalár-vektorfüggvény a gradiense.)

102.ᐅ $y^2\mathbf{i} + (2xy - 1)\mathbf{j}$,

103. $(3x^2 - 6xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$,

104. $xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$,

105. $y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$,

106. $(\cos x - y\sin x)\mathbf{i} + \cos x\mathbf{j}$,

107. $(\sin x + y)\mathbf{i} + (y\sin x)\mathbf{j}$,

108.ᐅ $2x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

109. $x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$,

110. $yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$,

111. $(2x+y)\mathbf{i} + (2y+x+z)\mathbf{j} + (y-2z)\mathbf{k}$,

112. $-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathbf{i} - \dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathbf{j} - \dfrac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathbf{k}$,

113. $(3x^2 - 4xy + z^2 + yz - 2)\mathbf{i} + (xz - 6y^2 - 2x^2)\mathbf{j} + (9z^2 + 2xz + xy + 6z)\mathbf{k}$,

114. $\mathbf{i}\sin xz + \mathbf{j}\cos xy + \mathbf{k}\sin yz$.

Összetett függvény és parciális differenciálása

D 14.17 Az m-változós valós f külső, és az n-változós u_1, u_2, ..., u_m belső függvényekből összetett függvénynek nevezzük azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya mindazokból a $P_0 \in \mathbf{R}^n$ pontokból áll, amelyekben u_1, u_2, ..., u_m függvények mindegyike értelmezve van, és amelynek értéke minden ilyen P_0 pontban $f(u_1(P_0), u_2(P_0), \dots, u_m(P_0))$. E függvényt $f \circ (u_1, u_2, \dots, u_m)$-mel jelöljük.

T 14.18 Láncszabály: Legyenek u, v és f kétváltozós valós függvények. Ha u és v mindkét változója szerint parciálisan differenciálható az (x_0, y_0) pontban, f pedig differenciálható az $(u_0, v_0) := (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ pontban, akkor a $z := f \circ (u, v)$ függvény is parciálisan differenciálható mindkét változója szerint, és

$$z'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0) \cdot u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0) \cdot v'_x(x_0, y_0),$$
$$z'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0) \cdot u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0) \cdot v'_y(x_0, y_0).$$

Ha egy tartomány minden (x_0, y_0) pontjára igaz a fenti összefüggés, akkor írhatjuk, hogy

$$z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x, \qquad z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y,$$

illetve, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Feladatok

Tegyük fel, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatóak, és a belőlük alább képzett összetett függvények értelmezési tartománya nem üres. Írjuk fel a minden feladatban utolsóként felírt összetett függvény parciális deriváltjaira (ha egyváltozós, akkor a deriváltjára) vonatkozó láncszabály képleteit! A külső függvény változóit ugyanazzal a betűvel jelöljük, amivel a belső függvényeket.

115. $u(x, y)$, $f(u)$; $\quad z(x, y) := f(u(x, y))$,

116. $u(x, y)$, $x(t)$, $y(t)$; $\quad z(t) := u(x(t), y(t))$,

117. $f(u_1, \dots, u_m)$, $u_1(x_1, \dots, x_n)$, ..., $u_m(x_1, \dots, x_n)$;
$z(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$,

118. $w(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; $\quad z(t) = w(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$,

119. $w(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_i(v_1, v_2)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$;
$z(v_1, v_2) = w(x_1(v_1, v_2), x_2(v_1, v_2), x_3(v_1, v_2), x_4(v_1, v_2))$.

Határozzuk meg az alábbi többváltozós összetett függvények feltüntetett parciális deriváltjait a láncszabály alkalmazásával és behelyettesítéssel egyaránt:

120.* $f(u, v) = u^2v - uv^2$, $\quad z(x, y) = f(x\cos y, x\sin y)$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

121. $f(u,v)=\sqrt{u^2+v^2},\ \ z(x,y)=f(xe^y,x^2-3y);\ \ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},$

122. $f(u,v)=u^2\ln v,\ \ u(x,y)=\dfrac{x}{y},\ \ v(x,y)=3x-2y,\ \ z=f\circ(u,v);\ \ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},$

123. $f(x,y,z)=2x+3y+5xz,\ \ w(u,v)=f(\sqrt{u^2+v^2},\operatorname{arctg}\dfrac{v}{u},2u+v);\ \ \dfrac{\partial w}{\partial u},\ \dfrac{\partial w}{\partial v},$

124. $f(x,y)=\arcsin xy,\ \ z(u,v,w)=f(we^{uv},2u-3wv);\ \ \dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v},\ \dfrac{\partial z}{\partial w}.$

Számítsuk ki az alábbi többváltozós összetett függvények t szerinti deriváltjait:

125. $f(x,y)=e^{x-2y},\ \ x(t)=\sin t,\ \ y(t)=t^3,\ \ z=f\circ(x,y),$

126. $f(x,y)=\arcsin(x-y),\ \ x(t)=3t,\ \ y(t)=4t^3,\ \ z=f\circ(x,y),$

127. $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}-\dfrac{z}{x},\ \ w(t)=f(\sin t,\cos t,\operatorname{tg} t),$

128. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ w(t)=f(e^t,e^{-t},2t).$

Számítsuk ki az alábbi többváltozós összetett függvények feltüntetett deriváltját a megadott helyen:

129. $f(x,y)=x^2y,\ \ z(t,s)=f(2t+s,1-st^2),\ \ \left.\dfrac{\partial z}{\partial t}\right|_{s=1,t=-2},$

130. $f(x,y)=xy+x+y,\ \ x=r+s+t,\ \ y=rst,\ \ z=f\circ(x,y),\ \ \left.\dfrac{\partial z}{\partial s}\right|_{r=1,s=-1,t=2},$

131. $f(x,y)=(x^2+y-2)^4+(x-y+2)^3,$

$x(u,v)=u-2v+1,\ \ y(u,v)=2u+v-2,\ \ z=f\circ(x,y),\ \ \left.\dfrac{\partial z}{\partial v}\right|_{u=0,v=0},$

132. $f(x,y,z)=x^2y+z^2,$

$t(u,v,w)=f(u\cos v\sin w,u\sin v\sin w,u\cos w),\ \ \left.\dfrac{\partial t}{\partial v}\right|_{u=2,v=\pi,w=\pi/2},$

133. $f(x,y,z)=\ln(x+y+z),\ \ w(t)=f(\cos^2 t,\sin^2 t,t),\ \ \left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=\pi},$

134. $f(u,v)=u^2-u\operatorname{tg} v;\ \ u(x)=x,\ \ v(x)=\pi x,\ \ w=f\circ(u,v),\ \ \left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=1/4}.$

135. Legyen $w=f\circ(x,y),\ x(s,t)=e^s\cos t,\ y(s,t)=e^s\sin t$. Feltéve, hogy léteznek f második parciális deriváltjai, mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).$$

136. Legyen $z=f\circ(x,y),\ x(r,\varphi)=r\cos\varphi,\ y(r,\varphi)=r\sin\varphi$. Mutassuk meg, hogy $(x,y)\neq(0,0)$, illetve $r\neq 0$ esetén

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi-\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{r}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\cos\varphi}{r}$;

b) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2.$

137. Tegyük fel, hogy f eleget tesz a **Laplace-egyenletnek**, azaz $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$, és tekintsük az összetett $z(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ függvényt. Fejezzük ki a Laplace-egyenletet z legfeljebb másodrendű parciális deriváltjaival.

138. Tegyük fel, hogy kielégítik a **Cauchy–Riemann-egyenleteket** a kétváltozós $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények, azaz $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$. Képezzük az alábbi függvényeket: $f(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $g(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Milyen összefüggések állnak fenn az f és g függvények parciális deriváltjai között?

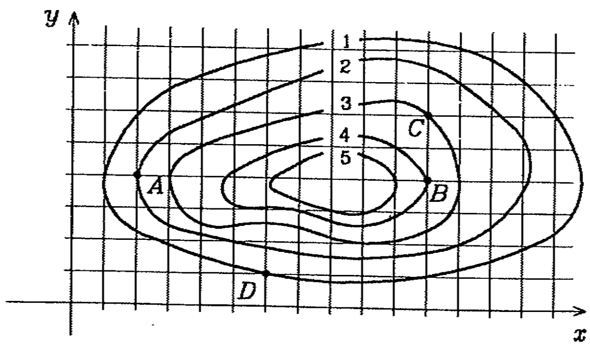
139.$^{\triangleright}$ Az f függvényt **homogén n-ed fokúnak** nevezzük, ha minden valós t-re $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = nf(x,y)$.

140. Legyen $f(x,y) = \operatorname{tg} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$. Mutassuk meg, hogy $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = 0$.

141. Legyen f kétszer differenciálható egyváltozós függvény. Mutassuk meg, hogy az $y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]$ függvény tetszőleges c valós számmal kielégíti a **hullámegyenletet**, melynek alakja: $y''_{tt} = c^2 y''_{xx}$.

142.$^{\bullet}$ Mutassuk meg, hogy ha a kétváltozós f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor a $\nabla f(x_0, y_0)$ vektor merőleges az $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ egyenletű nívóvonalra.

143.$^{\triangleright}$ Az alábbi ábrán egy kétváltozós függvény nívóvonalai láthatóak. Az ábráról leolvasható információk alapján számítsuk ki az $f_x(A)$, $f_y(B)$, $f_{\mathbf{a}}(C)$ értékeket, ahol $\mathbf{a} = [1,1]$, és rajzoljuk be a $\nabla f(A)$, $\nabla f(B)$, $\nabla f(C)$ gradiensvektorokat. Rajzoljuk be a D ponthoz azt az irányt, amely szerinti iránymenti differenciálhányados 1. Képzeljük azt, hogy a függvény grafikonja egy hegy modellje, amelyre az xy-sík C pontja fölött egy esőcsepp esik. Rajzoljuk be, hogy milyen úton csorog le az esőcsepp a hegyről. Milyen úton másznánk fel a hegytetőre, ha C fölül indulva mindig a legmeredekebben emelkedő utat választanánk.



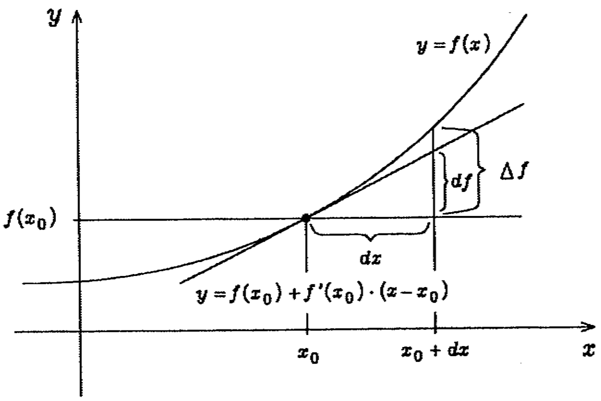
15. fejezet

A többváltozós Taylor-formula és alkalmazásai

A teljes differenciál

D 15.1 Legyen az egyváltozós valós f függvény differenciálható az x_0 pontban. Az f függvény x_0 helyhez tartozó **differenciálján** azt a lineáris függvényt értjük, mely a dx-szel jelölt változóhoz az $f'(x_0)dx$ értéket rendeli, azaz

$$df(x_0; dx) = f'(x_0)dx.$$



Szokásosak az alábbi egyszerűsítő jelölések:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

vagy

$$df = f'dx.$$

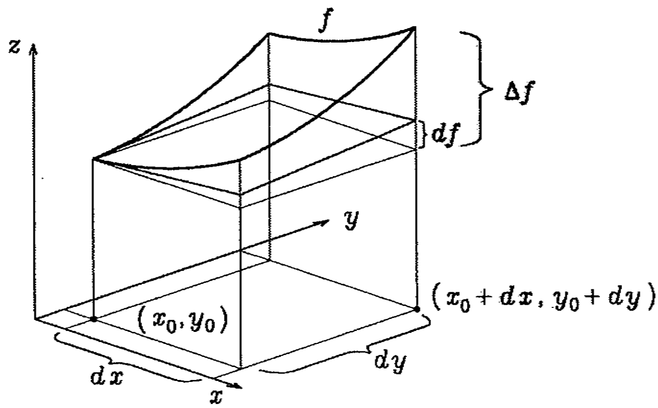
(Ha dx az f változójának x_0-tól való eltérését jelöli, azaz $dx = x - x_0$, akkor a differenciál szemléletes jelentést nyer. Segítségével a **D 14.11** definícióbeli $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, ha $x \approx x_0$ lineáris közelítés a $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ jelöléssel a következő alakba írható: $\Delta f \approx df$, ha $dx \approx 0$. Ez azt jelenti, hogy míg Δf az f megváltozását, addig df az f lineáris közelítésének megváltozását adja. A lineáris közelítés grafikonja éppen az f függvény x_0-beli érintőegyenese, amint azt az ábra is mutatja.)

D 15.2 Legyen az n-változós valós f függvény differenciálható a P_0 pontban. Az f függvény P_0 helyhez tartozó **teljes differenciálján** azt az n-változós lineáris függvényt értjük, mely a dx_i-vel jelölt változókhoz a

$$df(P_0; dx_1, \dots, dx_n) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n}dx_n, \quad (\text{röviden: } df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i}dx_i).$$

értéket rendeli. A teljes differenciált szokás a dx_i változók nélkül $df(P_0)$, vagy egyszerűen csak df alakban felírni. A $\mathbf{dx} = [dx_1, \dots, dx_n]$ jelöléssel a teljes differenciál felírható $df(P_0; \mathbf{dx}) = \mathbf{grad}\, f(P_0) \cdot \mathbf{dx}$, vagy $df = \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{dx}$ illetve $df = \nabla f \cdot \mathbf{dx}$ alakban.
(A teljes differenciál változóinak dx_i-vel való jelölését az indokolja, hogy dx_i egyenlő egy differenciállal, mégpedig az $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$ függvény teljes differenciáljával.)

M 15.3 Ha $dx = \overrightarrow{P_0P}$, akkor az f függvény értékének P_0 és P közti megváltozása, azaz a $\Delta f := f(P) - f(P_0)$ különbség, és a teljes differenciál kapcsolata a **D 14.11** definícióbeli lineáris közelítést átírva a következő: $\Delta f \approx df$, ha $dx \approx 0$. A **D 14.11** definícióbeli közelítésből az is leolvasható, hogy df az f lineáris közelítésének megváltozásával egyenlő. Ezt szemlélteti az ábra is abban az esetben, ha f kétváltozós. (Ha a kétváltozós f függvény differenciálható P_0-ban, akkor f lináris közelítésének grafikonja az f grafikonjának érintősíkja a P_0 ponthoz tartozó pontjában. Erre vonatkozóan lásd **T 17.31**.)



Feladatok

Írjuk fel az alábbi függvények megadott helyekhez tartozó teljes differenciálját:

1.• $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,4)$, $Q(x,y)$,

2. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y}{4-z^2}$, $P(x,y,z)$, $Q(1,0,1)$,

3.▹ $f(x,y,z) = 7x - 2y$, $P(x,y)$, $Q(1,1)$,

4. $f(x,y,z) = x$, $P(x,y,z)$,

5. $f(x,y) = y\sin x + \cos(x-y)$, $P(x,y)$, $Q(\pi,0)$,

6. $s(u,v,w) = \arccos\dfrac{w}{uv}$, $P(u,v,w)$,

7. $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$, $P(x_0,y_0)$,

8. $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$, $P(x,y,z)$, $Q(a,b,c)$,

9. $z(p,q,r) = e^{pqr}$, $A(p,q,r)$, $B(1,0,1)$,

10. $f(x,y) = x^y$, $P(x,y)$, $Q(1,1)$.

Számítsuk ki az f függvény a helyhez tartozó teljes differenciáljának a dx változó megadott helyen vett helyettesítési értékét:

11.▹ $f(x) = x^3 - x$, $a = 2$, $dx = -0.1$, **12.** $f(x) = \cos^2 x$, $a = \frac{\pi}{4}$, $dx = 0.01$.

Számítsuk ki az f függvény A helyhez tartozó teljes differenciáljának a változók megadott helyen vett helyettesítési értékét:

13.ᵖ $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$, $A(2,-1)$, $[dx,dy] = [-0.01, 0.02]$,

14. $f(x_1,x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2 + x_2^3$, $A(-2,1)$, $\mathbf{dx} = [-0.03, -0.02]$,

15. $f(x,y,z) = x^2y - xyz + z^3$, $A(1,2,-1)$, $[dx,dy,dz] = [-0.02, 0.01, 0.02]$,

16. $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2^2x_3^3$, $A(1,-1,2)$, $\mathbf{dx} = [-0.01, -0.02, 0.02]$,

17. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $A(4,2)$, $[dx,dy] = [0.1, 0.1]$,

18. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$, $A(-1,-2)$, $[dx,dy] = [-0.02, -0.04]$,

19. $f(p,q) = \sqrt[4]{p^3+q^3}$, $A(2,2)$, $[dp,dq] = [-0.1, 0.1]$,

20. $f(\alpha,\beta) = \sin\alpha\beta + \cos(\alpha+\beta)$, $A(\frac{\pi}{6},0)$, $[d\alpha,d\beta] = [2\pi, 3\pi]$,

21. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $A(0,1)$, $[dx,dy] = [-0.03, -0.02]$,

22. $f(u,v) = e^u \ln v$, $A(0,1)$, $[du,dv] = [0.1, -0.1]$,

23. $f(x,y) = \operatorname{tg} xy$, $A(\pi, \frac{1}{4})$, $[dx,dy] = [-\frac{\pi}{100}, -0.01]$.

Felhasználva az $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$ illetve $f(P) \approx f(P_0) + df(P_0)$ közelítéseket, számológép használata nélkül számítsuk ki az alábbi kifejezések közelítő értékét. (Az x_0 ill. P_0 helyet úgy válasszuk meg, hogy az f értékét e helyen közvetlenül fel tudjuk írni.)

24.ᵖ $\sqrt{27\sqrt[3]{1021}}$,

25. $\sqrt{5.02^2 + 11.97^2}$,

26. $\sqrt{3.02^2 + 1.99^2 + 5.97^2}$,

27. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right)$.

28. Legyen f és g két egyváltozós függvény, c egy konstans függvény. Igazoljuk a differenciálokra vonatkozó alábbi összefüggéseket:

$$dc = 0,$$
$$d(cf) = c\,df,$$
$$d(f+g) = df + dg,$$
$$d(fg) = f\,dg + g\,df,$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

Oldjuk meg az alábbi feladatokat differenciálok felhasználásával:

29.ᵖ Egy gömb átmérőjét 10 cm-nek mérjük. A mérés pontossága ± 0.1 mm. Becsüljük meg a gömbtérfogat ennek alapján számított értékének pontosságát!

30.ᵖ Egy 10 cm átmérőjű gömb felületét 0.1 mm vastagságú fémbevonattal látjuk el. Becsüljük meg a felvitt fém térfogatát!

31.ᵖ Egy kocka élét 1%-os relatív hibával mérjük. Becsüljük meg a kocka e mért adatból számított felszínének és térfogatának relatív hibáját! (A relatív hiba a mért mennyiség hibájának és a mennyiségnek a hányadosa.)

32.• Legyen $y = cx^k$, ahol $c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}^+$ konstansok. Mutassuk meg, hogy az y mennyiség relatív hibája megközelítőleg az x relatív hibájának k-szorosa.

33.ᵖ Egy körhenger sugarát legfeljebb 1%-os, magasságát legfeljebb 2%-os hibával mérjük. Becsüljük meg a henger térfogatának lehetséges relatív hibáját!

34. Egy derékszögű háromszög két befogóját megmérve azt kapjuk, hogy azok hossza 3 és 4 cm. Az egyik befogóval szemközti szöget az $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ képlettel számítjuk. Mekkora lehet a kiszámított szög hibája, és mekkora az átfogóé, ha a befogók pontossága ± 0.1 mm?

35. Legyen egy áramkörben párhuzamosan kapcsolva egy R_1 és egy R_2 ohmos ellenállás. Ha $R_1 < R_2$, akkor melyik ellenállás megváltozására érzékenyebb az eredő ellenállás? (Az eredő ellenállást az $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ képlettel számítjuk.)

A Taylor-formula

D 15.4 Legyen f olyan n-változós valós függvény, amelynek a P_0 pontban léteznek a k-adik parciális deriváltjai. Az f függvény P_0 ponthoz tartozó **k-adik Taylor-polinomján** azt az n-változós T_k polinomot értjük, melynek minden legfeljebb k-adrendű P_0-beli parciális differenciálhányadosa megegyezik f azonos parciális differenciálhányadosával.
Rövid számolással ellenőrizhető, hogy ha például f két-, illetve háromváltozós függvény, akkor a $P_0(x_0, y_0)$ illetve $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponthoz tartozó T_0, T_1 és T_2 alakjai a következők:
$T_0(x,y) = f(P_0)$,
$T_1(x,y) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$,
$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2]$,
$T_0(x,y,z) = f(P_0)$,
$T_1(x,y,z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0)$,
$T_2(x,y,z) = T_1(x,y,z) + \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2 + f_{zz}(P_0)(z - z_0)^2] + f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{xz}(P_0)(x - x_0)(z - z_0) + f_{yz}(P_0)(y - y_0)(z - z_0)$.
Mint látható, az f függvény első Taylor-polinomja megegyezik az f függvény lineáris közelítésével (lásd **D 14.11**).

T 15.5 Lagrange-féle középértéktétel, 0-adik Taylor-formula: Ha a kétváltozós valós f függvény parciális deriváltjai a $P_0(x_0, y_0)$ pont valamely teljes környezetében léteznek és folytonosak, akkor e környezet bármely $P(x_0 + h, y_0 + k)$ pontjában felvett függvényérték kifejezhető a következőképpen:

$$f(x_0 + h, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta h) + kf_y(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta h),$$

ahol ϑ a $(0,1)$ intervallum alkalmasan választott pontja. E formula másik alakja:

$$f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{P_0P}\,\mathrm{grad}\, f(\Theta),$$

ahol Θ a P_0P szakasz alkalmasan választott belső pontja.

T 15.6 Első Taylor-formula: Ha a kétváltozós valós f függvény második parciális deriváltjai a $P_0(x_0, y_0)$ pont valamely teljes környezetében léteznek és folytonosak, akkor e környezet bármely $P(x_0 + h, y_0 + k)$ pontjában felvett függvényérték kifejezhető a következőképpen:

$$f(P) = f(P_0) + hf_x(P_0) + kf_y(P_0) + \frac{1}{2}[h^2 f_{xx}(\Theta) + 2hkf_{xy}(\Theta) + k^2 f_{yy}(\Theta)],$$

ahol $\Theta = (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta h)$, és ϑ a $(0,1)$ intervallum alkalmasan választott pontja.

Feladatok

Írjuk fel az alábbi függvényeknek a megadott helyhez tartozó első és második Taylor-polinomját:

36.ᵖ $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5,\quad P_0(1,-2),$

37. $f(x,y)=\sin x\sin y,\quad P_0(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}),$

38.ᵖ $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y},\quad P_0(0,0),$

39. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z+4,\quad P_0(1,1,1).$

40.ᵖ Írjuk fel a kétváltozós f függvény $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomját.

Írjuk fel az alábbi függvényeknek a megadott helyhez tartozó harmadik Taylor-polinomját:

41.ᵖ $f(x,y)=x^y,\quad P_0(1,1),$

42. $f(x,y)=x^2y,\quad P_0(1,1),$

43. $f(x,y)=e^{x+y},\quad P_0(1,-1),$

44. $f(x,y)=e^x\sin y,\quad P_0(0,\frac{\pi}{2}).$

45.ᵖ Írjuk fel az $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ polinomot $x-1$ és $y-2$ polinomjaként.

46. Írjuk fel az $f(x,y)=x^3+y^3-6xy+6y^2-15x+21y+28$ polinomot $x-1$ és $y+2$ polinomjaként.

Felhasználva a kétváltozós n-edik Taylor-polinomot, számítsuk ki közelítőleg az alábbi értékeket a négy alapművelet segítségével:

47. $0.95^{2.01}$, $n=2$, 48.ᵖ $1.1^{1.02}$, $n=3$, 49. $\sqrt{1.03}\sqrt[3]{0.98}$, $n=2$.

50.ᵏ Számítsuk ki az $e^{0.1}\sin 0.2$ közelítő értékét egy megfelelően választott függvényhez tartozó T_0, T_1, T_2 és T_3 polinom segítségével, majd zsebszámológéppel.

51.* Írjuk fel a kétváltozós f függvény P_0 ponthoz tartozó első, második és harmadik Taylor-polinomját differenciálok segítségével!

Szélsőértékek

T 15.7 Ha a P_0 pont egy teljes környezetében értelmezett többváltozós valós függvénynek a P_0 pontban (lokális) szélsőértéke van, akkor a P_0-ban létező minden parciális differenciálhányadosa zérus.

Megjegyzés: ez azt jelenti, hogy szélsőértékek keresésekor azokat a pontokat kell megvizsgálni,

1. amelyek f értelmezési tartományának határpontjai,
2. ahol mindegyik létező parciális differenciálhányados 0, (beleértve azt az esetet is, hogy egyik parciális differenciálhányados sem létezik).

T 15.8 Ha a $P_0(x_0, y_0)$ pont valamely teljes környezetében az f kétváltozós valós függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \quad \text{és} \quad D(P_0) = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) > 0,$$

akkor az f függvénynek szélsőértéke van a P_0 pontban. Ez a szélsőérték szigorú minimum, ha $f_{xx}(P_0) > 0$, és szigorú maximum, ha $f_{xx}(P_0) < 0$, vagy, ami ezzel ekvivalens, szigorú minimum, ha $f_{yy}(P_0) > 0$, és szigorú maximum, ha $f_{yy}(P_0) < 0$. Ha P_0-ban $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$, de $D(P_0) < 0$, akkor f-nek P_0-ban nincs szélsőértéke; az ilyen $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontot **nyeregpontnak** nevezzük. (Az $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$, és $D(P_0) = 0$ esetben további vizsgálatok szükségesek.)

T 15.9 Legyen $P_0 \in \mathbf{R}^n$ olyan pont, melynek valamely teljes környezetében az n-változós valós f függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá f változóit x_1-, x_2-, ..., x_n-nel jelölve

$$f_{x_1}(P_0) = f_{x_2}(P_0) = \cdots = f_{x_n}(P_0) = 0.$$

Ha az

$$f_{x_1x_1}, \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

véges függvénysorozat minden eleme a P_0 pontban pozitív értéket vesz fel, akkor az f-nek P_0-ban minimuma van, ha pedig a P_0-ban felvett függvényértékek váltakozó előjelűek úgy, hogy $f_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor f-nek P_0-ban maximuma van.

D 15.10 Legyen f többváltozós valós függvény, H pedig az f értelmezési tartományának valamely (többnyire egyenletekkel vagy egyenlőtlenségekkel) megadott részhalmaza. Ha az f-et csak a H halmazon vesszük figyelembe — vagyis f eredeti értelmezési tartományát H-ra szűkítjük —, és ilyen feltétel mellett keressük az f szélsőértékeit, akkor **feltételes szélsőértékszámításról** beszélünk.

T 15.11 A feltételes szélsőérték meghatározásának a következő három pontban, két- és háromváltozós függvényekre leírt módját **Lagrange-féle multiplikátoros módszernek** nevezzük; a multiplikátor(oka)t λ (illetve λ és μ) fogja jelölni.

1. Ha az $u(x,y) = 0$ egyenletű ponthalmazon értelmezett f valós függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban mindkét változója szerint parciálisan differenciálható, és ott f-nek szélsőértéke van, akkor megadható olyan λ_0 valós szám, hogy egyszerre teljesüljenek az alábbi egyenlőségek:

$$(1) \qquad \nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla u(P_0), \quad \text{és} \quad u(P_0) = 0.$$

2. Ha az $u(x,y,z) = 0$ egyenletű ponthalmazon értelmezett f valós függvény a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontban mindhárom változója szerint parciálisan differenciálható, és ott f-nek szélsőértéke van, akkor megadható olyan λ_0 valós szám, hogy egyszerre teljesüljenek az alábbi egyenlőségek:

$$(2) \qquad \nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla u(P_0), \quad \text{és} \quad u(P_0) = 0.$$

3. Ha az $u(x,y,z) = 0$, $v(x,y,z) = 0$ egyenletrendszerű ponthalmazon értelmezett f valós függvény a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontban mindhárom változója szerint parciálisan differenciálható, és ott f-nek szélsőértéke van, akkor megadható olyan (λ_0, μ_0) valós számpár, hogy egyszerre teljesüljenek az alábbi egyenlőségek:

$$(3) \qquad \nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla u(P_0) + \mu_0 \nabla v(P_0), \quad u(P_0) = 0, \quad v(P_0) = 0.$$

Az (1), (2) illetve (3) egyenlőségeinek fennállása ekvivalens azzal, hogy a

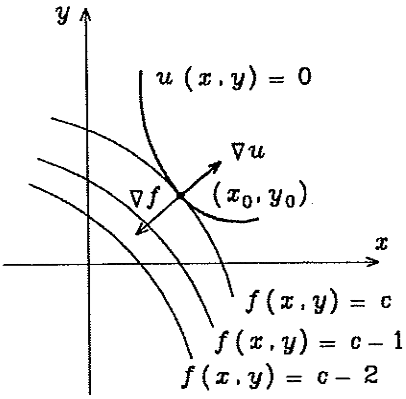
$$(1') \qquad h(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda u(x,y),$$

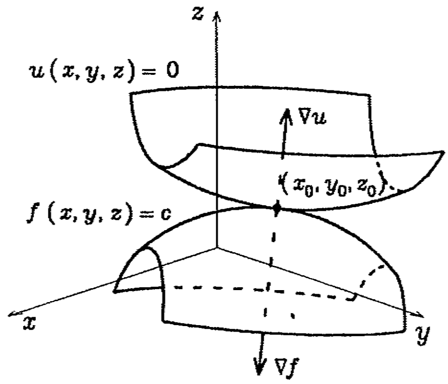
$$(2') \qquad h(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda u(x,y,z),$$

$$(3') \qquad h(x,y,z,\lambda,\mu) := f(x,y,z) + \lambda u(x,y,z) + \mu v(x,y,z)$$

képlettel definiált h függvény mindegyik parciális differenciálhányadosa létezik és zérus értékű az $(x_0, y_0, -\lambda_0)$, az $(x_0, y_0, z_0, -\lambda_0)$ illetve az $(x_0, y_0, z_0, -\lambda_0, -\mu_0)$ pontban.

M 15.12Az alábbi megjegyzések az előző tételhez kapcsolódnak:
1. A Lagrange-módszer csak azokat a helyeket adja meg, ahol a függvénynek lehet szélsőértéke. Hogy a kiszámított helyen van-e szélsőérték, és ha igen, milyen, gyakran eldönthető a feladatban szereplő függvények grafikonjainak vizsgálatával, vagy a feladat valamilyen más geometriai szemléltetésével.
2. A alábbi két ábra az (1) illetve (2) egyenlőségeit szemlélteti abban az esetben, ha az u függvénnyel leírt tartomány egy görbe illetve egy felület. A c szám az f függvény szélsőértékét (az első ábrán például a maximumát) jelöli. A szemléltetésben azt használjuk fel, hogy az f és u függvények nívóvonalai illetve nívófelületei merőlegesek a gradiensvektorra.





Feladatok

Állapítsuk meg, hogy vannak-e szélsőértékei az alábbi kétváltozós f függvényeknek, s ha igen, hol és milyenek:

52.ᐅ $x^3 + y^3 - 3xy$,	53. $4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$,
54. $4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$,	55. $-4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$,
56. $x^3 - 3xy + y^3$,	57. $x^3 + 3xy + y^3$,
58.ᐅ $2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$,	59.• $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,
60. $x^4 + y^4$,	61. $x^4 - y^4$,
62.: $x^4 + y^4 - 4xy$,	63. $xy^2(1 - x - 2y)$, $x, y > 0$,

64. $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y}$,

65. $x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{1}{y}$,

66. $\dfrac{xy}{27} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$,

67. $x^2 + x \ln y$,

68. $xy + 2x - \ln x^2 y$, $(x > 0,\ y > 0)$,

69. e^{xy},

70. $y \sin x$,

71. $\sin x + \cos y$.

Állapítsuk meg, hogy vannak-e szélsőértékei az alábbi egyenletekkel implicit alakban megadott $z = g(x, y)$ függvényeknek, s ha igen, hol és milyenek:

72.▹ $5(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) - 72 = 0$,

73. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Állapítsuk meg, hogy vannak-e szélsőértékei az alábbi többváltozós f függvényeknek, s ha igen, hol és milyenek:

74.▹ $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,

75. $yz - 2x + 3z - (x^2 + y^2 + z^2)$,

76. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 6x + 2z$,

77.▹ $xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $x, y, z > 0$,

78. $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{16}{z}$,

79. $x + \dfrac{y/2}{4x} + \dfrac{z/2}{y} + \dfrac{2}{z}$,

80. $x_1 + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_4}{x_3} + \dfrac{32}{x_4}$.

Határozzuk meg az alábbi kétváltozós f függvényeknek a megadott görbére vonatkozó feltételes szélsőértékeit úgy, hogy paraméterezzük a görbét egy t paraméterrel, majd meghatározzuk a $t \mapsto f(x(t), y(t))$ függvény szélsőértékeit:

81.▹ $f(x, y) = xy$, az $y = 2x + 1$ egyenes $(-1, -1)$, $(0, 1)$ közti szakaszán,

82. $f(x, y) = xy + 1$, az $y = 2x + 1$ egyenes $(0, 1)$, $(1, 3)$ közti szakaszán,

83.▹ $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

84. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + y^2 = 4$,

85.▹ $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $x^2/4 + y^2/9 = 1$, $y \geq x$,

86. $f(x, y) = 3x + 2y$, $x^2/4 + y^2/9 = 1$, $x \geq 0$.

Határozzuk meg az alábbi f függvények abszolút minimumát és maximumát a megadott tartományon:

87.▹ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3$, $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 9 - x\}$,

88. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3$, $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y < 9 - x\}$,

89.▹ $x^2 + y^2 - xy$, $\{(x, y) : x \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$,

90.▹ $2x^2 + y^2 - 4x - 4y$, $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \leq 2,\ y \geq 2x\}$,

91.▹ $\operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$, $\{(x, y) : y \leq x + 1,\ y + 2x \leq 4,\ 2y + x \geq -4\}$,

92.▹ $x^2 + y^2 + xy - 6x$, $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 5,\ -3 \leq y \leq 3\}$,

93. $x^2 + y^2 + xy - 6x$, $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 5,\ -3 \leq y \leq 0\}$,

94. $6xy - 4x^3 - 3y^2$, $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$,

95.▹ $e^{-x^2} \sin y$, $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ -\pi \leq y \leq \pi\}$,

96. $\cos x \sin y$, $\{(x, y) : \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4},\ -\pi \leq y \leq \frac{\pi}{3}\}$, 97.[▷] x^2+y^2+xy-x, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$,

98. x^2+y^2+xy, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$,

99. $x^2+y^2-xy-3x$, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 3\}$,

100.[▷] x^2-y^2+2xy, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

101.[▷] Legyen egy G görbe az $u(x,y,z)=0$, $v(x,y,z)=0$ egyenletrendszerrel megadva, és tegyük fel, hogy a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont az f függvény G görbén vett feltételes szélsőértékhelye. Az **M 15.12** magyarázat 2. pontjához hasonlóan adjunk szemléletes magyarázatot a **T 15.11** tétel (3) képletére.

Határozzuk meg az alábbi háromváltozós f függvényeknek a megadott egyenletekkel leírt felületre vagy görbére vonatkozó feltételes szélsőértékeit:

102.[▷] $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$, $x+y+z=0$,

103.[▷] $f(x,y,z)=x^3+y^2+z$, $x^2+y^2+z^2=1$,

104.[▷] $f(x,y,z)=x^2+y^2-x-z$, $2x+y+z=0$, $2x^2-y+z=0$,

105. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $x+2y+z=1$, $2x-y-3z=4$.

Határozzuk meg az alábbi kétváltozós f függvényeknek a megadott feltételekre vonatkozó feltételes szélsőértékeit a Lagrange-féle multiplikátoros módszerrel:

106.[•] $f(x,y)=xy$, $x^2+y^2=1$,

107.[▷] $f(x,y)=x^2+y^2$, $xy=3$,

108. $f(x,y)=xy$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

109. $f(x,y)=xy^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

110. $f(x,y)=x^2+y^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

111. $f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $(a,b>0)$ $x^2+y^2=1$,

112. $f(x,y)=x^m+y^m$, $(m>1$ egész$)$, $x+y=2a$, $(a>0)$,

113. $f(x,y)=x+y$, $x^4+y^4=1$.

Feltételes szélsőértékként határozzuk meg az alábbi egyenlettel megadott görbe távolságát a P ponttól, és adjuk meg a görbe olyan pontjait, amelyek épp ekkora távolságra vannak P-től:

114.[▷] $y=2x+3$, $P(4,2)$,

115. $x^2+y^2=45$, $P(1,2)$,

116.[▷] $x^4+y^4+3xy=2$, $P(0,0)$.

Határozzuk meg az alábbi többváltozós f függvényeknek a megadott feltételekre vonatkozó feltételes szélsőértékhelyeit:

117.[▷] $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $z^2=x^2y+4$,

118. $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$, $x+y+z=4$,

119. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $ax+by+cz=d$,

120. $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$, $(a,b,c>0)$, $a_1x+b_1y+c_1z=d$,

121. $f(x,y,z)=xyz$, $x+y+z=1$,

122. $f(x,y,z) = x^2y^3z^4, \quad 2x + 3y + 4z = a, \ (x,y,z > 0),$

123. $f(x,y,z) = x^ay^bz^c, \quad x + y + z = d, \ (x,y,z > 0, \ a,b,c,d > 0),$

124.▷ $f(x,y,z) = x + 2y + 3z, \quad x^2 + y^2 = 2, \ y + z = 1,$

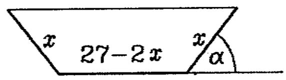
125. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + 2y + z = 1, \ 2x - y - 3z = 4,$

126.* $f(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + z^2 + t^2, \quad x + 3y - z + t = 2, \ 2x - y + z + 2t = 4,$

127.* $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad x + y - z + 2t = 2, \ 2x - y + z + 3t = 3.$

Oldjuk meg az alábbi szöveges szélsőértékfeladatokat:

128.▷ Egy 27 cm széles lemezből az ábrán látható trapéz keresztmetszetű csatornát kell készíteni. Keressük meg az x és φ azon értékét, amelynél a trapéz keresztmetszete maximális.



129. Valamely háromszög szögeit megmérve, a mért α, β, γ értékek összege a legtöbb esetben 180°-tól különböző lesz: $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \delta$. Határozzuk meg az x, y, z korrekciókat úgy, hogy az

$$(\alpha + x) + (\beta + y) + (\gamma + z) = \pi$$

egyenlőség teljesüljön, és a korrekciók négyzetösszege minimális legyen.

130. Felül nyitott, téglatest alakú, V térfogatú tartályt kell készíteni. Mekkorák legyenek a tartály élei, hogy elkészítéséhez a legkevesebb anyagra legyen szükség?

131. Keressük meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ gömbön azokat a pontokat, amelyek távolsága a $P(1,2,2)$ ponttól legnagyobb, illetve legkisebb.

132. Milyen hosszúak az élei annak a maximális térfogatú téglatestnek, amely beírható az

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

egyenletű ellipszoidba, ha élei párhuzamosak a tengelyekkel?

133.• Keressük meg az $x^2 - z^2 = 1$ felület (hiperbolikus henger) origóhoz legközelebb eső pontjait.

134.▷ Osszuk fel 100-at öt pozitív összeadandóra úgy, hogy az öt szám szorzata maximális legyen.

135. Osszuk fel az 1-et $n + 1$ pozitív összeadandóra úgy, hogy az öt szám szorzata maximális legyen.

16. fejezet

Többváltozós valós függvények integrálása

A kettős és a hármas integrál

D 16.1 Legyen V síkbeli (ill. térbeli) tartomány (olyan korlátos halmaz, melynek van területe ill. térfogata), és legyen f a V tartományon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós függvény. Legyen továbbá

$$B: \qquad V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$$

a V tartomány valamely beosztása, és Δv_i jelölje a V_i résztartomány területét (térfogatát). Az f függvényhez, a B beosztáshoz és annak $[P_1, P_2, \ldots, P_n]$ **reprezentáns-rendszeréhez** tartozó **integrálközelítő összegen** az alábbi összeget értjük:

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i.$$

D 16.2 Az előző definícióbeli V és f mellett V beosztásának bármely, minden határon túl finomodó $[B_m]$ sorozata esetén képezzük az f függvényhez, a B_m beosztásokhoz és azok tetszőleges reprezentáns-rendszereihez tartozó I_m integrálközelítő összegeket. Ha bármelyik ilyen I_m sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy f a V tartományon **integrálható**. Megmutatható, hogy ekkor minden I_m sorozat határértéke ugyanaz a szám, amit az f függvény V-n vett **integráljának** nevezünk, és az

$$\int_V f(P)\,dv \qquad \text{vagy a} \qquad \int_V f$$

formulával jelölünk. Ha V két- ill. háromdimenziós, akkor az

$$\iint_V f(x,y)\,dv, \quad \iint_V f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iiint_V f(x,y,z)\,dv \quad \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

jelölések is használatosak.

T 16.3 Ha f folytonos a zárt V tartományon, akkor integrálható is V-n.

P 16.4 Egy többváltozós f függvény integrálja V-n általában (pl. ha f folytonos és V korlátos) visszavezethető több egyváltozós határozott integrál kiszámítására. Az $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$ jelölés azt jelenti, hogy először az $\int_c^d f(x,y)\,dx$ integrált számítjuk ki, majd az így kapott — csak y-tól függő — függvényt integráljuk y szerint. Hasonlóan kapjuk az $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ értékét is. Például

$$\int_0^1 \int_x^{x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_x^{x^2} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx = -\frac{1}{24}.$$

T 16.5 Ha f folytonos az $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ egyenesek által határolt V téglalapon, akkor

$$\int_V f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx,$$

míg ha f az $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$, $y = b_2$, $z = a_3$, $z = b_3$ síkok által határolt V téglatesten folytonos, akkor

$$\int_V f = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy\,dz.$$

T 16.6 Ha f integrálható a 2-dimenziós V tartományon és minden $(x,y) \in V$ pontra $f(x,y) \geq 0$, akkor a V feletti és felülről a $z = f(x,y)$ felülettel határolt hengerszerű test térfogata egyenlő az $\iint_V f(x,y)\,dx\,dy$ integrál értékével.

T 16.7 Ha $f(x,y) = 1$, akkor az $\iint_V 1\,dx\,dy = \iint_V dx\,dy$ integrál a V területét adja. Hasonlóképpen az $\iiint_V dx\,dy\,dz$ integrál a V térfogatával egyenlő.

D 16.8 Legyen a T lemez ill. test sűrűségfüggvénye a V tartományon értelmezett és azon integrálható $\varrho(x,y)$ ill. $\varrho(x,y,z)$ függvény. Ekkor

T **tömege**: $\iint_V \varrho$ ill. $\iiint_V \varrho$,

T (statikai) **nyomatéka** az $x = a$, $y = b$ egyenesekre ill. a $x = a$, $y = b$, $z = c$ síkokra:

$$\iint_V (x-a)\varrho(x,y)\,dv, \qquad \iint_V (y-b)\varrho(x,y)\,dv \quad \text{ill.}$$

$$\iiint_V (x-a)\varrho(x,y,z)\,dv, \qquad \iiint_V (x-a)\varrho(x,y,z)\,dv, \qquad \iiint_V (x-a)\varrho(x,y,z)\,dv,$$

T **tömegközéppontja**: $\bar{x} = \dfrac{\iint_V x\varrho(x,y)\,dv}{\iint_V \varrho(x,y)\,dv}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{\iint_V y\varrho(x,y)\,dv}{\iint_V \varrho(x,y)\,dv}$, $\quad$ ill.

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\varrho(x,y,z)\,dv}{\iiint_V \varrho(x,y,z)\,dv}, \qquad \bar{y} = \frac{\iiint_V y\varrho(x,y,z)\,dv}{\iiint_V \varrho(x,y,z)\,dv}, \qquad \bar{z} = \frac{\iiint_V z\varrho(x,y,z)\,dv}{\iiint_V \varrho(x,y,z)\,dv}.$$

E képletek számlálójában a tengelyre vonatkozó nyomaték, nevezőjében a tömeg van.

T **súlypontja**: (az előző képletek $\varrho = 1$ vagy $\varrho = c$ helyettesítéssel)

$$\bar{x} = \frac{\iint_V x\,dv}{\iint_V dv}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_V y\,dv}{\iint_V dv} \quad ill.$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\,dv}{\iiint_V dv}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y\,dv}{\iiint_V dv}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z\,dv}{\iiint_V dv}.$$

P 16.9 Vizsgáljuk meg mi motiválja a tömeg kiszámításának előző definícióját! Alkossák a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ közös belső pont nélküli résztartományok V-nek egy beosztását. V_i térfogata legyen Δv_i. Legyen P_i a V_i egy tetszőleges pontja. V_i tömege közelítőleg $\varrho(P_i)\Delta v_i$ — pontosan ennyi ha a V_i sűrűsége konstans —, így a test közelítő tömege $\sum_{i=1}^{n} \varrho(P_i)\Delta v_i$. Ha ϱ integrálható V-n, akkor a beosztások finomságának minden határon túli finomítása mellett e szumma az $\int_V \varrho$ értékhez tart, ami azt jelenti, hogy tetszőlegesen közel kerül hozzá elegendően finom beosztás esetén.

Feladatok

1. Számítsuk ki az $f(x,y) = x + y$ függvénynek a $V = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ egységnégyzeten vett integrálközelítő összegét, ha a beosztást az $x = 0;\ 0,4;\ 0,6;\ 1$ és az $y = 0;\ 0,2;\ 0,8;\ 1$ egyenesek adják meg, a reprezentáns-rendszer pedig minden kis téglalap
a) középpontja;
b) origóhoz legközelebb eső pontja;
c) origótól legtávolabb fekvő pontja.

Számítsuk ki az integrál definíciója (**D 16.2**) segítségével az alábbi integrálok értékét:

2.* $\displaystyle\iint_V xy\,dx\,dy, \qquad V = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\},$

3. $\displaystyle\iint_V (x+y)\,dx\,dy, \qquad V = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$

4.* Mutassuk meg hogy f nem integrálható V-n, ha
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ racionális;} \\ 1 & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$
és $V = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

5. Legyen f és g folytonos a V tartományon. Mutassuk meg a **D 16.2**, **T 16.3** felhasználásával, hogy
$$\left|\int_V f\right| \le \int_V |f| \quad \text{és} \quad \left|\int_V f + g\right| \le \int_V |f| + \int_V |g|.$$

6.▷ Tudjuk, hogy a sík (x,y) pontjába tett m tömegű, pontszerű test nyomatéka az $x = a$ egyenesre $(x-a)m$. A **P 16.8**-hoz hasonlóan mutassuk meg, hogyan vezet ez a **D 16.7**-beli $\iint_V (x-a)\varrho(x,y)\,dv$ képlethez.

7. Az előző feladathoz hasonlóan vizsgáljuk meg a **D 16.7** többi képletét is.

8.▷ A **T 16.5** felhasználásával számítsuk ki a **16.2** és a **16.3** feladatokban szereplő integrálokat.

A következő feladatokban számítsuk ki az f függvény integrálját az adott téglalap ill. téglatest alakú V tartományon a **T 16.5** segítségével:

9.▷ $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{0}^{1} y^2x\,dy\,dx,$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3}\int_{0}^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx,$

11. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{1} x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy,$

12. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{1} xye^{y^2x}\,dy\,dx,$

13. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\varphi,$

14. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{-1}^{1}\int_{2}^{4} (y-xz)\,dz\,dy\,dx.$

Számítsuk ki az alábbi kettős és hármas integrálokat kétszeres ill. háromszoros integrálással:

15. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x}^{5x} (x+6y)\,dy\,dx,$

16. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx,$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\cos y} x\sin y\,dx\,dy$, 18. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^3} \sin\frac{y}{x}\,dy\,dx$,

19. $\displaystyle\int_1^3\int_0^x \frac{2}{x^2+y^2}\,dy\,dx$, 20. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx$,

21. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y}(z-2x-y)\,dz\,dy\,dx$, 22. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{2-z} z\,dx\,dy\,dz$,

23. $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\int_0^1\int_0^y (z^2+1)e^{y^2}\,dx\,dz\,dy$, 24. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin z} x^2\sin y\,dx\,dy\,dz$.

Integrálás tetszőleges tartományon

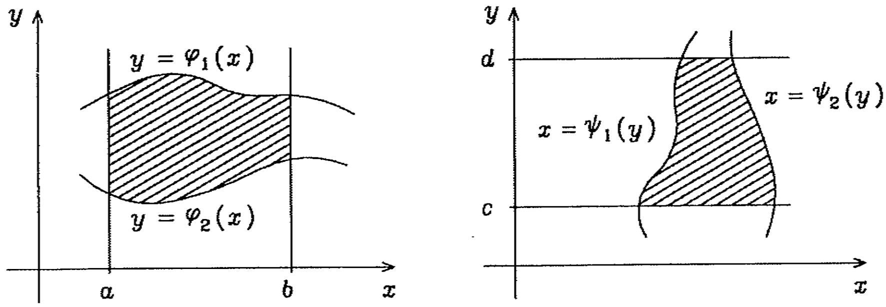
T 16.10 Ha f folytonos, és a V tartományt az $x=a$, $y=b$ egyenesek és az $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ függvények grafikonja határolja (ahol $\forall x\in[a,b]$ esetén $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$), akkor

$$\int_V f=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Hasonlóképpen, ha f folytonos és V-t $y=c$, $y=d$, $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ ($\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, ha $y\in[c,d]$) görbék határolják, akkor

$$\int_V f=\int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Például az utóbbi összefüggés úgy értelmezhető, hogy először rögzített y mellett x szerint integrálunk $\psi_1(y)$-tól $\psi_2(y)$-ig, majd az így kapott, csak y-tól függő, $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ függvényt integráljuk y szerint c-től d-ig.

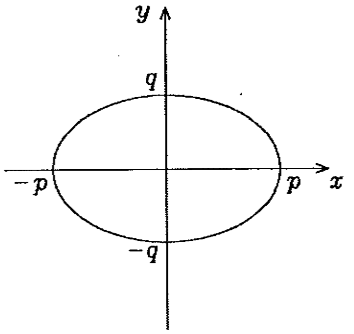


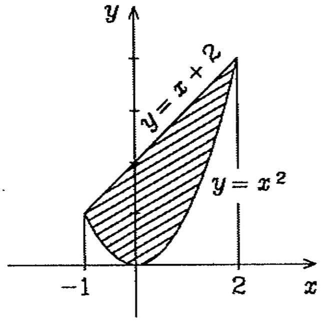
a) ábra *b) ábra*

P 16.11 A határok felírása egy egyenlettel megadott görbe esetén, mint amilyen pl. az $(x/p)^2+(y/q)^2=1$ egyenletű ellipszis, úgy történik, hogy kifejezzük a megfelelő változót az egyenletből. A **P 16.10** a) ábra szerinti esetben $y^2=q^2(1-(x/p)^2)$, amiből $\varphi_1(x)=$

$-q\sqrt{1-(x/p)^2}$ és $\varphi_2(x) = q\sqrt{1-(x/p)^2}$. Az a és b értéke φ_1 és φ_2 értelmezési tartományából adódik: $1-(x/p)^2 \geq 0$, azaz $-p \leq x \leq p$, tehát $a = -p$, $b = p$. A **P 16.10 b)** ábra szerinti eset hasonlóan adódik: $\psi_1(y) = -p\sqrt{1-(u/q)^2}$, $\psi_2 = p\sqrt{1-(u/q)^2}$, továbbá $c = -q, d = q$. Tehát ha V az ellipszis által határolt tartomány, akkor

$$\int_V f = \int_{-p}^{p}\int_{-q\sqrt{1-(\frac{x}{p})^2}}^{q\sqrt{1-(\frac{x}{p})^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-q}^{q}\int_{-p\sqrt{1-(\frac{y}{q})^2}}^{p\sqrt{1-(\frac{y}{q})^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$



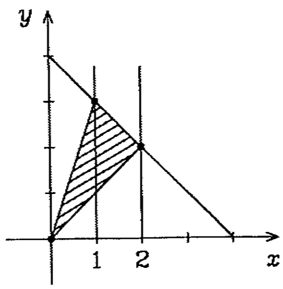


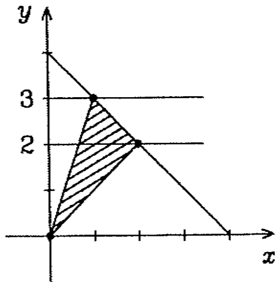
P 16.12 A határok felírása akkor, ha a tartományt két függvény grafikonja határolja, egyszerű, hiszen csak a metszéspontokat kell megkeresni. Pl. az $y = x^2$ és $y = x+2$ görbék határolta tartományra

$$\int_V f = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx$$

hiszen az $y = x^2$, $y = x+2$ egyenletrendszer megoldása $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. (L. fenti jobb oldali ábra).

P 16.13 Ha a tartomány határai nem írhatók fel a **P 16.10** a) vagy a b) ábra szerinti két függvénnyel, akkor a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel azt ilyen tartományokra bontjuk.





Pl. az $y = 3x$, $y = x$, $y = 4-x$ egyenesek által határolt háromszög alakú tartomány (csúcsai: $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$) az $x = 1$ egyenessel két ilyen részre bontható, ha először y szerint integrálunk. A belső integrálás határai a függvényekből, a külső integrálás határai a csúcsok abszcisszáiból kiolvashatók (l. bal oldali ábra). Tehát

$$\int_V f = \int_0^1 \int_x^{3x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_x^{4-x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Ha először x szerint integrálunk, akkor az $y = 2$ egyenessel kettévágjuk a tartományt, és a határokat leíró függvények inverz alakját használjuk: $x = y/3$, $x = y$, $x = 4 - y$ (l. jobb oldali ábra). Így

$$\int_V f = \int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

P 16.14 Ha $f(x,y,z)$ folytonos és V-t a $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ függvények grafikonjának egy R síkbeli tartomány feletti része határolja, és minden $(x,y) \in R$ esetén $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$, akkor

$$\int_V f = \iint_R \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz \right) dy\,dx$$

ezt pedig a kétváltozós integráloknál megismert módon számítjuk ki, azaz

$$\int_V f = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz\,dy\,dx$$

P 16.15 Írjuk fel a határokat az $\int_V f$ integrálban, ahol V a $z = 2x^2+2y^2$ és a $z = 3-x^2-4y^2$ paraboloidok által határolt test. Ekkor

$$\int_V f = \iint_R \left(\int_{2x^2+2y^2}^{3-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz \right) dy\,dx.$$

Az R meghatározásához megkeressük a két felület metszésvonalának xy-koordinátáit (azaz e metszésvonal xy-síkra eső merőleges vetületének egyenletét): $2x^2+2y^2 = 3 - x^2 - 4y^2$ azaz $x^2 + 2y^2 = 1$ amiből R határai **P 16.11** szerint:

$$\int_V f = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} \int_{2x^2+2y^2}^{3-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Feladatok

Számítsuk ki kettősintegrállal (a **T 16.7** szerinti módon) az alábbi egyenletekkel meghatározott tartományok területét:

25. $y = 2x - x^2$, $y = x^2$, **26.** $y^2 = 9 - x$, $y^2 = 9 - 9x$,

27. $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$, $x = 0$, $x = 1$.

Számítsuk ki az alábbi kettősintegrálokat a megadott V tartományon:

28. $\iint_V (x+y)\,dv$, V határgörbéi: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$,

29. $\iint_V \frac{1}{1+x^2}\,dv$, V a $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ csúcspontú háromszög,

30.ᵖ $\iint_V xy\,dv$, V határgörbéi: $y = 0$, $y = 6 - x$, $y = \sqrt{x}$,

31. $\iint_V \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dv$, ahol V az első negyedbe eső, az $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ görbék által határolt tartomány,

32. $\iint_V xy\,dv$, ahol $V = \{(x,y); x^2+y^2 \le R,\ x > 0,\ y > 0,\quad R > 0 \text{ konstans}\}$,

33. $\iint_V xy^2\,dv$, ahol $V = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1,\quad y \ge 1-x\}$,

34. $\iint_V e^x \sin y\,dv$, V határgörbéi: $y = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$, $x = \cos y$.

Az integrálás sorrendjének felcserélésével számítsuk ki az alábbi kettősintegrálokat:

35. $I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$, **36.** $I = \int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\,dx\,dy$,

37. $I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin x^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy$, **38.** $I = \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3} - x)\,dx\,dy$,

39.[▷] $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_{\ln 2}^{2\ln x} dy\,dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \int_{\ln 2}^{\ln 3} dy\,dx + \int_2^3 \int_{\ln x}^{\ln 3} dy\,dx$.

Határozzuk meg azon hengerszerű testek térfogatát, amelyeket az alábbi $z = f(x,y)$ függvények grafikonjával megadott felületek, az xy sík adott T tartománya, és a T határgörbéjére állított, a z tengellyel párhuzamos alkotók határolnak.

40. $z = y^2 - 2x$, $T = \{(x,y) : y^2 \le x+3,\quad x \le 0\}$,

41. $z = x^2 - y^2$, T a $(0,0)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ csúcspontú háromszög,

42. $z = \sin^2 x - y^2$, T határa: $y^2 = \sin^2 x$, $0 \le x \le \pi$,

43. $z = xy$, T a $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,1)$ csúcspontú háromszög,

44. $z = 1/(x+3)$, T határai az $x = 0$, $y = 0$ és az $x - 3y = 1$ egyenesek.

45.[▷] Határozzuk meg két egymásra merőleges tengelyű, R sugarú körhenger közös részének térfogatát.

Kettős vagy hármas integrállal számítsuk ki az alábbi felületek által meghatározott tartományok térfogatát.

46. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 2$, **47.** $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2 - 2x^2$,

48. $y = 0$, $y = x^2 - 4$, $z = 0$, $z = y + 8$, **49.** $z = -x$, $z = x$, $y^2 = 2 - x$,

50. $x = 0$, $z = 0$, $y^2 = 4 - x$, $z = y + 2$, **51.** $x^2 = y + z$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$,

52.[▷] $y^2 = z$, $y = z^3$, $z = x$, $y^2 = 2 - x$, **53.** $y = x^2$, $z^2 = 4 - y$.

Számítsuk ki az alábbi felületekkel határolt tartományokon a megadott $f(x,y,z)$ függvények hármas integrálját.

54. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $(a,b,c > 0)$; $f(x,y,z) = z$,

55. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$; $f(x,y,z) = z$,

56. $z = 0$, $x^2 + z = 1$, $y^2 + z = 1$; $f(x,y,z) = z^2$.

Határozzuk meg a megadott V síklemez ill. test tömegközéppontjának koordinátáit, ha V tömegeloszlása $\varrho(x,y)$ ill. $\varrho(x,y,z)$.

57. V az $x = y^2$, $x = 4$, $y = 0$ görbékkel határolt homogén síklemez,

58. V a $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$, (a,a) csúcspontokkal rendelkező négyzet alakú síklemez, $\varrho(x,y) = k(x^2+y^2)$ $(k>0)$,

59. $V = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$; $\varrho(x,y) = ky$,

60. V az $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$ felületekkel határolt homogén test.

61. Számítsuk ki (**D 16.8** segítségével) a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcspontokkal rendelkező háromszöglap nyomatékát az $x = 2$, illetve az $y = -3$ egyenesre, ha tömegeloszlásának sűrűségfüggvénye $\delta(x,y) = xy$.

62.[P] Írjunk számítógépprogramot, mely egy $f(x,y)$ függvény

$$\iint_V f(x,y)\,dv$$

integrálját egy integrálközelítő összeggel becsli. Legyen V

a) egy téglalap alakú tartomány;

b) egyenlőtlenségekkel megadott tartományok közös részének egy téglalapba eső része.

A programot futtassuk le az alábbi feladatok adataival:

a) **16.9-13**

b) **16.25-34, 40-45.**

63.[P] Írjunk számítógépprogramot, mely kiszámítja egy $\varrho(x,y,z)$ tömegeloszlású T test tömegközéppontjának koordinátáit közelítő integrálással. A programot futtasuk le a **16.57-60** feladatokon. Hogyan használjuk e programot $\varrho(x,y)$ eloszlású síklapok esetében.

A kettős és a hármas integrál transzformációja

T 16.16 Legyen V az xy-sík egy adott tartománya, f a V tartományon integrálható függvény, $(u,v) \mapsto (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ a V tartomány és az (u,v) számpárok bizonyos W halmaza között kölcsönösen egyértelmű leképezés, x és y az u-nak és v-nek a W halmazon folytonos parciális deriváltakkal rendelkező két függvénye. Ekkor az f függvény V-n vett integráljára igaz, hogy

$$\iint_V f(x,y)\,dx\,dy = \iint_W f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

a függvénytranszformáció **Jacobi-determinánsa**.

T 16.17 Az előző tétel háromdimenziós V tartományon értelmezett f függvényre is kimondható, ha a függvénytranszformáció $(u,v,w) \mapsto (x,y,z) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, a Jacobi-determináns pedig

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

nevezetesen, az analóg feltételek fennállása esetén

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

P 16.18 Az integráltranszformációt gyakran azért használjuk, hogy a határok egyszerűbbek, sőt ha lehet, konstansok legyenek. Ha pl. a V tartományt az $y=x$, $y=2x$ és az $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$ görbék határolják, akkor az első két egyenletből kapjuk, hogy

$$1 \le \frac{y}{x} \le 2,$$

a másik kettőből, hogy

$$1 \le xy \le 3,$$

vagyis bevezetve az $u=\frac{y}{x}$ és $v=xy$ uj változókat, a határok konstansok lesznek:

$$1 \le u \le 2, \quad 1 \le v \le 3.$$

Kifejezve x-et, y-t és a Jacobi-determinánst: $x=\sqrt{\dfrac{v}{u}}$, $\quad y=\sqrt{uv}$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}, \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2u}.$$

Tehát

$$\iint_V f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3\int_1^2 f(u,v)\frac{1}{2u}\,du\,dv = \int_1^2\int_1^3 f(u,v)\frac{1}{2u}\,du\,dv.$$

Például a V tartomány területe:

$$\iint_V dx\,dy = \int_1^2\int_1^3 \frac{1}{2u}\,dv\,du = \int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}.$$

D 16.19 A leggyakoribb transzformációk:

polár-koordináták	módosított polárk.	henger-koordináták	módosított hengerk.	térbeli polár-koordináták	módosított térbeli polárk.
$x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$	$x=ar\cos\varphi$ $y=br\sin\varphi$	$x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$ $z=m$	$x=ar\cos\varphi$ $y=br\sin\varphi$ $z=cm$	$x=r\sin\vartheta\cos\varphi$ $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$ $z=r\cos\vartheta$	$x=ar\sin\vartheta\cos\varphi$ $y=br\sin\vartheta\sin\varphi$ $z=cr\cos\vartheta$
$\lvert J\rvert=r$	$\lvert J\rvert=abr$	$\lvert J\rvert=r$	$\lvert J\rvert=abcr$	$\lvert J\rvert=r^2\sin\vartheta$	$\lvert J\rvert=abcr^2\sin\vartheta$

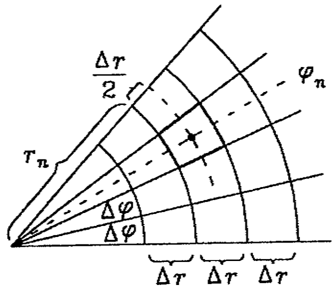
Esetenként célszerű lehet az x,y,z szerepét felcserélni, mint pl. a **16.89-91** feladatokban.

P 16.20 A határok átírása vagy felírása az integráltranszformáció után úgy történik, hogy a tartományt határoló görbék ill. felületek egyenleteit átírjuk az új változókkal, felhasználva a transzformációt leíró egyenleteket. Példaként megadjuk néhány fontosabb felület egyenletét a derékszögű, a henger- és a térbeli polárkoordináta rendszerben (számoljunk utána!):

Felület	(x,y,z)	(r,φ,m)	(r,φ,ϑ)
Gömb	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$r^2+m^2=a^2$	$r^2=a^2$
Henger	$x^2+y^2=a^2$	$r=a$	$r\sin\vartheta=a$
Kúp	$x^2+y^2=a^2z^2$	$r=am$	$\mathrm{tg}^2\,\vartheta=a^2$
Paraboloid	$x^2+y^2=az$	$r^2=am$	$r=a\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$

Feladatok

64.• Legyen f folytonos a polársík $r = r_1$, $r = r_2$, $\varphi = \varphi_1$ és $\varphi = \varphi_2$ görbéi által határolt V tartományán. Osszuk fel V-t Δr illetve $\Delta\varphi$ lépésközökkel az ábra szerint, a reprezentáns a V_n résztartományban legyen az a $P_n(r_n, \varphi_n)$ pont, mely a középvonalak metszéspontja. Mutassuk meg, hogy az integrálközelítő összegre fennáll az alábbi összefüggés
$\sum_n f(P_n)\Delta v_n = \sum_n f(r_n, \varphi_n) r_n \Delta r \Delta\varphi$
ami szemlélteti az



$$\iint_V f(x,y)\,dx\,dy = \iint_V f(r,\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

összefüggést.

Polárkoordináták bevezetésével számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat:

65.• $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, **66.** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\,dy$,

67. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, **68.** $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 25} xy\,dv$,

69. $\displaystyle\iint_V x^2\,dv$, ahol V az $r = 4\sin\varphi$ egyenletű körrel határolt tartomány,

70. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$, **71.**• $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$.

Alkalmasan választott új változók bevezetésével számítsuk ki az alábbi V tartományok térfogatát:

72. V a $z = 4 + x + 2y$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ felületek által határolt tartomány,

73. V az $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $z = 0$, $z^2 = x^2 + y^2$ felületek által határolt, és a felső térfélbe eső tartomány,

74. $V = \{(x,y,z);\ z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \ge 1,\ z > 0\}$,

75.▹ V a $z = x + y$, $x^2 + y^2 = x + y$ felületek által határolt tartomány,

76.▹ $V = \{(x,y,z);\ 0 \le z \le 1 - 9x^2 - 4y^2\}$.

77.▹ Számítsuk ki az $xy = a$, $xy = b$ hiperbolák, és az $y^2 = px$, $y^2 = qx$ parabolák által határolt tartomány területét, ahol $0 < a < b$, $0 < p < q$.

78.▹ Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = px$, $y = qx$ egyenesek, és az $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$ görbék által határolt tartományon $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

79.$^{\triangleright}$ Számítsuk ki az $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ egyenletű görbe és az x-tengely által határolt tartomány területét.

80.$^{\triangleright}$ Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^a \int_0^{a-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^a f(u-uv, uv)u\,du\,dv,$$

ha $u = x+y$, $v = \dfrac{y}{x+y}$.

Hengerkoordináták bevezetésével számítsuk ki az alábbi V tartományok térfogatát, de az integrált írjuk fel a Descartes-féle koordinátarendszerben is:

81. V a $z=2$, $z=0$, $x^2+y^2=1$ felületek által határolt tartomány,

82. V a $z=x^2+y^2$, $z=27-2x^2-2y^2$ felületek által határolt tartomány,

83.$^{\triangleright}$ $V = \{\,(x,y,z); x^2+y^2 \le az,\ x^2+y^2+z^2 \le 2az\,\}$,

84. V az $m=r$, $m=1$, $m=2$ felületek által határolt tartomány, ahol a határoló felületek egyenletei az (r,φ,m) hengerkoordinátarendszerben vannak megadva.

85. Hengerkoordinátákra térve számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx.$$

86. Hengerkoordináták felhasználásával számítsuk ki az $\int_V f$ integrált, ahol

$$f(x,y,z) = z^2,\ V = \{\,(x,y,z); x^2+y^2 \ge a^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 4a^2\,\}.$$

Módosított hengerkoordinátákra térve számítsuk ki az alábbi V tartományok térfogatát:

87. V az $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ felület által határolt tartomány,

88.$^{\triangleright}$ V az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^3} = 1$ és a $z+c=0$ felületek által határolt tartomány,

89.$^{\bullet}$ V az $y^2+z^2=x$ és az $y=x$ felületek által határolt tartomány.

Módosított hengerkoordinátákkal számítsuk ki az alábbi integrálokat:

90.$^{\triangleright}$ $\displaystyle\iiint_V 2ye^{\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}}\,dv, \qquad V = \{\,(x,y); \frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9} \le 1,\ 0 \le y \le 1\,\},$

91.$^{\triangleright}$ $\displaystyle\iiint_V \frac{x}{\sqrt{\frac{y^2}{4}+z^2}}\,dv, \qquad V = \{\,(x,y); \frac{y^2}{4}+z^2 \le (x-1)^2,\ 0 \le x \le 1\,\}.$

92.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg annak a testnek a tömegközéppontját, melyet a $z = 1 - x^2 - y^2$ és a $z = x^2+y^2$ paraboloidok határolnak, és tömegeloszlásának sűrűségfüggvénye $\delta(x,y,z) = 2-z$.

93.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg a

$$V = \{\,(x,y,z) : (\frac{z}{c}-1)^2 \ge \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ 0 \le z \le c\,\}$$

térrészt betöltő homogén test tömegközéppontjának koordinátáit.

Térbeli polárkoordinátákra áttérve számítsuk ki az alább megadott V tartományok térfogatát:

94. V az R-sugarú origó középpontú gömb,

95. $V = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2az \}$,

96. V az $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ felület által határolt tartomány.

Térbeli polárkoordinátákra áttérve számítsuk ki az alábbi hármas integrálokat a megadott V tartományon:

97. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dv$, V az $x^2 + y^2 + z^2 = z$ felülettel határolt tartomány,

98. $\iiint_V \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dv$,

$$V = \{ (x,y,z) : \sqrt{3x^2 + 3y^2} \le z,\ x^2 + y^2 + z^2 \ge 9,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 81 \}.$$

99.$^\triangleright$ Számítsuk ki az $x^2+y^2+z^2 = 9$, $z > 0$ félgömb alakú test tömegközéppontját, ha a tömegeloszlásának sűrűségfüggvénye egyenlő a pontjainak a z-tengelytől való távolságával.

Módosított térbeli polárkoordináták bevezetésével számítsuk ki az alábbi egyenletekkel határolt tartományok térfogatát:

100.$^\triangleright$ $(x^2 + y^2 + z^2)^n = x^{2n-1}$, **101.**$^\triangleright$ $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \right)^2 = \dfrac{x}{h}$.

102.$^\triangleright$ Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű homogén ellipszoid xy-sík feletti részének tömegközéppontját (súlypontját).

Új változók bevezetésével határozzuk meg az alábbi felületek által határolt tartományok térfogatát:

103.$^\triangleright$ $-x + 2y + 2z = \pm a,\ 2x - y + 2z = \pm b,\ 2x + 2y - z = \pm c$,

104.$^\triangleright$ $(-x + 2y + 2z)^2 + (2x - y + 2z)^2 + (2x + 2y - z)^2 = 1$,

105.$^\triangleright$ $(2x - y + z)^2 + (3x + 2y - 5z)^2 = 1,\ x + 3y - 2z = \pm a$.

Vegyes feladatok

Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét:

106. $\int_1^e \int_0^{\ln x} y\,dy\,dx$,

107. $\int_1^e \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{y}} \cos(x - \ln x)\,dx\,dy$,

108. $\int_{-15}^{13} \int_1^e \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} z \ln^2 x\,dz\,dx\,dy$.

109.* Számítsuk ki az $x = 6 - y^2 - 7z^2$ és az $x = 5y^2 + 5z^2$ egyenletű paraboloidok által határolt test térfogatát integráltranszformációval és anélkül.

110.* Számítsuk ki az alábbi kettősintegrált a megadott tartományon integráltranszformációval és anélkül:

$$\iint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dv, \quad V = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}.$$

111.* Számítsuk ki az alábbi felületek által határolt test térfogatát kettős vagy hármas integrállal, integráltranszformációval, vagy anélkül:

$$x + y + z = a,\ x^2 + y^2 = b^2,\ z = 0 \quad (a > \sqrt{2}b).$$

112.* Számítsuk ki az alábbi felületek által határolt test térfogatát kettős vagy hármas integrállal, integráltranszformációval, vagy anélkül:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = \frac{b}{a}x,\ y = 0,\ z = 0,\ x > 0.$$

A polár-, a henger- vagy a térbeli polárkoordináták bevezetésével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

113. $\iint_V \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dv, \quad V = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x = 0, y = 0\}$,

114. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$ felület által határolt test térfogatát,

115. $\iint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv, \quad V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \ge a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le b^2,\ a < b\}$,

116. $\iiint_V z\,dv, \quad V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \le z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2az\}$.

Oldjuk meg az alábbi feladatokat térbeli polárkoordinátákkal és henger- vagy síkbeli polárkoordinátákkal egyaránt.

117.* $\iiint_V z\,dv, \quad V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1;\ x, y, z \ge 0\}$,

118.$^{\triangleright}$ $\iiint_V dv, \quad V = \{x^2+y^2 \le z^2;\ x^2+y^2+z^2 \le a^2\},$

119.$^{\triangleright}$ $\iiint_V dv, \quad V: \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1.$

120.$^{\triangleright}$ Számítsuk ki a $2R$ sugarú $x^2+y^2+z^2 \le 4R^2$ egyenletű gömb és az R sugarú $(x-R)^2+y^2 \le R^2$ egyenlettel megadott henger közös részének, az u.n. **Viviani féle testnek** a térfogatát.

121.$^{\triangleright}$ Határolják a V testet az $r=r_1$, $r=r_2$, $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, $\vartheta=\vartheta_1$, $\vartheta=\vartheta_2$ felületek. Mutassuk meg, hogy e test Δv térfogatához létezik a V testnek olyan (R,φ,ϑ) pontja, melyre

$$\Delta v = R^2 \sin\vartheta \Delta\varphi \Delta\vartheta,$$

ahol $\Delta r = r_2 - r_1$, $\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1$, $\Delta\vartheta = \vartheta_2-\vartheta_1$.

Integráltranszformáció segítségével számítsuk ki a megadott f függvény integrálját a V tartományon:

122.$^{\triangleright}$ $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1+(\frac{x-a}{a})^2+(\frac{y-b}{b})^2},$

V az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ felületekkel határolt tartomány,

123.$^{\triangleright}$ $f(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}}}, \quad V = \left\{(x,y,z); x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \le 1\right\},$

124.$^{\triangleright}$ $f(x,y) = x(\ln x+1)$; V az $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $y=\ln x$, $y=3\ln x$ görbékkel határolt tartomány, (használjuk az $xy=u$, $x\ln x = v$ helyettesítést),

125. $f(x,y) = x(x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)$; V az $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$, $y=p\operatorname{ch} x$, $y=q\operatorname{ch} x$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$ görbékkel határolt tartomány, (használjuk az $xy=u$, $x\operatorname{ch} x = v$ helyettesítést),

126.$^{\triangleright}$ $f(x,y) = \left(\operatorname{sh}\dfrac{y}{1+x}+\dfrac{xy}{1+x}\right)\dfrac{y}{(1+x)^2}\,dy\,dx$, V az $y=0$, $x=1$, $y=a(1+x)$ $(a>0)$ görbékkel határolt tartomány.

127.$^{\triangleright}$ Számítsuk ki a megadott felületek által határolt tartomány térfogatát:

$$\begin{array}{lll} x+y+z=a & x+y=z & y=x \\ x+y+z=2a & x+y=2z & y=3x. \end{array}$$

128.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg az $x^2+y^2+z^2=2$, $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=0$ felületek által határolt, a felső térfélbe eső homogén test súlypontját.

Ha valamely V testen a tömegeloszlás sűrűségfüggvénye $\varrho(x,y,z)$, akkor a koordinátasíkokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait az

$$I_{xy} = \iiint_V \varrho(x,y,z)z^2\,dv,\ I_{yz} = \iiint_V \varrho(x,y,z)x^2\,dv,\ I_{zx} = \iiint_V \varrho(x,y,z)y^2\,dv$$

integrálok adják meg. Számítsuk ki az alábbi felületekkel határolt testek koordinátasíkokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait, ha $\varrho=1$, $a,b,c>0$.

129. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,$

130. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

131.▷ Ha valamely V testen a tömegeloszlás sűrűségfüggvénye $\varrho(x, y, z)$, akkor a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait az

$$I_x = \iiint_V \varrho(x, y, z)(y^2 + z^2)\, dv, \; I_y = \iiint_V \varrho(x, y, z)(x^2 + z^2)\, dv,$$

$$I_z = \iiint_V \varrho(x, y, z)(x^2 + y^2)\, dv$$

integrálok adják meg. Számítsuk ki az $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^5 z$ felülettel határolt homogén test z-tengelyre vonatkozó I_z tehetetlenségi nyomatékát.

17. fejezet

Differenciálgeometria

Vektor-skalárfüggvények

D 17.1 Az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya valós számokból, értékkészlete vektorokból áll, **vektor-skalárfüggvénynek** nevezzük. Megjegyezzük, hogy kizárólag a háromdimenziós vektortér elemeivel foglalkozunk, azaz az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvényt az

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t) \quad \text{vagy az} \quad \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad (t \in \mathbf{R})$$

alakban írjuk. Az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvényeket az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvény **koordinátafüggvényeinek** nevezzük.

D 17.2 Az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvényről akkor mondjuk, hogy a t_0 helyen **folytonos**, ha $\mathbf{r}(t_0)$ és $\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$ létezik, továbbá $\mathbf{r}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$.

T 17.3 $\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\lim_{t\to t_0} x(t) + \mathbf{j}\lim_{t\to t_0} y(t) + \mathbf{k}\lim_{t\to t_0} z(t)$, ha a határértékek léteznek.

D 17.4 Az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvény t_0 pontbeli **deriváltvektorán** a

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t=t_0} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0+h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$

határértéket értjük, ha ez létezik.

T 17.5 $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}\dot{x}(t) + \mathbf{j}\dot{y}(t) + \mathbf{k}\dot{z}(t)$ minden olyan t pontban, ahol a deriváltvektor létezik.

D 17.6 Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektoregyenlettel jellemzett térgörbének a t_0 paraméterértékű ponthoz (vagy egyszerűen a t_0 paraméterértékhez) tartozó **érintővektorán** az $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ vektort értjük, ha ez létezik és nem $\mathbf{0}$. (Az érintő vektoregyenlete ebben az esetben $\mathbf{p} = \mathbf{r}(t_0) + u\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ $(u \in \mathbf{R})$. Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektoregyenlet általában egy térgörbe paraméteres vektoregyenlete, és minden térgörbe megadható egy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ paraméteres vektoregyenlettel. Úgy is mondjuk, hogy a térgörbét az $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénnyel adjuk meg.)

Feladatok

Vizsgáljuk meg a megadott t_0 helyen az alábbi $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvényeket határérték és folytonosság szempontjából:

1. $\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{t^2-9}{t-3}\mathbf{j} - t\mathbf{k}$; $t_0 = 3$, **2.** $te^t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{(t-1)^2}\mathbf{k}$; $t_0 = 1$,

3. $\mathbf{i}t \sin\frac{1}{t} + \mathbf{j}\frac{\sin t}{t} + \mathbf{k}t^2$; $t_0 = 0$, **4.** $3t\mathbf{i} + e^{\frac{1}{t-1}}\mathbf{j} + (1-t^2)\mathbf{k}$; $t_0 = 2$,

5. $\left[\frac{t^2-1}{2t^2-t-1}, \frac{\sin 5t}{t}, \frac{\operatorname{tg} t}{t}\right]$; $t_0 = 0$, **6.** $\left[t \operatorname{ctg} 3t, \frac{\operatorname{tg} t - \sin t}{\sin^3 t}, \frac{\operatorname{tg} t}{t}\right]$; $t_0 = 0$,

7.* $\frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^2}\mathbf{i} + \frac{\operatorname{tg} t - t}{t - \sin t}\mathbf{j} + \frac{t \operatorname{ctg} t - 1}{t^2}\mathbf{k}$; $t_0 = 0$,

8.▷ $\mathbf{i}t^p \ln t + \mathbf{j}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{t^{-2}} + \mathbf{k}(\operatorname{ctg} t)^{\frac{1}{\ln t}}$, ahol $p > 0$ konstans; $t_0 = 0$,

9. $\frac{t^3-3t+2}{t^4-4t+3}\mathbf{i} + \frac{t^4-3t+2}{t^5-4t+3}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}\mathbf{k}$; $t_0 = 1$,

10. $\frac{\ln(1+t)}{3^t-1}\mathbf{i} + \frac{e^t - e^{-t}}{\sin t}\mathbf{j} + \operatorname{sgn} t\mathbf{k}$; $t_0 = 0$,

11.▷ $(-1)^{\operatorname{Ent}|\sin t|}\mathbf{i} + \operatorname{sgn}|\operatorname{ctg} t - 1|\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $t_0 = n\frac{\pi}{4}$ $(n \in \mathbf{Z})$,

12.* $\frac{t^3+t^2-t-1}{t-1}\mathbf{i} + \frac{t-1}{\ln t}\mathbf{j} + (-1)^{\operatorname{Ent} t}\mathbf{k}$; $t_0 \in \mathbf{N}^+$.

Differenciáljuk a következő $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvényeket:

13. $\mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}e^{-t}$, **14.** $\mathbf{i}\sin^2 t + \mathbf{j}\cos^2 t$,

15.• $\mathbf{i}\sin \ln^2 t + \mathbf{j}\frac{2}{t^2+1} + \mathbf{k}\operatorname{arctg}\sqrt{t}$, **16.** $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\ln 3^t$,

17. $\mathbf{i}\arcsin e^{-t} + \mathbf{j}\operatorname{ch} t^2 + \mathbf{k}\operatorname{sh}^2 t$, **18.** $\mathbf{i}\operatorname{arsh} t^2 + \mathbf{j}\operatorname{th}\ln t + \mathbf{k}\operatorname{cth} t$,

19. $(\mathbf{j}\sin t - \mathbf{k}\cos t) \times (\mathbf{j}\sin 2t + \mathbf{k}\cos 2t)$,

20. $\left(-t^3\mathbf{i} + \sqrt[3]{t^4}\mathbf{j}\right) \times 3\left(-t^2\mathbf{i} + (t^4+1)\mathbf{k}\right)$.

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenletekkel megadott görbék síkgörbék, s írjuk fel a görbéket tartalmazó síkok egyenletét:

21.▷ $\mathbf{r} = 2t^2\mathbf{i} + (3t^2+t+1)\mathbf{j} + (2t-5)\mathbf{k}$, **22.** $\mathbf{r} = (3-t)\mathbf{i} + (t^2-4)\mathbf{j} + 2(t-1)\mathbf{k}$.

23. Bizonyítsuk be, hogy bármely egyváltozós valós f függvény esetén az $\mathbf{r}(t) = f(t)(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k})$ vektor-skalárfüggvénnyel megadott térgörbe az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletű körkúpra illeszkedik.

Bizonyítsuk be, hogy a következő vektor-skalárfüggvényekkel megadott térgörbék egy-egy olyan másodrendű felületen vannak, amelyek egyenlete $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ $(A, B, C, D \in \mathbf{R})$ alakú (**másodrendű felületen** olyan felületet értünk, amely térbeli derékszögű koordináta-rendszerben másodfokú egyenlettel jellemezhető):

24.• $\mathbf{r}(t) = [a\cos t, b\sin t, 1]$; $a, b \neq 0$, **25.** $\mathbf{r}(t) = [\sin t\cos t, \sin^2 t, \cos t]$,

26. $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + a(\cos t - \sin t)\mathbf{j} + f(t)\mathbf{k}$, ahol f tetszőleges valós függvény,

27. $\mathbf{r}(t) = \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j} + g(t)\mathbf{k}$, ahol g tetszőleges valós függvény,

28. $\mathbf{r}(t) = t\cos(3\ln t)\mathbf{i} + t\sin(3\ln t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$,

29. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin 2t + \mathbf{j}(1 - \cos 2t) + \mathbf{k}2\cos t$,

30. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\sin^2 t + \mathbf{j}b\sin t\cos t + \mathbf{k}c\cos t$; $a, b, c \neq 0$, 31.* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\sin\varphi(t)\cos t + \mathbf{j}a\sin\varphi(t)\sin t + \mathbf{k}a\cos\varphi(t)$, ahol $a \neq 0$ és φ tetszőleges valós függvény.

Írjuk fel a következő két-két felület metszésvonalának egy paraméteres vektoregyenletét:

32.* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2;\quad x + 2y = 0$, 33.▷ $x^2 + y^2 = z^2;\quad x + y + z = 1$.

34.* Az a és b sugarú körhengerek merőlegesen metszik egymást ($a < b$). A metszésvonalként adódó két zárt görbét együttesen **bicilindrikus vonalnak** nevezzük. Helyezzük a két hengert térbeli derékszögű koordináta-rendszerbe úgy, hogy az a sugarú henger tengelye az y-tengely, a b sugarúé az x-tengely legyen. Írjuk fel a bicilindrikus vonal egyenletrendszerét és egy paraméteres vektoregyenletét. Milyen görbék adódnak $a = b$ esetén?

Határozzuk meg az alábbi vektor-skalárfüggvényekkel megadott térgörbék t_0 paraméterű pontjához tartozó érintő egy vektoregyenletét:

35.* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\dfrac{1}{1-t} + \mathbf{j}\ln(1+t^2) + \mathbf{k}e^{-t};\quad t_0 = 2$,

36. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{t+1}{t}\mathbf{j} + \dfrac{t}{t+1}\mathbf{k};\quad t_0 = 1$,

37. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}\dfrac{1}{\sin t};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

38. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos^2 t + \mathbf{j}\sin^2 t + \mathbf{k}t^2;\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

39. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\,\mathrm{ch}\,t + \mathbf{j}\,\mathrm{sh}\,t + \mathbf{k},\quad t_0 = 0$,

40. $\mathbf{r}(t) = e^{at}(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k});\quad a \in \mathbf{R},\quad t_0 = 0$,

41. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t^4}{4}\mathbf{i} + \dfrac{t^3}{3}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k};\quad t_0 = -2$,

42. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}3^t + \mathbf{j}t\ln 3 + \mathbf{k}\sqrt{t^2+1};\quad t_0 = \dfrac{1}{2}$,

43. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\dfrac{1}{\cos t} + \mathbf{j}\,\mathrm{tg}\,t + \mathbf{k}at;\quad a \in \mathbf{R},\quad t_0 = \dfrac{\pi}{3}$,

44.* $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t^3 - 3t^2 + 3t)\mathbf{j} + ((t-1)^4 + 2)\mathbf{k};\quad t_0 = 1$,

45.* $\mathbf{r}(t) = (t^3 + 3)\mathbf{i} + (2t^2 - 1)\mathbf{j} + (t^{\frac{7}{3}} + t^2 - 3)\mathbf{k};\quad t_0 = 0$,

46.* $\mathbf{r}(t) = \left(t\sqrt{t} - \dfrac{3}{2}t\right)\mathbf{i} + \cos(t-1)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k};\quad t_0 = 1$.

A következő feladatokban a térgörbét két felület metszésvonalaként adjuk meg. Írjuk fel a metszésvonal adott P_0 pontjához tartozó érintő egy vektoregyenletét vagy egy paraméteres egyenletredszerét.

47.* $x^2 + y^2 = 5,\quad y^2 + z^2 = 8;\quad P_0(1,2,2)$,

48.* $x^2 + y^2 + z^2 = 3,\quad x - y + 2z = 2;\quad P_0(1,1,1)$,

49. $y = x^2,\quad z = y^2;\quad P_0(2,4,16)$,

50.* $z^2 + xz - 2y = 0,\quad 3z^2 - xz - x = 0;\quad P_0(0,0,0)$,

51. $z = \dfrac{2}{xy},\quad z = x^2 + y^2;\quad P_0(1,1,2)$,

52. $z = x^2 + y^2, \quad x + y + z = 12; \quad P_0(2, 2, 8),$

53. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47, \quad x^2 + 2y^2 = z; \quad P_0(-2, 1, 6).$

Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénnyel megadott térgörbén azokat a P pontokat, amelyekhez az $\mathcal{S}$ síkkal párhuzamos érintő tartozik (**54** – **58**. feladatok):

54.• $\mathbf{r}(t) = -\mathbf{i}\ln t + t\mathbf{j} + \left(\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{3t^2}{2}\right)\mathbf{k}; \quad \mathcal{S} : x + 3y + z = 0,$

55.▷ $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t^5}{5}\mathbf{i} + \dfrac{t^4}{4}\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{3}\mathbf{k}; \quad \mathcal{S} : x + 3y + 2z = 0,$

56. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad \mathcal{S} : x = z,$

57.* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t\cos\left(\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) + \mathbf{j}a\cos t\sin\left(\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) + \mathbf{k}a\sin t,$
$a \neq 0; \quad \mathcal{S}$: az xy koordinátasík,

58. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}b\sin t + \mathbf{k}ct, \quad a, b, c \neq 0; \quad \mathcal{S} : y = 0.$

59.• Határozzuk meg az $\mathbf{r} = \frac{4}{3}t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ egyenletű térgörbén azokat a pontokat, ahol az érintő 30°-os szöget zár be az $x = y = z$ egyenletrendszerű egyenessel.

60. Írjuk fel az

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a\sin\frac{t}{2} \quad (a \neq 0)$$

egyenletrendszerrel megadott térgörbe $t = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó érintőjének egy paraméteres egyenletrendszerét. Mekkora szöget zár be az érintő a z tengellyel?

61.▷ Az $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + 9t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}4\sqrt{t^3}$ egyenletű térgörbén adjuk meg mindazokat a pontokat, amelyekhez tartozó érintő 45°-os szöget zár be az $x + y = 0$ egyenletű síkkal. Állapítsuk meg, hogy a görbe érintőinek az xy koordinátasíkkal való metszéspontjai milyen görbét írnak le.

62. Számítsuk ki az $\mathbf{r} = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + \left(4\sin\frac{1}{2}t\right)\mathbf{k}$ egyenletű térgörbe érintői és a koordinátatengelyek által alkotott szögek koszinuszait.

Határozzuk meg, hogy az alábbi vektor-skalárfüggvényekkel megadott térgörbék érintőinek az xy koordinátasíkkal való metszéspontjai milyen görbét írnak le (**63** – **65**. feladatok):

63.• $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt; \quad a, b \neq 0,$

64. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t\sin t + \mathbf{k}e^t, \qquad$ **65.▷** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$

66.• Határozzuk meg annak az egyenesnek egy paraméteres egyenletrendszerét, amely az $y = 1$ egyenletű síkban van, és a $P(-3, 1, 25)$ pontban érinti a $z = x^2 + 16y^2$ egyenletű paraboloid és a sík metszésvonalát.

67.▷ Határozzuk meg az $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}2\sin t + \mathbf{k}3t$ egyenletű térgörbén azokat a pontokat, amelyekben az érintő párhuzamos az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körhenger alkotóival.

68.ᴾ Határozzuk meg az $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}2\sin t + \mathbf{k}t$ egyenletű térgörbén azokat a pontokat, amelyekben az érintő párhuzamos az $x^2+y^2 = z^2$ egyenletű körkúp alkotóival.

69.ᴾ Az $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ egyenletű körhengerre írható $2\pi c$ $(c \in \mathbf{R})$ menetemelkedésű csavarvonal egy paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}ct$$

(l. Szász G.: Matematika II., 118. o.). Bizonyítsuk be, hogy ez a hengeres csavarvonal a henger minden alkotóját ugyanakkora szögben metszi. Hogyan válasszuk meg a c értékét, hogy ez a szög $\frac{\pi}{6}$ legyen?

70.ᴾ Bizonyítsuk be, hogy az

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}e^{at}\cos t + \mathbf{j}e^{at}\sin t + \mathbf{k}e^{at} \quad (a \in \mathbf{R}, \text{ konstans})$$

egyenletű kúpos csavarvonal annak a kúpnak, amelyre illeszkedik, minden alkotóját ugyanakkora szögben metszi (l. a **23.** feladatot). Milyen a érték mellett lesz ez a szög $\frac{\pi}{3}$?

71.ᴾ Határozzuk meg, hogy az

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a(\sin t + \cos t) + \mathbf{j}a(\sin t - \cos t) + \mathbf{k}be^{-t}$$

egyenletű térgörbe érintőegyeneseinek az xy koordinátasíkkal alkotott metszéspontjai milyen görbét írnak le, ha a és b zérustól különböző adott valós számok (l. a **26.** feladatot).

Térgörbe ívhossza, ívhosszparaméter

T 17.7 Ha az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénynek az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos deriváltja van, akkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbe $[t_1,t_2](\subseteq [a,b])$ intervallumhoz tartozó ívének s hosszúsága az

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt$$

képlettel számítható ki.

D 17.8 Egy $\mathcal{G}$ térgörbe megadását egy $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénnyel **ívhosszparaméterezésnek** vagy **természetes paraméterezésnek** nevezzük, ha a görbe bármely t_1 és t_2 $(t_1 \le t_2)$ paraméterű pontja közötti ív hossza $t_2 - t_1$. Ebben az esetben a t paramétert **ívhosszparaméternek** vagy **természetes paraméternek** nevezzük.

P 17.9 **Áttérés ívhosszparaméterre**: Legyen $t_0 \in [a,b]$, és tekintsük a változó felső határú integrállal értelmezett

$$t \mapsto s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\,d\tau \quad (t \in [a,b])$$

függvényt. Ha az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ az $[a,b]$ zárt intervallumon legfeljebb véges számú pontban veszi fel a 0 értéket, akkor az $s(t)$ fügvény invertálható ezen az intervallumon. A térgörbe $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletébe t helyébe írjuk t-nek s-sel kifejezett értékét, a $t(s)$-et. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletből az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{v}(s)$ egyenletet kapjuk, amelyben $\mathbf{v}$ jelöli az s és $\mathbf{r}$ közötti közvetlen függvénykapcsolatot, az s pedig a $\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}(t_0)$ helyvektorú és a $\mathbf{v}(s) = \mathbf{r}(t)$ helyvektorú pont közötti görbeív előjeles távolsága. (Ha lehetséges, akkor általában a $t_0 = 0$ értéket választjuk.)

T 17.10 Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbe minden t paraméterértékéhez tartozó érintővektora akkor és csak akkor egységvektor, ha t ívhosszparaméter. (Ha t és s egy térgörbe két ívhosszparamétere, akkor $t = s + c$ vagy $t = -s + c$, ahol $c \in \mathbf{R}$ konstans.)

T 17.11 Az ívhosszparaméteres $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ egyenlettel megadott térgörbe s_0 paraméterű pontjában az $\mathbf{r}''(s_0)$ vektor merőleges az $\mathbf{r}'(s_0)$ vektorra, ha létezik. (Az ívhosszparamétert általában s-sel, az ívhossz szerinti deriváltat felső vesszővel jelöljük.)

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi vektor-skalárfüggvényekkel megadott térgörbék ívhosszát az adott paraméter-intervallumban:

72. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t\sin t + \mathbf{k}e^t;\quad 0 \le t \le 2,$

73. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{j} + \dfrac{2\sqrt{2t^3}}{3}\mathbf{k};\quad -2 \le t \le 0,$

74. $\mathbf{r}(t) = t^4\mathbf{i} + \dfrac{4}{3}t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};\quad 0 \le t \le 2,$

75. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\sqrt{t^3} + \mathbf{k}t;\quad 0 \le t \le 3,$

76. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\dfrac{t^3}{3} + \mathbf{j}\dfrac{6\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}} + \mathbf{k}\dfrac{9}{2}t^2;\quad -1 \le t \le 1,$

77. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4t - t^2}\mathbf{j} + 2\ln\left(1 - \dfrac{t}{4}\right)\mathbf{k};\quad 0 \le t \le 1,$

78. $\mathbf{r}(t) = at\mathbf{i} + \sqrt{3ab}t^2\mathbf{j} + 2bt^3\mathbf{k};\quad a, b > 0,\quad -1 \le t \le 1,$

79. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos\ln t + \mathbf{j}\sin\ln t + \mathbf{k}t;\quad 1 \le t \le \sqrt{3},$

80. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(\cos t + t\sin t) + \mathbf{j}(\sin t - t\cos t) + \mathbf{k}t;\quad 0 \le t \le 1,$

81. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\,\mathrm{ch}\,t + \mathbf{j}\,\mathrm{sh}\,t + \mathbf{k}t;\quad 0 \le t \le \ln 3,$

82. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(\mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t) + \mathbf{j}(\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t) + \mathbf{k}t\sqrt{2};\quad 0 \le t \le \ln 2,$

83. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\dfrac{\cos t}{\mathrm{ch}\,t} + \mathbf{j}\dfrac{\sin t}{\mathrm{ch}\,t} + \mathbf{k}(t - \mathrm{th}\,t);\quad 0 \le t \le 10,$

84. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin^2 t + \mathbf{j}\cos^2 t + \mathbf{k};\quad 0 \le t \le e,$

85. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}2\arcsin\dfrac{t}{2} + \mathbf{k}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2+t}{2-t};\quad 0 \le t \le 1,$

86. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos^3 t + \mathbf{j}\sin^3 t + \mathbf{k}\cos 2t;\quad 0 \le t \le 2\pi.$

A következő vektor-skalárfüggvényekkel adott térgörbéknél térjünk át ívhosszparaméterre:

87. $\mathbf{r}(t) = \left[e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\right],$

88. $\mathbf{r}(t) = \left[t^2, \cos t^2, \sin t^2\right],$

89. $\mathbf{r}(t) = \left[t\cos t, t\sin t, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\right],$

90. $\mathbf{r}(t) = [t, 2t-1, 3(t+1)],$

91.* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(t - \sin t) + \mathbf{j}(1 - \cos t); \quad t \in [0, 2\pi]$,

92. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t \cos \ln t + \mathbf{j}t \sin \ln t + \mathbf{k}t$, ha $t > 0$ és $\mathbf{r}(0) = \lim_{t \to +0} \mathbf{r}(t)$,

93. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{k}\sqrt{t^3}$, **94.** $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\,\mathrm{ch}\,t$,

95. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(4t - 1) + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}\frac{8}{3}\sqrt{t^3}$,

96. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\,\mathrm{ch}\,t + \mathbf{j}a\,\mathrm{sh}\,t + \mathbf{k}at$; a pozitív konstans.

A térgörbe kisérő triédere

D 17.12 Ha az $\mathbf{r}$ vektor-skalárfüggvénynek az s_0 helyen van második deriváltvektora és ez nem $\mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ívhosszparaméteres vektoregyenletű térgörbe s_0 paraméterű P_0 pontjához tartozó **érintő egységvektoron** a $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{r}'(s_0)$, **főnormális egységvektoron** az $\mathbf{n}(s_0) = \frac{\mathbf{r}''(s_0)}{|\mathbf{r}''(s_0)|}$, **binormális egységvektoron** a $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)$ egységvektort értjük. Az érintő, a főnormális és a binormális egységvektorokból álló vektorhármast a térgörbe P_0 pontjához vagy az s_0 paraméterértékhez tartozó **kísérő triédernek** nevezzük. A P_0 ponton átmenő és az érintő, a főnormális, illetve a binormális egységvektorokkal egyező állású egyeneseket a térgörbe P_0 pontbeli **érintőjének**, **főnormálisának**, illetve **binormálisának** mondjuk. Az érintő és a főnormális síkját **simulósíknak**, a főnormális és a binormális síkját **normálsíknak**, a binormális és az érintő síkját pedig **rektifikálósíknak** nevezzük.

T 17.13 Ha a térgörbét meghatározó $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektoregyenlet jobb oldalán lévő $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvény legalább kétszer differenciálható a t_0 valamely teljes környezetében és $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0)}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|}, \quad \mathbf{b}(t_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)|}, \quad \mathbf{n}(t_0) = \mathbf{b}(t_0) \times \mathbf{t}(t_0).$$

Feladatok

Mutassuk meg, hogy az alábbi egyenletekkel megadott térgörbék természetes paraméterezésűek. Határozzuk meg a térgörbék s_0 paraméterű pontjához tartozó kisérő triédert:

97.* $\mathbf{r} = \mathbf{i}\sin\frac{s}{3} + \mathbf{j}\cos\frac{s}{3} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{8}s}{3}; \quad s_0 = 0$,

98. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos\frac{s}{\sqrt{10}} + \mathbf{j}\sin\frac{s}{\sqrt{10}} + \mathbf{k}\frac{3s}{\sqrt{10}}; \quad s_0 = 0$,

99. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\frac{s}{\sqrt{3}}\cos\ln\frac{s}{\sqrt{3}} + \mathbf{j}\frac{s}{\sqrt{3}}\sin\ln\frac{s}{\sqrt{3}} + \mathbf{k}\frac{s}{\sqrt{3}}; \quad s_0 = \sqrt{3}$.

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott térgörbék t_0 paraméterű pontjához tartozó kisérő triédert:

100.* $\mathbf{r} = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k}; \quad t_0 = 1$,

101. $\mathbf{r} = (1+t^2)\mathbf{i} + \frac{2}{1+t^2}\mathbf{j} + (t-t^3)\mathbf{k}; \quad t_0 = 0,$

102. $\mathbf{r} = \mathbf{i}2\cos 2t + \mathbf{j}2\sin 2t + \mathbf{k}3t; \quad t_0 = \frac{\pi}{6},$

103. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\sin^2 t + \mathbf{j}\cos 2t - \frac{1}{\sin t}\mathbf{k}; \quad t_0 = \frac{\pi}{4},$

104. $\mathbf{r} = (t-\sin t)\mathbf{i} + (1-\cos t)\mathbf{j} + 4\sin\frac{t}{2}\mathbf{k}; \quad t_0 = \frac{2\pi}{3},$

105. $\mathbf{r} = \mathbf{i}(2t-\sin 2t) + \mathbf{j}\cos 2t + \mathbf{k}4\sin t; \quad t_0 = -\frac{5\pi}{4},$

106. $\mathbf{r} = \left(e^t - t\right)\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} - \left(2+e^{-t}\right)\mathbf{k}; \quad t_0 = 0,$

107. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,\mathrm{ch}\,t + \mathbf{j}\,\mathrm{sh}\,t + \frac{t^2+1}{2}\mathbf{k}; \quad t_0 = 1.$

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott térgörbék t_0 paraméterű pontjához tartozó érintő, binormális és főnormális egy vektoregyenletét vagy egyenletrendszerét, valamint a simulósík, a normálsík és a rektifikáló sík egyenletét (**108 – 113.** feladatok):

108.• $\mathbf{r} = \mathbf{i}(t+1) + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}(t^2-3); \quad t_0 = 1,$

109. $\mathbf{r} = \mathbf{i}(t^2+1) + \mathbf{j}\frac{2}{t^2} + \mathbf{k}t(1-t^2); \quad t_0 = 1,$

110. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,\mathrm{sh}\,t + \mathbf{j}\,\mathrm{ch}\,t + \mathbf{k}t; \quad t_0 = 0,$

111. $\mathbf{r} = \mathbf{i}e^t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}(e^{2t}-1); \quad t_0 = 0,$

112. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\ln(1+t^2) - \mathbf{j}\frac{1}{\sqrt{t-1}} + \mathbf{k}\sqrt{1+t^2}; \quad t_0 = 2,$

113. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos^2 t + \mathbf{j}\sin 2t - \mathbf{k}\frac{1}{\cos t}; \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$

114. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\sin^2 t + \mathbf{j}a\sin t\cos t + \mathbf{k}a\cos t$ $(a \neq 0)$ egyenletű görbe normálsíkjai áthaladnak az origón.

115.▸ Milyen t paraméterértékre párhuzamos az $\mathbf{r} = \mathbf{i}e^{2t} + \mathbf{j}2e^t + \mathbf{k}t$ egyenletű térgörbe simulósíkja az $5-x = 1-y = -2z$ egyenletrendszerű egyenessel?

116. Van-e olyan pontja az $\mathbf{r} = (t^3-2t^2+2t)\mathbf{i} + (t^2+t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2+t+1\right)\mathbf{k}$ egyenletű térgörbének, amelyben az érintő párhuzamos a $t=1$ paraméterű ponthoz tartozó simulósíkkal?

117.▸ Az $\mathbf{r} = \frac{2}{t}\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$ egyenletű térgörbe melyik pontjában párhuzamos a binormális az $x-y+8z+2=0$ egyenletű síkkal?

118. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ egyenletű térgörbe azon pontjait (ha vannak ilyenek), amelyekben $\mathbf{t} = \mathbf{i}$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$.

119. Határozzuk meg az $x^2+y^2 = z$ és $y = x$ egyenletekkel adott felületek metszésvonalának $P(a, a, 2a^2)$ $(a \neq 0)$ pontjában a rektifikáló sík egyenletét. Az a paraméter mely értékénél merőleges a rektifikáló sík az $x+y+z=0$ egyenletű síkra?

A következő feladatokban (**120 – 128.**) a térgörbét két felület metszésvonalaként adjuk meg. Határozzuk meg a térgörbe P_0 pontjához tartozó kisérő triédert:

120.* $x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2-4x=0;\quad P_0(3,\sqrt{3},2)$,
121. $x^2+y^2+z^2=3,\quad 2x+y=3;\quad P_0(1,1,1)$,
122. $2x^2+3yz-6y=0,\quad 3y^2-xz-3z=0;\quad P_0(0,0,0)$,
123.* $x^2-2xy+z^2-1=0,\quad x+2xy+2y^2-2z^2-6=0;\quad P_0(2,1,-1)$,
124. $x^2-y^2+z^2=1,\quad y^2-2x+z=0;\quad P_0(1,-1,1)$,
125. $xy=-1,\quad x^2+y^2-z^2=0;\quad P_0(-1,1,\sqrt{2})$,
126.* $x^2+y^2=2a^2,\quad xy=bz;\quad P_0(a,a,a^2b^{-1})\quad (b\neq 0)$,
127. $x^2+y^2=z,\quad x=y;\quad P_0(a,a,2a^2)$,
128.* $x^3-y^2=0,\quad x^2-z=0;\quad P_0(0,0,0)$.

129.* Az előző feladatban a két felület $\mathcal{G}$ metszésvonalának $P_0(0,0,0)$ pontjában létezik-e a kisérő triédernek határhelyzete, azaz
$\mathbf{t}(P_0)=\lim\limits_{P\to P_0}\mathbf{t}(P)$, $\mathbf{n}(P_0)=\lim\limits_{P\to P_0}\mathbf{n}(P)$, $\mathbf{b}(P_0)=\mathbf{t}(P_0)\times\mathbf{n}(P_0)$ $(P\in\mathcal{G})$?

Görbület és torzió

D 17.14 Legyenek P_0 és P a $\mathcal{G}$ térgörbe pontjai, továbbá legyen s a P_0P görbeív hossza, α pedig a $\mathcal{G}$ görbe P_0 és P pontbeli érintőjének szöge. Ha a $G(P_0)=\lim\limits_{P\to P_0}\frac{\alpha}{s}$ határérték létezik, akkor ezt a határértéket a $\mathcal{G}$ görbe P_0 pontbeli **görbületének**, a görbület reciprok értékét pedig **görbületi sugárnak** ($\rho(P_0)=\frac{1}{G(P_0)}$) nevezzük. Jelölje továbbá β a $\mathcal{G}$ görbe P_0 és P pontbeli simulósíkjának szögét. A $\lim\limits_{P\to P_0}\frac{\beta}{s}$ határértéket, ha létezik, a $\mathcal{G}$ görbe P_0 pontbeli **torziómértékének**, a $T(P_0)=\operatorname{sgn}\left(\mathbf{b}(P_0)\mathbf{b}'(P_0)\mathbf{t}(P_0)\right)\lim\limits_{P\to P_0}\frac{\beta}{s}$ valós számot pedig a görbe P_0 pontbeli **torziójának** nevezzük. Ha a $\mathcal{G}$ görbének a P_0 pontban pozitív, ill. negatív a torziója, akkor azt mondjuk,hogy a görbe a P_0 pontban **jobbcsavarodású**, ill. **balcsavarodású**. (Szemléletesen, a P_0 "közelében" növekvő paraméterértékhez tartozó $\mathbf{b}$ vektorok váltózása ("forgása") a $\mathbf{t}(t_0)$ irányával szembenézve pozitívnak, ill. negatívnak látszik.)

T 17.15 A $\mathcal{G}$ görbe akkor és csak akkor egyenes, ha minden pontjában zérus a görbület; $\mathcal{G}$ akkor és csak akkor síkgörbe, ha minden pontjában zérus a torzió.

T 17.16 Ha az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénynek a t_0 valamely teljes környezetében létezik a második deriváltja és $\dot{\mathbf{r}}(t_0)\neq\mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ vektoregyenletű térgörbe t_0 paraméterértékű pontjában létezik görbülete és

$$G(t_0)=\frac{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_0)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|^3}.$$

Ívhosszparaméteres megadás esetén: $G(s_0)=|\mathbf{r}''(s_0)|$.

T 17.17 Ha az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénynek a t_0 valamely teljes környezetében van harmadik deriváltja és $\dot{\mathbf{r}}(t_0)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_0)\neq\mathbf{0}$, akkor

$$T(t_0)=\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0)\ddot{\mathbf{r}}(t_0)\dddot{\mathbf{r}}(t_0)}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_0)|^2}.$$

Ívhosszparaméterezés esetén: ha $\mathbf{r}''(s_0) \neq \mathbf{0}$, akkor

$$T(s_0) = \frac{\mathbf{r}'(s_0)\mathbf{r}''(s_0)\mathbf{r}'''(s_0)}{|\mathbf{r}''(s_0)|^2}.$$

D 17.18 A $\mathcal{G}$ térgörbe P_0 pontbeli **simulóköre** a görbe három pontján átfektetett kör határhelyzete, midőn a három pont tart a P_0 ponthoz, feltéve, hogy e határhelyzet létezik. (Kimutatható, hogy ez a definíció az $y = f(x)$ alakú egyenlettel adott síkgörbékre ekvivalens a **T 9.25** tételben szereplő definícióval. A definícióból közvetlenül adódik, hogy a simulókör benne van a $\mathcal{G}$ görbe P_0 pontbeli simulósíkjában, P_0-ban közös az érintője a $\mathcal{G}$ görbével és középpontja a $\mathcal{G}$ görbe P_0 pontbeli főnormálisán van.)

T 17.19 Ha az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénynek t_0 valamely teljes környezetében létezik második deriváltja és $\dot{\mathbf{r}}(t_0)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbe t_0 paraméterű P_0 pontjában van simulóköre, továbbá ha K a simulókör középpontja, akkor

$$\overrightarrow{P_0K} = \frac{1}{G(t_0)}\mathbf{n}(t_0) = \rho(t_0)\mathbf{n}(t_0),$$

ahol $\mathbf{n}(t_0)$ a görbe P_0 pontbeli főnormális egységvektora.

D 17.20 A $\mathcal{G}$ térgörbe P_0 pontbeli **simulógömbje** a görbe négy pontján átfektetett gömb határhelyzete, midőn a négy pont a P_0 ponthoz tart, feltéve, hogy e határhelyzet létezik. (Közvetlenül a definícióból adódik, hogy a simulógömbből a simulósík metszi ki a simulókört, és a simulógömb középpontja a simulósíkra a simulókör középpontjából emelt merőleges egyenesen van, azaz illeszkedik a görbe P_0 pontbeli normálsíkjára.)

T 17.21 Ha az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalárfüggvénynek a t_0 valamely teljes környezetében van harmadik deriváltja és $\dot{\mathbf{r}}(t_0)\ddot{\mathbf{r}}(t_0)\dddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, akkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektoregyenletű térgörbe t_0 paraméterű P_0 pontjában van simulógömbje, továbbá ha L a simulógömb középpontja, akkor

$$\overrightarrow{P_0L} = \rho(t_0)\mathbf{n}(t_0) + \frac{\dot{\rho}(t_0)}{T(t_0)}\mathbf{b}(t_0),$$

ahol $\mathbf{n}(t_0)$ és $\mathbf{b}(t_0)$ a görbe P_0 pontbeli főnormális, ill. binormális egységvektora.

Feladatok

Számítsuk ki a következő egyenletekkel adott térgörbék görbületét és torzióját a t_0 paraméterű pontban, illetve a P_0 pontban (**130 – 134.** feladatok):

130.• $\mathbf{r} = (1-2t^2)\mathbf{i} + (t^3-2)\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}; \quad t_0 = -1,$

131. $\mathbf{r} = \mathbf{i}e^{-t} + \mathbf{j}t + \mathbf{k}e^t; \quad t_0 = 0,$

132. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos^2 t + \mathbf{j}\cos t\sin t + \mathbf{k}\sin t; \quad t_0 = \frac{\pi}{2},$

133.▷ $y^2 = x, \quad x^2 = z; \quad P_0(1,1,1),$

134. $x^2 - y^2 + z^2 = 0, \quad y^2 - 2x + z = -1; \quad P_0(1,-1,0).$

135.• Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}\cos t^2 + \mathbf{k}\sin t^2$ egyenletű görbe görbülete és torziója állandó és egyenlő egymással.

Adjuk meg azokat a pontokat, ahol az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbe görbületének és torziójának szélsőértéke van (**136 – 137.** feladatok):

136.$^{\triangleright}$ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t - \mathbf{k}t^2$, **137.** $\mathbf{r} = e^{-t}\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$.

138.$^{\bullet}$ Az $y = \ln x$ egyenletű görbe melyik pontjában van a görbületnek maximuma?

139.$^{\bullet}$ Bizonyítsuk be, hogy minden kör görbülete állandó, és egyenlő sugarának reciprokával.

140. Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ egyenletű ellipszis tengelypontjaiban a görbületet. (Az ellipszis egy paraméteres egyenletrendszere: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t < 2\pi$.)

141. Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ egyenletű hiperbola tengelypontjaiban a görbületet. (A hiperbola egy paraméteres egyenletrendszere: $x = \pm a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$.)

142. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola tengelypontjában a görbületet.

143.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = \dfrac{1+t}{1-t}\mathbf{i} + \dfrac{1}{1-t^2}\mathbf{j} + \dfrac{t}{1+t}\mathbf{k}$ egyenletű görbe síkgörbe.

144. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{i}\sin^2 t + \mathbf{j}\sin 2t + \mathbf{k}\cos^2 t$ $(0 \le t \le \pi)$ egyenletű görbe síkgörbe, és illeszkedik a $4x^2 - 4x + y^2 = 0$ egyenletű elliptikus hengerfelületre.

145. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \ln(t^2+1)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ egyenletű térgörbének azokat a pontjait, amelyekben a binormális párhuzamos az $x = 3z$ egyenletű síkkal, és adjuk meg ezekben a pontokban a görbületet.

Számítsuk ki a következő vektor-skalárfüggvényekkel adott térgörbék simulókörének sugarát és középpontját a t_0 paraméterű pontban:

146.$^{\triangleright}$ $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (2+t^2)\mathbf{k}$; $t_0 = 1$,

147. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}4\cos^2 t + \mathbf{j}2\sin 2t + \mathbf{k}\sin t$; $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

148. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t\sin t + \mathbf{k}e^t$; $t_0 = 0$.

Számítsuk ki az alábbi egyenletekkel adott felületek metszésvonalaként előálló térgörbe P_0 pontjához tartozó simulókör sugarát:

149. $x^2 = 2az$, $y = 2bxz$; $P_0(a, a^a b, \dfrac{a}{2})$ $(a \ne 0)$,

150. $x^2 = 3az$, $y = 6bxz$; $P_0(-1, -\dfrac{2b}{a}, \dfrac{1}{3a})$ $(a \ne 0)$.

Írjuk fel az alábbi vektor-skalárfüggvényekkel adott térgörbék pontjaihoz tartozó simulókörök középpontjait meghatározó $\mathbf{v}(t)$ vektor-skalárfüggvényt (**151 – 152.** feladatok):

151.* $\mathbf{r}(t) = [a\cos t, a\sin t, bt]$ $(a \ne 0)$, **152.*** $\mathbf{r}(t) = [\mathrm{ch}\,t, \mathrm{sh}\,t, t]$.

153.* Bizonyítsuk be, a $\rho = \frac{1}{G}$ képlet alapján, hogy ha az $y = f(x)$ függvény az x_0 helyen legalább kétszer differenciálható, akkor

$$\rho(x_0) = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

(l. Szász G.: Matematika I., 245. o.) Határozzuk meg ez alapján az $y = e^x$ függvény grafikonjának azon pontjait, ahol a simulókör sugarának szélsőértéke van.

154.* Határozzuk meg az $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$ egyenletekkel adott térgörbe $t = 0$ paraméterű pontjához tartozó simulógömbjének egyenletét. (L. **65.** és **118.** feladatokat!)

155.* Az $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t$ egyenletekkel adott térgörbe mely pontjában van a simulógömb sugarának szélsőértéke? Írjuk fel ebben a pontban a simulókör egy egyenletrendszerét és a simulógömb egy egyenletét.

Fizikai alkalmazások

A 17.22 Az anyagi pont mozgásának kinematikai leírása azt jelenti, hogy megadjuk a pont helyét, sebességét és gyorsulását az idő függvényében. A vektori leírásnál felveszünk a térben egy O pontot, az úgynevezett **vonatkoztatási pontot**, és a tér valamely P pontjában lévő tömegpont helyét az $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ helyvektor végpontjaként adjuk meg. Az anyagi pont a mozgás során "megszakítás nélkül" változtatja a helyét, az $\mathbf{r}$ vektor tehát a t idő folytonos függvénye. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ helyvektor végpontja a térben egy folytonos görbét, a **mozgás pályáját** írja le. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tehát a pályát meghatározó vektoregyenlet. Ha a mozgást valamilyen koordinátarendszerhez viszonyítjuk, akkor az anyagi pont helyét a P pont koordinátáival adjuk meg. Például derékszögű koordináta-rendszerben $(x(t), y(t), z(t))$ jellemzi a pont helyét. A pályát ekkor az

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

vektoregyenlet vagy az $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ egyenletrendszer írja le. A **sebességvektor**: $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, a **gyorsulásvektor** pedig: $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

A 17.23 Rögzítsünk az anyagi pont pályáján egy P_0 pontot (P_0-ként nagyon sokszor a $t_0 = 0$ időpillanathoz tartozó, azaz az $\mathbf{r}(0)$ helyvektorú pontot választják). A tetszőleges $t(> 0)$ paraméterű P pont és a P_0 pont közötti s ívhossz az anyagi pont t idő alatt megtett **útja** (amíg a P_0 pontból a P pontba jut). Nyilvánvaló, hogy $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathbf{r}}(u)|\, du$. Ha $t(s)$ jelöli az $s(t)$ függvény inverzét, akkor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(s)\dot{s}(t)$, azaz $\mathbf{v}(t) = \mathbf{t}(s(t))\dot{s}(t)$, ahol $\mathbf{t}(s(t))$ az $s(t)$ paraméterű pontban az érintő egységvektor. A $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \dot{s}(t) \quad (t \geq t_0)$ mennyiséget, azaz a $\mathbf{v}(t)$ sebesség nagyságát **pályamenti sebességnek** is szokás nevezni. Továbbá:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(s(t))\dot{s}(t)) = \frac{d\mathbf{r}'(s(t))}{dt}\dot{s}(t) + \mathbf{r}'(s(t))\ddot{s}(t) =$$

$$\mathbf{r}''(s(t))\dot{s}^2(t) + \mathbf{r}'(s(t))\ddot{s}(t) = \frac{\mathbf{r}''(s(t))}{|\mathbf{r}''(s(t))|}\dot{s}^2(t)|\mathbf{r}''(s(t))| + \mathbf{r}'(s(t))\ddot{s}(t),$$

tehát

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v^2(t)}{\rho(t)}\mathbf{n}(s(t)),$$

ha $|\mathbf{r}''(s(t))| \neq 0$, ahol $\rho(t)$ a t paraméterű P pontban a görbe simulókörének sugara (a görbület reciproka), $\mathbf{n}$ pedig a főnormális egységvektor. Az $a_t = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$-t **pályamenti gyorsulásnak**, az $a_n = \dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}$-t pedig **normális vagy centripetális gyorsulásnak** nevezzük. A gyorsulás nagysága:

$$a(t) = |\mathbf{a}(t)| = \sqrt{\dot{v}^2(t) + \frac{v^4(t)}{\rho^2(t)}}.$$

Ha $|\mathbf{r}''(s(t))| = 0$, akkor a mozgás **egyenesvonalú** (a görbület 0). Ebben az esetben $\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t))$, azaz a gyorsulás érintő irányú. A másik speciális eset az **egyenletes körmozgás**. Ekkor $s(t) = vt$ $(t_0 = 0)$, ezért $\ddot{s}(t) = 0$. Most tehát a gyorsulás érintő irányú összetevője zérus. Az egyenletes körmozgást végző anyagi pont gyorsulása a sugár irányában a kör középpontja felé mutat.

A 17.24 Legyen $\varphi(t)$ az a nemnegatív szög, amelyet az $\mathbf{r}(t_0)$ és $\mathbf{r}(t)$ vektorok bezárnak. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(t)$ az idő folytonos függvénye. Az $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ és az $\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$ mennyiségeket az anyagi pont t időpillanatbeli **szögsebességének**, illetve **szöggyorsulásának** nevezzük. **Szögsebességvektor**nak hívjuk az $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ irányú $\omega(t)$ nagyságú vektort. Belátható, hogy ha $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\mathbf{r}(t)|^2}.$$

(Ha $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$, akkor a szögsebesség zérus.)

Feladatok

Számítsuk ki az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenlettel leírt pályán mozgó anyagi pont $t = 0$ és $t = t_0$ időpillanatok között megtett útját, valamint a sebességvektort, a gyorsulásvektort, a pályamenti sebességet, a pályamenti gyorsulást és a centripetális gyorsulást a $t = t_0$ időpillanatban. Állítsuk elő a sebességvektort és a gyorsulásvektort az érintő és főnormális egységvektor lineáris kombinációjaként (**156 – 161.** feladatok):

156.$^{\triangleright}$ $\mathbf{r} = \mathbf{i}(t+3) + \mathbf{j}\dfrac{2t^3}{3} + \mathbf{k}(t^2+1)$; $t_0 = 2$,

157. $\mathbf{r} = \dfrac{t^4}{4}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{2}t^3}{3}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$; $t_0 = 1$,

158. $\mathbf{r} = \mathbf{i}A\cos t + \mathbf{j}A\sin t + \mathbf{k}ct$ $(A, c > 0)$; $t_0 = 2\pi$,

159. $\mathbf{r} = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\sqrt{4t - t^2} + \mathbf{k}2\ln(1 - \dfrac{t}{4})$; $t_0 = 2$,

160. $\mathbf{r} = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2$; $t_0 = 2$, **161.** $\mathbf{r} = \mathbf{i}t + \mathbf{j}2\sqrt{t^3}$; $t_0 = 1$.

162.* Vékony, homogén, $2a$ hosszúságú egyenes AB rúd A végével a vízszintes S síkra támaszkodik, és azzal α szöget zár be. A rúd a $t = 0$ időpontban a nehézségi erő hatására (0 kezdősebességgel) esni kezd. Esés közben a rúd A

végpontja elhanyagolható súrlódással mozog a vízszintes síkon. Milyen görbén mozog a B végpont? Határozzuk meg a B pont pályájának vektoregyenletét, mint az idő függvényét. Számítsuk ki a mozgó B pont tetszőleges t időpillanatbeli sebesség- és gyorsulásvektorát, pályamenti sebességét és gyorsulását. A vízszintes síkra való leesés pillanatához tartozó gyorsulásvektort állítsuk elő az érintő és a főnormális egységvektor lineáris kombinációjaként.

163.* Határozzuk meg az előző feladatban a rúd A végpontja pályájának vektoregyenletét, mint az idő függvényét. Mekkora az A pont pályamenti sebessége és gyorsulása a B végpont S síkra való érkezése pillanatában?

Számítsuk ki az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű pályán mozgó anyagi pont szögsebességvektorát a $t = t_0$ időpillanatban (**164** – **166**. feladatok):

164. $\mathbf{r} = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + (3t + 2)\mathbf{j} + (t^2 - 5)\mathbf{k}; \quad t_0 = 1,$

165. $\mathbf{r} = te^t\mathbf{i} + t^2e^{-t}\mathbf{j} + (1 + e^t)\mathbf{k}; \quad t_0 = 1,$

166. $\mathbf{r} = \mathbf{i}t\cos t + \mathbf{j}t\sin t + \mathbf{k}at; \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

167.$^\triangleright$ Egy félegyenes vízszintes síkban állandó ω szögsebességgel forog az O végpontja körül. A félegyenes kezdőpontjából a $t = 0$ időpillanatban elindul a P pont, és félegyenesen állandó v_0 nagyságú sebességgel mozog. Írjuk fel a P pont pályájának mozgásegyenletét az idő függvényeként. Adjuk meg a P pont pályamenti sebességét és gyorsulását a mozgás időtartamának egy tetszőleges t időpontjában.

168. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + \sqrt{2}t^4\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$ egyenletű pályán mozgó anyagi pont szögsebességét és szöggyorsulását a t idő függvényeként. Melyik időpillanatban veszi fel a szögsebesség és a szöggyorsulás a legkisebb, illetve a legnagyobb értékét?

Felületek

D 17.25 Minden felület megadható egy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ vektoregyenlettel, amelyet a felület **paraméteres vektoregyenletének**, az u és v változókat a felület **Gauss-paramétereinek**, az uv síkot pedig **Gauss-paramétersíknak** nevezzük. Úgy is mondjuk, hogy a felületet az $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ vektor-vektorfüggvénnyel adjuk meg. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ vektoregyenletet például térbeli derékszögű koordináta-rendszerben koordináta-függvényekkel is felírhatjuk:

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

A felületeket gyakran $z = z(x, y)$ vagy $f(x, y, z) = 0$ alakú egyenletekkel adjuk meg. Megjegyezzük, hogy egy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ vektoregyenlet azonban nem mindig felület vektoregyenlete.

D 17.26 Ha a felületet leíró $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ függvény a teljes D értelmezési tartományán invertálható, akkor a felületen lévő bármely P_0 ponthoz egy és csak egy olyan D-beli (u_0, v_0) számpár található, hogy az $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ éppen a P_0-ba mutató helyvektor; ezért ebben az esetben az u_0, v_0 számokat a P_0 **Gauss-koordinátáinak** nevezzük.

D 17.27 Ha az u, v paraméterek egy (harmadik) t paraméter $u(t), v(t)$ alakú függvényei, akkor a $t \mapsto \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ vektor-skalárfüggvény a felületre illeszkedő görbét ad (**felületi görbe**). Speciálisan, ha $u = u_0, v = t$ illetve $u = t, v = v_0$, akkor a $t \mapsto \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u_0, t)$ illetve a $t \mapsto \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t, v_0)$ vektor-skalárfüggvényekkel megadott felületi görbéket az u_0 értékhez tartozó **u-paramétervonalnak** illetve, a v_0 értékhez tartozó **v-paramétervonalnak** nevezzük.

Feladatok

A következő feladatokban (**169** – **172.**) egy síkot három pontjával adunk meg. Ellenőrizzük, hogy a megadott három pont nem esik egy egyenesre, és írjuk fel a sík egy paraméteres vektoregyenletét például az $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektorok segítségével:

169.* $P_1(2,1,9)$, $P_2(1,5,10)$, $P_3(0,4,0)$,
170. $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,0,0)$, $P_3(0,1,0)$,
171. $P_1(3,-1,2)$, $P_2(4,3,-5)$, $P_3(5,-1,2)$,
172. $P_1(0,2,-1)$, $P_2(5,-1,3)$, $P_3(-2,1,4)$,

173.* Forgassuk meg a $z = f(y)$ valós függvény grafikonját az z tengely körül. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott felület egy paraméteres vektoregyenlete az

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}f(v), \quad (u \in [0, 2\pi), v \in \operatorname{Dom} f)$$

egyenlet; egy másik paraméteres vektoregyenlete pedig az

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}\begin{cases} f(\sqrt{x^2+y^2}), & \text{ha } \sqrt{x^2+y^2} \in \operatorname{Dom} f; \\ f(-\sqrt{x^2+y^2}), & \text{ha } -\sqrt{x^2+y^2} \in \operatorname{Dom} f. \end{cases}$$

Az utóbbi egyenlet segítségével adjuk meg a felület egy vektormentes egyenletét. Hogyan módosulnak ezek az egyenletek, ha a grafikont az y tengely körül forgatjuk meg? Adjuk meg a megfelelő egyenleteket, ha például az $y = f(x)$ valós függvény grafikonját forgatjuk meg az y, illetve az x tengely körül.

Az előző feladat segítségével vagy egyéb módon írjuk fel az alábbi f egyváltozós valós függvények grafikonjának a megadott tengelyek körüli forgatásakor kapott felület legalább két egyenletét (**174** – **177.** feladatok):

174.* $z = f(y) = y^2$; z, y,
175. $z = f(x) = \ln x$; z, x,
176. $z = f(y) = e^{-y^2}$; z, y,
177. $y = f(x) = \operatorname{ch} x$; y, x.

178. Az xy koordinátasík $y = -x^2 + (a+b)x - ab$ $(0 \leq a < b)$ egyenletű parabolájának x tengely feletti ívét forgassuk meg az y tengely körül. Írjuk fel az így keletkezett felület egy paraméteres vektoregyenletét.

Az xy koordinátasíkon lévő és az alábbi egyenletekkel megadott görbék minden pontján át vegyük fel az adott **a** irányvektorú egyenest. Írjuk fel az így kapott hengerfelület egy paraméteres vektoregyenletét:

179.* $y = x^2$; $\mathbf{a} = [-1, 1, 1]$, 180. $x^2 + y^2 = 1$; $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$,
181. $x^2 - y^2 = 4$; $\mathbf{a} = [-3, 2, 1]$, 182. $x^2 + 4y^2 = 4$; $\mathbf{a} = [0, 1, 2]$.

Az xy koordinátasíkon lévő és az alábbi egyenletekkel megadott görbék minden pontján át vegyük fel az adott P_0 ponton átmenő egyenest. Írjuk fel az így kapott kúpfelület egy paraméteres vektoregyenletét:

183.* $x^2 + y^2 = 25$; $P_0(-2, 3, 4)$, 184. $y = x^2 - 4$; $P_0(4, -2, 3)$,
185. $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$; $P_0(0, 0, 3)$, 186. $x^2 - y^2 = 1$; $P_0(0, 0, 5)$.

Írjuk fel az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ vektoregyenlettel adott felület vektormentes egyenletét $z = z(x, y)$ vagy $f(x, y, z) = 0$ alakban:

187.* $\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}v^2$; $0 \leq u < 2\pi$ (**forgási paraboloid**; vegyük figyelembe a **174.** feladat megoldását!),

188. $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos u + \mathbf{j}a\sin u + \mathbf{k}v$; $a > 0$, $0 \leq u < 2\pi$ (**körhenger**; l. **180.** feladatot!),

189. $\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}cv$; $c \neq 0$, $0 \leq u < 2\pi$ (**körkúp**; l. **8.85.** és **183.** feladatokat!),

190. $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ (**parabolikus henger**),

191.* $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos u\sin v + \mathbf{j}b\sin u\sin v + \mathbf{k}c\cos v$; $a, b, c > 0$, $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$ (a, b, c féltengelyű **ellipszoid**),

192. $\mathbf{r} = (\cos u - v\sin u)\mathbf{i} + (\sin u + v\cos u)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$; $0 \leq u < 2\pi$ (**egyköpenyű hiperboloid**; l. **8.89.** feladatot!),

193.* $\mathbf{r} = a(u + v)\mathbf{i} + b(v - u)\mathbf{j} + 2uv\mathbf{k}$; $a, b > 0$ (**hiperbolikus paraboloid**; l. **8.86** feladatot!),

194.* $\mathbf{r} = \mathbf{i}a^2\cos^4 u\cos^4 v + \mathbf{j}a^2\cos^4 u\sin^4 v + \mathbf{k}a^2\sin^4 u$; $a > 0$, $0 \leq u, v < 2\pi$,

195. $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\,\mathrm{ch}\,u + \mathbf{j}b\,\mathrm{sh}\,u + \mathbf{k}v$; $a, b > 0$, (**hiperbolikus henger**; l. **181.** feladatot!),

196. $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\,\mathrm{ch}\,v\cos u + \mathbf{j}a\,\mathrm{ch}\,v\sin u + \mathbf{k}b\,\mathrm{sh}\,v$; $a, b > 0$, $0 \leq u < 2\pi$ (**egyköpenyű forgáshiperboloid**; l. **8.89** feladatot!),

197. $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\,\mathrm{sh}\,v\cos u + \mathbf{j}a\,\mathrm{sh}\,v\sin u + \mathbf{k}b\,\mathrm{ch}\,v$; $a, b > 0$, $0 \leq u < 2\pi$ (**kétköpenyű forgáshiperboloid**; l. **8.90.** feladatot!).

Írjuk fel az alábbi vektormentes egyenletekkel adott felületek egy paraméteres vektoregyenletét:

198.* $z = xy$ (**hiperbolikus paraboloid**),

199.* $x^2 + y^2 = z^2$ (**körkúp**; l. **189.** feladatot!),

200. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$; $a, b > 0$ (**elliptikus paraboloid**),

201. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $a, b, c > 0$ (**egyköpenyű hiperboloid**; l. a **196.** feladatot!),

202. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $a, b, c > 0$ (**kétköpenyű hiperboloid**; l. a **197.** feladatot!),

203. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$; $a, b, c > 0$ (**kúp**; l. a **199.** feladatot!).

Az alábbi feladatokban írjuk fel az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbe összes érintője által alkotott felület egy paraméteres vektoregyenletét:

204.• $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, **205.** $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$,

206. $\mathbf{r} = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t\sin t + \mathbf{k}e^t$.

Számítsuk ki az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ egyenletű felület $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott felületi görbéjének ívhosszát a $[t_1, t_2]$ paraméter-intervallum-
ban (207 – 209. feladatok):

207.▷ $\mathbf{r} = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}2u$; $u = t$, $v = \ln t$, $t_1 = \pi$, $t_2 = 2\pi$,

208. $\mathbf{r} = e^u(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v + \mathbf{k})$; $u = v = t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$,

209. $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + \frac{v}{3}\mathbf{j} + \frac{2uv}{27}\mathbf{k}$; $u = t$, $v = t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

210.▷ Határozzuk meg az a sugarú $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\sin v\cos u + \mathbf{j}a\sin v\sin u + \mathbf{k}a\cos v$ $(0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v \le \pi)$ egyenletű gömbfelület paramétervonalainak hosszát.

Írjuk fel az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ egyenletű felület (u_0, v_0) paraméterű pontjában a paramétervonalak érintőinek egy egyenletrendszerét:

211.▷ $\mathbf{r} = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$; $u_0 = 2$, $v_0 = 1$,

212. $\mathbf{r} = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}u$; $u_0 = 2$, $v_0 = \frac{\pi}{4}$,

213. $\mathbf{r} = (u^3 - 2v^2)\mathbf{i} + uv^2\mathbf{j} + (u^2v - u)\mathbf{k}$; $u_0 = 1$, $v_0 = -2$,

Felület érintősíkja és normálisa

D 17.28 Legyen $\mathcal{F}$ az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ $((u,v) \in D)$ egyenlettel megadott felület. Ha az (u_0, v_0) $(\in D)$ pont valamely teljes környezetében az $\mathbf{r}(u,v)$ függvény invertálható, mindkét változója szerinti parciális deriváltja folytonos, az u szerinti $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ és a v szerinti $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ parciális differenciálhányadosok nem egyező állásúak, akkor az $\mathcal{F}$ felület $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ helyvektorú P_0 pontját **reguláris**nak nevezzük. (Előfordul, hogy a differenciálhányadosok csak az adott paraméterezés mellett egyező állásúak. Ha valamely felületi pontban bármely megengedett paraméterezéssel is párhuzamosak a differenciálhányadosok, akkor a pontot **szinguláris**nak mondjuk.)

T 17.29 Az $\mathcal{F}$ felület P_0 reguláris pontján átmenő felületi görbék érintői (ha léteznek) valamennyien egy síkban vannak, amelynek egy normálvektora az $\mathbf{n}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ vektor.

D 17.30 Az előző tételben szereplő síkot az $\mathcal{F}$ felület P_0 pontbeli **érintősíkjának**, az érintősíkra a P_0 pontban állított merőleges egyenest pedig a felület P_0 pontbeli **felületi normálisának** nevezzük.

T 17.31 Legyen az $\mathcal{F}$ felület a $z = z(x,y)$ $((x,y) \in D)$ egyenlettel megadva. A $P_0(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ pontban akkor és csak akkor létezik a z tengellyel nem párhuzamos érintősík, ha a $z(x,y)$ kétváltozós valós függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban. Ebben az esetben az érintősík egy normálvektora az $\mathbf{n}(x_0, y_0) = [-z'_x(x_0, y_0), -z'_y(x_0, y_0), 1]$ vektor. (Megjegyezzük, hogy ha a $z(x, y)$ függvény mindkét változója szerint parciálisan differenciálható és a parciális differenciálhányadosok folytonosak az (x_0, y_0) pontban, akkor differenciálható is ebben a pontban (l. **T 14.9**).)

T 17.32 Adjuk meg az $\mathcal{F}$ felületet az $f(x, y, z) = 0$ egyenlettel. Ha az f függvény minden változója szerint parciálisan differenciálható, a parciális differenciálhányadosok folytonosak a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont valamely teljes környezetében és $\mathbf{n}(P_0) = [f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0)] \neq \mathbf{0}$, akkor a P_0 pontban létezik érintősík, amelynek egy normálvektora $\mathbf{n}(P_0)$.

Feladatok

Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ egyenlettel megadott felület mely pontjaiban egyező állásúak az $\mathbf{r}_u$ és $\mathbf{r}_v$ vektorok?

214.* $\mathbf{r} = \mathbf{i}(u^2 + v^2) + \mathbf{j}uv + \mathbf{k}\cos u \cos v$,

215. $\mathbf{r} = (u^2 - v^2)\mathbf{i} + (\cos u - 1)\mathbf{j} + (v - e^v)\mathbf{k}$.

Számítsuk ki az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ egyenlettel megadott felület (u_0, v_0) paraméterű pontján átmenő két paramétervonal által bezárt szöget vagy annak koszinuszát:

216.* $\mathbf{r} = (u^2 - v^2)\mathbf{i} + 2uv\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$; $\quad u_0 = 1,\ v_0 = 2$,

217. $\mathbf{r} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}(1 + u)\cos v + \mathbf{k}(1 + u)\sin v$; $\quad u_0 = 1,\ v_0 = \frac{\pi}{3}$,

218. $\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}\sqrt{v}\sin\frac{u}{2} + \mathbf{k}\frac{v}{2}(1 + \cos u)$; $\quad u_0 = \frac{\pi}{2},\ v_0 = 1$.

Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-vektorfüggvénnyel megadott felület (u_0, v_0) paraméterű pontjához tartozó érintősíkjának egyenletét és felületi normálisának egy egyenletrendszerét:

219.* $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 - 2v^2)\mathbf{i} + (uv - v^3)\mathbf{j} + (u^4 - 2v)\mathbf{k}$; $\quad u_0 = -1,\ v_0 = 1$,

220. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u^2 + v^2)\mathbf{j} + (u^3 + v^3)\mathbf{k}$; $\quad u_0 = 1,\ v_0 = -1$,

221. $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}\cos u \sin v + \mathbf{k}\cos u \cos v$; $\quad u_0 = \frac{\pi}{4},\ v_0 = \frac{\pi}{3}$,

222. $\mathbf{r}(u, v) = (2v + \cos u)\mathbf{i} + (\sin u - v)\mathbf{j} + 3v\mathbf{k}$; $\quad u_0 = \pi,\ v_0 = 1$,

223. $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(2 + \cos v)\cos u + \mathbf{j}(2 + \cos v)\sin u + \mathbf{k}\sin v$; $\quad u_0 = \frac{\pi}{4},\ v_0 = \pi$,

224.* $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}e^{-u^2}$; $\quad u_0 = v_0 = 0$.

A következő feladatokban (**225 – 235.**) írjuk fel a felület $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét és a felületi normális egy egyenletrendszerét:

225.* $z = x^2y + 2y^2$; $\quad P_0(2, 1, 6)$,

226. $z = x^2 - \frac{y^2}{4}$; $\quad P_0(2, 2, 3)$,

227. $z = x^3 + y^3$; $\quad P_0(1, 2, 9)$,

228.* $x^2y + z^2 + yz = 0$; $\quad P_0(0, -1, 1)$,

229. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; $\quad P_0(3, 4, 12)$,

230. $xy^2 + z^3 = 12$; $\quad P_0(1, 2, 2)$,

231. $z = y + \ln\frac{x}{z}$; $\quad P_0(1, 1, 1)$,

232. $2^{\frac{y}{z}} + 2^{\frac{x}{z}} = 8$; $\quad P_0(2, 2, 1)$,

233. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $P_0(x_0,y_0,z_0)$ (l. a **30.** és a **191.** feladatokat!),

234. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; $P_0(x_0,y_0,z_0)$ (l. a **200.** feladatot!),

235. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $P_0(x_0,y_0,z_0)$ (l. a **202.** feladatot!).

236.▹ Bizonyítsuk be, hogy az $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=2t$ egyenletrendszerű térgörbe illeszkedik az $x^2+y^2=e^z$ egyenletű felületre, és minden pontjában a simulósíkja egybeesik a felület érintősíkjával.

237.▹ Az $x^2+2y^2+3z^2=21$ egyenletű felülethez keressünk olyan érintősíkokat, amelyek párhuzamosak az $x+4y+6z=0$ egyenletű síkkal.

238. A $z=x^2+y^2$ egyenletű felületnek van-e olyan érintősíkja, amelyik párhuzamos a $2x+3y=4z$ egyenletű síkkal? Ha van, akkor adjuk meg az egyenletét.

239.▹ Adjuk meg a $z=x^2+y^2$ egyenletű felület mindazon érintősíkjait, amelyek merőlegesek az $x+y+z=0$ egyenletű síkra.

240. Adjuk meg az $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ egyenletű felület azon pontjait, amelyekhez az xy koordinátasíkkal párhuzamos érintősík tartozik.

241.▹ A $2x^2+y^2+4z^2=6$ egyenletű ellipszoidon vannak-e olyan pontok, amelyekhez tartozó érintősíkok átmennek a $P(4,-1,1)$ ponton, és merőlegesek a $2x-2y+z=0$ egyenletű síkra? Ha vannak, akkor adjuk meg az ilyen érintősíkok egyenletét.

242. Az $z^2=x^2+y^2$ egyenletű kúpfelületnek vannak-e olyan pontjai, amelyekhez tartozó érintősíkok párhuzamosak a $2x+y=2z$ egyenletű síkkal és átmennek a $P(3,1,-1)$ ponton?

243.▹ Keressük meg az $(y+z)^2+(z-x)^2=16$ egyenletű felületen azokat a pontokat, ahol az érintősík merőleges az xy koordinátasíkra.

244.▹ Az a paraméter mely értékeinél érinti az $x+2y+az=-1$ egyenletű sík az $x^2-y^2+z^2=1$ egyenletű hiperboloidot? Adjuk meg az érintési pontokat is.

245. Számítsuk ki a $z=6xy^2-2x^2y$ egyenletű felület $P_1(2,1,4)$ és $P_2(-1,2,-28)$ pontjaihoz tartozó érintősíkok szögének koszinuszát.

246. Határozzuk meg az $xyz=1$ egyenletű felületnek azokat az érintősíkjait, amelyek párhuzamosak az $x+y+z=5$ egyenletű síkkal.

247. Határozzuk meg az $\mathbf{r}=(u+v)\mathbf{i}+(u^2+u)\mathbf{j}+(v^2+v)\mathbf{k}$ egyenletű felületen azokat a pontokat, amelyekben az $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2$ kifejezésnek szélsőértéke van.

248.▹ Adjuk meg az $\mathbf{r}=\mathbf{i}\sin u\cos v+\mathbf{j}\sin u\sin v+\mathbf{k}\cos u$ $(0<u<\frac{\pi}{2},\ 0<u<\frac{\pi}{2})$ egyenletű gömbfelületrésznek azt a pontját, amelyhez tartozó érintősík a koordinátasíkokkal a legkisebb térfogatú tetraédert alkotja.

249.▹ Az $y=8x^2$, $z=0$ egyenletrendszerű parabolát forgassuk meg az x tengely körül. A kapott forgásfelület $P_0(1,4,4\sqrt{3})$ pontjában írjuk fel az érintősík egyenletét és a felületi normális egy egyenletrendszerét.

250.▹ Bizonyítsuk be, hogy ha $a\neq 0$ állandó, akkor az $xyz=a^3$ egyenletű felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatú tetraédereket alkotnak.

251. Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 0$ állandó, akkor a $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ egyenletű felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből állandó összegű darabokat vágnak le.

252.* Az $x^n + y^n + z^n = a^n$ ($a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}^+$) egyenletű felület $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősík az x, y, z tengelyeket rendre az A, B, C pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x_0}{OA} + \frac{y_0}{OB} + \frac{z_0}{OC} = 1.$$

253.* Bizonyítsuk be, hogy az

$$\mathbf{r} = a(\cos u - v\sin u)\mathbf{i} + a(\sin u + v\cos u)\mathbf{j} + b(u+v)\mathbf{k}, \quad a, b \neq 0$$

egyenletű **csavarfelület** felületi normálisai a z tengellyel állandó szöget zárnak be.

254.* A $z^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2}$ (a pozitív konstans) egyenletű felület tetszőleges $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 \neq 0$) pontjához tartozó felületi normálisnak az xy koordinátasíkkal közös pontját jelöljük Q_0-lal. Bizonyítsuk be, hogy a P_0Q_0 szakasz xy koordinátasíkra eső merőleges vetületének hossza független a P_0 pont választásától.

Felületdarab felszíne

D 17.33 Legyen $\mathcal{F}$ az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ ($(u,v) \in D$) egyenlettel megadott felület és T a D paramétertartomány korlátos zárt részhalmaza. Ha az $\mathbf{r}(u,v)$ helyvektorú pont minden $(u,v) \in T$ esetén reguláris (l. **D 17.28**), akkor a T tartományhoz tartozó **felületdarab felszínén** az

$$A(T) = \iint_T |\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)|\, dT$$

kettős integrált értjük.

T 17.34 Ha az $\mathcal{F}$ felületet a $z = z(x,y)$ ($(x,y) \in D$) egyenlettel adjuk meg, és a D értelmezési tartomány valamely T résztartományán a $z(x,y)$ függvény mindkét parciális deriváltja folytonos, akkor

$$A(T) = \iint_T \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dT.$$

T 17.35 Ha az $\mathcal{F}$ felületet a $f(x,y,z) = 0$ ($(x,y) \in D$) egyenlettel adjuk meg, továbbá, ha a D értelmezési tartomány valamely T résztartományán ez az egyenlet egy $z(x,y)$ függvényt határoz meg, és $\mathcal{F}$-nek T feletti darabján az f'_x, f'_y, f'_z parciális deriváltak folytonosak, az f'_z pedig sehol sem zérus, akkor

$$A(T) = \iint_T \frac{\sqrt{{f'_x}^2 + {f'_y}^2 + {f'_z}^2}}{|f'_z|}\, dT.$$

Feladatok

Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvényekkel adott felületek felszínét a megadott feltételek mellett (**255 – 269.** feladatok):

255.• $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u^2 + \mathbf{j}2u\cos v + \mathbf{k}2u\sin v;\quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$,

256.• $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}u;\quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$,

257. $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}(\cos u - v\sin u) + \mathbf{j}(\sin u + v\cos u) + \mathbf{k}(u+v);\quad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 1$,

258. $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}av;\quad a > 0,\ -a \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi$ (**egyenes csavarfelület**),

259. $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\,\mathrm{ch}\,u\cos v + \mathbf{j}u + \mathbf{k}\,\mathrm{ch}\,u\sin v;\quad 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi$,

260. $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}v\sin u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}v\cos u;\quad 0 \le u \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le v \le 2$,

261. $\mathbf{r}(u,v) = e^u(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v + \mathbf{k});\quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{4}$,

262.• $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\cos\ln v + \mathbf{j}u\sin\ln v + \mathbf{k}u;\quad 0 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 2$,

263.• $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\,\mathrm{ch}\,v + \mathbf{j}u\,\mathrm{sh}\,v + \mathbf{k}u;\quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$,

264.• $x^2 = 2yz;\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$,

265.• $z = xy;\quad x^2 + y^2 \le 1$,

266.* $z = y(x-1);\quad x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0$,

267. $z = x^2 - y^2;\quad x^2 + y^2 \le 1$,

268.* $z = \frac{x^2}{2y};\quad x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge \sqrt{3}$.

269.▸ $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b};\quad a, b > 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$,

270. Az $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\sin v\cos u + \mathbf{j}a\sin v\sin u + \mathbf{k}a\cos v$ $(0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v \le \pi)$ egyenletű gömbfelületet messük el két egymással párhuzamos síkkal, amelyek távolsága d $(\le 2a)$. Határozzuk meg a két sík közötti felületdarab (**gömböv**) felszínét.

271.▸ Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ $(a > 0)$ egyenletű gömbfelület azon darabjának felszínét, amely az $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ egyenletű hengerfelületen belül van.

272. Számítsuk ki annak a felületdarabnak a felszínét, amelyet a $z^2 = x$ egyenletű felületből az $y^2 = x$ és az $x = 1$ egyenletű felületek metszenek ki.

273. Számítsuk ki a $2z = x^2$ egyenletű parabolikus hengerfelület azon darabjának felszínét, amelyet az $x = 2y$, $2x = y$, $x = 2\sqrt{2}$ egyenletű síkok határolnak.

274.▸ Számítsuk ki a $z = y^2 + x + 1$ egyenletű felület azon darabjának felszínét, amelyet az $y = x$, $x = 1$, $y = 0$ síkok határolnak.

275.▸ Számítsuk ki az $y^2 + z^2 = x^2$ egyenletű kúpfelület nemnegatív x koordinátákhoz tartozó és az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengeren belüli darabjának felszínét.

276.* Számítsuk ki az $x^2 + z^2 = a^2$ és az $y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ egyenletű hengerfelületek által határolt test felszínét.

277. Számítsuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenletű felület $x^2 + y^2 = 2x$ egyenletű hengeren belüli darabjának felszínét.

278.* Legyen $\mathbf{r}(s)$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $(s_1 \le s \le s_2)$ egyenletű térgörbe érintőire mérjünk fel az érintési pontból kiindulva az érintő egységvektor irányában konstans d távolságot. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott felületdarab felszíne:

$$A = \frac{d^2}{2} \int_{s_1}^{s_2} G(s)\, ds.$$

($G(s)$ az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ívhosszparaméteres egyenlettel megadott térgörbe s paraméterű pontjához tartozó görbület (**D 17.14**).)

279.[P] Az $\mathbf{r} = \mathbf{i}4\cos t + \mathbf{j}4\sin t + \mathbf{k}3t$ egyenletű csavarvonal érintőire mérjünk fel az érintési pontból kiindulva az érintő egységvektor irányában $\sqrt{2}$ egységet. Határozzuk meg az ezen szakaszok által leírt felületdarab felszínét, ha $0 \le t \le 1$.

280.* Az $y = f(x)$ $(f(x) > 0$, ha $a \le x \le b)$ egyenletű görbét forgassuk meg az x tengely körül. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény folytonosan differenciálható, akkor az így kapott forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Fizikai alkalmazások

A 17.36 Az $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ $\quad (t_1 \le t \le t_2)$ egyenlettel megadott, elhanyagolható vastagságú (vékony) huzal (térgörbe) **tömegét** az

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \varrho(x(t), y(t), z(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$$

képlettel számíthatjuk ki, ahol $\varrho(x, y, z)$ az úgynevezett **sűrűségfüggvény**.
(A $\varrho(x(t), y(t), z(t))$-t jelöljük a továbbiakban $\varrho(t)$-vel.)

A 17.37 A koordinátákra vonatkozó **elsőrendű nyomatékok**:

$$N_{yz} = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt, \quad N_{xz} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt, \quad N_{xy} = \int_{t_1}^{t_2} z(t)\varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt.$$

A **tömegközéppont koordinátái**:

$$\bar{x} = \frac{N_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{N_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{N_{xy}}{M}.$$

A 17.38 A tengelyekre vonatkozó **tehetetlenségi nyomatékok**:

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} (y^2(t) + z^2(t))\varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt,$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} (x^2(t) + z^2(t))\varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt,$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} (x^2(t) + y^2(t))\varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt.$$

A 17.39 Az $\mathbf{r} = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \quad ((u,v) \in D)$ egyenletű lemez (felületdarab) tömege, elsőrendű nyomatéka és tehetetlenségi nyomatéka hasonlóan számítható, például:

$$M = \iint_D \varrho(u,v)|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv,$$

$$N_{yz} = \iint_D x(u,v)\varrho(u,v)|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv,$$

$$I_x = \iint_D (y^2(u,v) + z^2(u,v))\varrho(u,v)|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv.$$

Feladatok

281. Számítsuk ki az $\mathbf{r} = (t^2-1)\mathbf{i}+2t\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 1)$ egyenlettel adott vékony huzal tömegét, ha a sűrűségfüggvény $\varrho(t) = \frac{3}{2}t$.

282.ᴾ Egy vékony fémhuzalt az xy koordinátasíkban az $x^2 + y^2 = 1$ $(y \ge 0)$ egyenlettel adunk meg. Számítsuk ki a tömegközéppontját, ha a sűrűségfüggvény: $\varrho(x,y,z) = 2 - y$.

283. Az $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt$ $(a,b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi)$ egyenlettel adott spirál állandó ϱ sűrűségű. Számítsuk ki a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tömegközéppontjának koordinátáit.

284. Számítsuk ki az $\mathbf{r} = (t^2-1)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 1)$ egyenlettel adott vékony huzal tömegközéppontjának koordinátáit és az x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, ha $\varrho(x,y,z) = \sqrt{2+y}$.

285.ᴾ Határozzuk meg az a sugarú félgömb-lemez tömegközéppontját, ha a sűrűségfüggvény ϱ (konstans).

286. Számítsuk ki az $y^2 + z^2 = a^2$, $0 \le x \le a$ feltétellel megadott felületdarab felső felének tömegközéppontját, ha a sűrűség állandó.

287. Számítsuk ki annak az egységnyi sűrűségű lemeznek a tömegét és a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, amelyet a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ egyenletű kúpfelületből metsz ki az $x^2 + y^2 = 2x$ egyenletű henger.

18. fejezet

Vektor-vektorfüggvények

Divergencia és rotáció

D 18.1 A háromdimenziós valós vektortér valamely részhalmazán a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{i}v_1(x,y,z) + \mathbf{j}v_2(x,y,z) + \mathbf{k}v_3(x,y,z)$$

képlettel értelmezett vektor-vektorfüggvény **divergenciáján** értjük a

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

skalár-vektorfüggvényt, ha a koordináta-függvények(nek a képlet jobb oldalán felírt) parciális deriváltjai léteznek. Ha a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény divergenciája egy H halmazon azonosan 0, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{v}$ a H halmazon **forrásmentes** vektormezőt alkot.

D 18.2 A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ **rotációján** értjük a

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

vektor-vektorfüggvényt, ha a megfelelő parciális deriváltak léteznek. A $\operatorname{rot} \mathbf{v}$-t formálisan a következő determinánssal adhatjuk meg:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Ha a H halmazon a $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ azonosan 0, akkor azt k mondjuk, hogy $\mathbf{v}$ a H halmazon **örvénymentes** vektormezőt alkot.

D 18.3 A vektormezőt **Laplace-** vagy **harmonikus** vektormezőnek nevezzük, ha forrás- és örvénymentes.

J 18.4 Vezessük be a vektorjellegű

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

nablaoperátort és a skaláris jellegű

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace-operátort, amelyekkel ugyanúgy számolunk, mint a valóságos vektorokkal, illetve összegekkel, azaz írhatjuk például, hogy $\nabla^2 = \Delta$.

Az $u(x,y,z)$ háromváltozós valós függvény gradiense (**D 14.8**), illetve a $\mathbf{v}(x,y,z)$ vektor-vektorfüggvény divergenciája és rotációja a következő alakban adható meg:

$$\mathbf{grad}\, u = \nabla u, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}, \quad \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Ezenkívül: $\operatorname{div} \mathbf{grad}\, u = \Delta u$.

T 18.5 Néhány egyszerűbb összefüggés:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{w}, \qquad \mathbf{rot}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{rot}\, \mathbf{v} + \mathbf{rot}\, \mathbf{w},$$

$$\operatorname{div} u\mathbf{v} = \mathbf{v}\, \mathbf{grad}\, u + u \operatorname{div} \mathbf{v}, \qquad \mathbf{rot}\, u\mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{grad}\, u) + u\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v},$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} - \mathbf{v}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{w}.$$

T 18.6 Ha a megfelelő parciális deriváltak folytonosak, akkor

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, u = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = 0.$$

D 18.7 Ha a $\mathbf{v}(x,y,z)$ vektor-vektorfügvényhez van olyan $u(x,y,z)$ skalár-vektorfüggvény, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\, u$, akkor u-t $\mathbf{v}$ **potenciálfüggvényének**, a $\mathbf{v}$ által létesített vektormezőt pedig **potenciálosnak** nevezzük. (Mivel $\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, u = \mathbf{0}$, ezért ebben az esetben a vektormező örvénymentes.)

T 18.8 Egyszeresen összefüggő V térbeli tartományon értelmezett $\mathbf{v}$ vektor-vektorfüggvénynek akkor és csak akkor létezik potenciálfüggvénye, ha ezen a tartományon $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ezenkívül, ha u_1 és u_2 a $\mathbf{v}$ két potenciálfüggvénye, akkor $u_2 = u_1 + c$ ($c \in \mathbf{R}$). (Egyszeresen összefüggőnek nevezzük a V térbeli tartományt, ha minden benne haladó zárt síkgörbe által határolt síkbeli tartomány is benne van V-ben.)

Feladatok

Határozzuk meg a következő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvények divergenciáját és rotációját ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ adott háromdimenziós vektor). Állapítsuk meg, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény mely halmazon alkot forrásmentes, illetve örvénymentes mezőt.

1.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2-y^2)\mathbf{i} + (y^2-z^2)\mathbf{j} + (z^2-x^2)\mathbf{k}$,

2. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{x}{y}\mathbf{i} + \frac{y}{z}\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$,

3. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2+y^3)\mathbf{i} + (12xy-3x)\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$,

4.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = |\mathbf{a}|\mathbf{r} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$,

5. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\mathbf{r}^2$, **6.** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\mathbf{r})\mathbf{r}$,

7.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}|\mathbf{r}|$, **8.*** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|$,

9. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\ln|\mathbf{r}|$, **10.** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\ln|\mathbf{r}|$,

11. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$, **12.*** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}|\mathbf{r}| + |\mathbf{a}|\mathbf{r}$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi vektor-vektorfüggvényekkel adott vektortér forrásmentes-e?

13.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2y+y^3)\mathbf{i} + (x^3-xy^2)\mathbf{j}$, **14.** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - (x^2+y^2)z\mathbf{k}$,

15. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{x}{yz}\mathbf{i} + \dfrac{y}{xz}\mathbf{j} - \dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\mathbf{k}$, **16.** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{(x^2-y^2)z\mathbf{k}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

17.▷ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy^2z^2\mathbf{i} - y^2z^2e^x\mathbf{j} + \dfrac{z^3}{3}e^{2x}\mathbf{k}$.

Vizsgáljuk meg, hogy a következő vektor-vektorfüggvényekkel adott vektormező harmonikus-e? (A, B, C, D adott valós számok.)

18.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2+y^2}$, **19.** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

20. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}(\sqrt{x^2+y^2} - x)$, **21.** $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}(Ax + By + Cz + D)$,

22. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3)$.

Legyen $u(x,y,z)$ háromváltozós valós függvény, $\mathbf{v}(x,y,z)$ és $\mathbf{w}(x,y,z)$ vektor-vektorfüggvények, továbbá a konstans valós szám és $\mathbf{b}$ adott háromdimenziós vektor. Bizonyítsuk be, hogy a következő összefüggések érvényesek az (x,y,z) pontban. Melyik feladatban szükséges feltenni, hogy az (x,y,z) pont valamely teljes környezetében a megfelelő parciális deriváltak folytonosak?

23. $\operatorname{div} a\mathbf{v} = a \operatorname{div}\mathbf{v}$; $\mathbf{rot}\, a\mathbf{v} = a\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$,

24. $\operatorname{div} u\mathbf{b} = (\mathbf{grad}\, u)\mathbf{b}$; $\mathbf{rot}\, u\mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{grad}\, u$,

25.• $\operatorname{div} u\mathbf{v} = (\mathbf{grad}\, u)\mathbf{v} + u \operatorname{div}\mathbf{v}$, **26.** $\mathbf{rot}\, u\mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{grad}\, u) + u\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$,

27. $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{w}$, **28.** $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad} \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

29. Határozzuk meg a $\mathbf{grad} \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvényt, ha $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

30. Határozzuk meg a $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvényt, ha $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$.

31. Határozzuk meg a $\nabla(\nabla\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ vektor-vektorfüggvényt, ha $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2+z^2)x\mathbf{i} + (x^2+z^2)y\mathbf{j} + (x^2+y^2)z\mathbf{k}$.

A következő feladatokban számítsuk ki a $\operatorname{div}\mathbf{grad}\, u(\mathbf{r})$ skalár-vektorfüggvényt:

32.• $u(\mathbf{r}) = \ln|\mathbf{r}|$, **33.** $u(\mathbf{r}) = x^2 \sin yz$,

34. $u(\mathbf{r}) = ye^x + ze^y + xe^z$, **35.** $u(\mathbf{r}) = e^{xyz}$.

Ha léteznek, akkor adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfügvények u potenciálfüggvényeit:

36.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\mathbf{j}$,

37.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (5x^2y - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j}$,

38.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$,

39.▷ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$,

40. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz - xy)\mathbf{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\mathbf{j} + (xy + y^2z)\mathbf{k}$,

41.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\sin 2x \cos 2y\mathbf{i} + \cos 2x \sin 2y\mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}$.

Görbementi integrál

D 18.9 Legyen a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}$ vektor-vektorfüggvény értelmezési tartománya a háromdimenziós tér D részhalmaza, $\mathcal{G}$ pedig rektifikálható görbeív (**D 13.19**) és $\mathcal{G} \subseteq D$. Jelöljünk ki a $\mathcal{G}$ görbén egy haladási irányt. Az eddigi integrálfogalmakhoz hasonló módon adható meg az $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ és az $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r}$ **skalárértékű**, illetve **vektorértékű görbementi (vonal)integrál** fogalma (I. Szász G., Matematika II., 165-167. o.). Ha csak görbementi integrálról beszélünk, akkor ezen mindig skalárértékű görbementi integrált értünk. A $\mathcal{G}$ görbét az **integrálás útjának** is nevezik. (Ha a $\mathcal{G}$ görbe irányítását megfordítjuk, akkor az integrál előjelet vált.) Egy (kétoldalú) $\mathcal{F}$ felületdarabot határoló $\mathcal{G}$ zárt görbe menti integrál esetén általában az $\mathcal{F}$ felületi normálvektora (**D 18.13**) felől tekintett pozitív forgásirányt választjuk haladási iránynak. Ebben az esetben szokásos a $\oint_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ jelölés is.

T 18.10 Ha a $\mathcal{G}$ görbe az egymáshoz csatlakozó és a $\mathcal{G}$-vel egyezően irányított $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ ívekből áll, akkor

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{G}_1} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{G}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

(Például zárt görbe tetszőleges módon felbontható két ilyen görbeívre.)

T 18.11 Ha a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény folytonos és az $\mathbf{r}(t)$ $(t_1 \le t \le t_2$ vagy $t_1 \ge t \ge t_2)$ folytonosan differenciálható függvény $\mathcal{G}$ grafikonján az irányítás a t_1 paraméterű ponttól a t_2 paraméterű pont felé mutat, akkor

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (v_1(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + v_2(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + v_3(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t))\,dt.$$

Megjegyezzük, hogy vektorértékű görbementi integrálokra hasonló összefüggések érvényesek (skaláris szorzat helyett vektori szorzatot kell venni).
Speciálisan, ha a $\mathcal{G}$ görbe az $y = y(x)$ $(x_1 \le x \le x_2$ vagy $x_1 \ge x \ge x_2)$ folytonosan differenciálható függvény grafikonja, azaz $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j}$, akkor

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} (v_1(x,y(x),0) + v_2(x,y(x),0)y'(x))\,dx.$$

T 18.12 Ha egy egyszeresen összefüggő tartományon $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ potenciálos, azaz van olyan $u(x,y,z)$ függvény, hogy $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} u(x,y,z)$ (és emiatt $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$; **D 18.7** és **T 18.8**), akkor a vektormező bármely A és B pontjára

$$\int_{AB} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = u(B) - u(A),$$

ahol AB bármely olyan A kezdőpontú és B végpontú, a vektormezőben haladó görbét jelent, amely folytonosan differenciálható vektor-skalárfüggvénnyel adható meg. Ez azt jelenti, hogy potenciálos térben tetszőleges folytonosan differenciálható vektor-skalárfüggvénnyel megadott zárt görbementi integrál 0.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi feladatokban a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény görbementi integrálját a megadott $\mathcal{G}$ görbe mentén:

42.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$; $\mathcal{G}$ az $A(1,-2,3)$ kezdőpontú és $B(2,1,4)$ végpontú szakasz,

43.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\mathcal{G}$ az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ egyenletrendszerű kör az xy koordináta-síkbeli pozitív forgásirány szerint,

44. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$; $\mathcal{G}$ az $y = 3 - 2x$, $z = 0$ egyenletrendszerű egyenes 1 abszcisszájú pontjától a -2 abszcisszájú pontjáig,

45. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$; $\mathcal{G}$ az $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ egyenletrendszerű görbe a paraméter növekedésének megfelelő irányítással,

46.$^{\triangleright}$ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; az integrálás útja az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin^2 t + \mathbf{j}\sin 2t + \mathbf{k}\cos^2 t$ $(0 \le t \le \pi)$ paraméteres vektoregyenlettel adott $\mathcal{G}$ görbeív a paraméter növekedésének megfelelő irányban,

47. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy - z)\mathbf{i} + (x^2 + z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$; $\mathcal{G}$ az $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, $z = 2$ egyenletrendszerű ellipszis az xy koordináta-síkbeli pozitív forgásirány szerint,

48.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - x^2 - 2yz)\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$; jelölje A, illetve B azt a pontot, ahol az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j} + \mathbf{k}(t-1)^2$ egyenletű görbe az xy, illetve az yz koordinátasíkot metszi; az integrálás útja ($\mathcal{G}$) az OAB töröttvonal O (origó) kezdőponttal és B végponttal,

49. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (ye^{xy} - yz\sin xyz)\mathbf{i} + (xe^{xy} - xz\sin xyz)\mathbf{j} - \mathbf{k}xy\sin xyz$; $\mathcal{G}$ az $A(1,3,2)$, $B(0,3,2)$, $C(0,-4,2)$ és $D(0,-4,5)$ csúcspontú $ABCD$ töröttvonal A kezdőponttal és D végponttal,

50.$^{\triangleright}$ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$; az integrálást az xy koordinátasíkban az $A(1,0)$ pontból kiinduló és a $B(0,1)$ ponton át a $C(1,2)$ pontba futó következő három görbe mentén végezzük el:

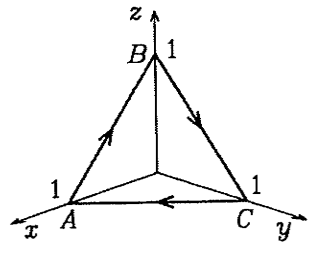
a) az ABC töröttvonal,

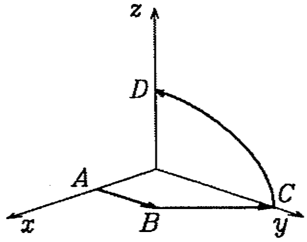
b) az origó középpontú egységsugarú AB negyedkörív és a BC szakasz,

c) az $(1,1)$ középpontú egységsugarú ABC félkörív,

51. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$; az integrálás útja ($\mathcal{G}$) az $O(0,0,0)$ pontból indul, majd az $A(-1,0,3)$ és $B(1,0,3)$ ponton át visszajut O-ba; OA és BO szakaszok, az AB ív pedig a $z = 3$ egyenletű síkban fekvő $(0,0,3)$ középpontú, egységsugarú kör nemnegatív y-koordinátájú pontjaiból álló íve,

52. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; az integrálás útja ($\mathcal{G}$) az A pontból indul, és az AB, BC és CA szakaszokon végig haladva, visszajut A-ba (lásd ábra),

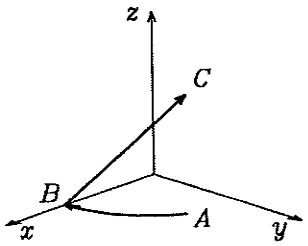


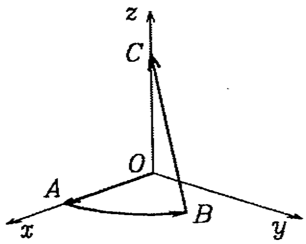


53. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{(y-1)^3}{x+1}\mathbf{i} + z^3\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; az integrálás útját ($\mathcal{G}$) a mellékelt ábra mutatja, ahol $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,1)$; CD az $\dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $x = 0$ $(y \geq 0,\ z \geq 0)$ egyenletrendszerű ellipszisív,

54. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{1+y}\mathbf{i} + \dfrac{1}{z(x-1)(x-2)}\mathbf{j}$; $\mathcal{G}$ az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\sin \pi t + \mathbf{k}\pi \cos \pi t$ $(0 \leq t \leq \frac{1}{2})$ paraméteres vektoregyenletű görbe a paraméter növekedésének megfelelő irányítással,

55.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\dfrac{yz}{x^2}\mathbf{i} + \dfrac{z}{x}\mathbf{j} + \dfrac{y}{x}\mathbf{k}$; az integrálás útját ($\mathcal{G}$) az bal oldali ábra mutatja, ahol $A(1,\sqrt{3},0)$, $B(2,0,0)$, $C(1/\sqrt{3},2)$; az AB ív origó középpontú, 2 sugarú körív (bal oldali ábra),





56.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3x^2y^2\ln(z+2)\mathbf{i} + 2x^3y\ln(z+2)\mathbf{j} + \dfrac{x^3y^2}{z+2}\mathbf{k}$; az integrálás útját ($\mathcal{G}$) az jobb oldali ábra mutatja, ahol $A(1,0,0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $C(0,0,1)$; az AB ív origó középpontú, 1 sugarú körív (jobb oldali ábra),

57. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}(\mathbf{r}^2\mathbf{r})$; $\mathcal{G}$ az $\mathbf{r}(t) = 2(\mathbf{i}\cos^2 t + \mathbf{j}\sin t\cos t + \mathbf{k}\sin t)$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$ paraméteres vektoregyenletű görbe a paraméter növekedésének megfelelő irányítással.

Számítsuk ki a következő feladatokban megadott $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény vektorértékű vonalintegrálját az adott $\mathcal{G}$ görbeív mentén:

58.* A **45.** feladatban szereplő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ és $\mathcal{G}$,

59. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; az integrálás útja ugyanaz, mint a **45.** feladatban,

60. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x+y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} - (y+z)\mathbf{k}$; $\mathcal{G}$ a $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ paraméteres vektoregyenlettel megadott görbe a paraméter növekedésével ellentétes irányítással,

61. Az **52.** feladatban szereplő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ és $\mathcal{G}$,

62.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|$; az integrálás útja ($\mathcal{G}$) az $y = x^2$ egyenletű parabolikus hengerből a $z = \frac{1}{2}$ egyenletű síkkal kimetszett görbének az $A\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ ponttól kiinduló és a $B\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ pontba futó íve.

Felületmenti integrál

D 18.13 Legyen az $\mathcal{F}$ felületet megadó $\mathbf{r}(u,v)$ függvény a felület minden pontjában mindkét változója szerint parciálisan differenciálható, legyenek a parciális deriváltak folytonosak és $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ (azaz létezzen minden pontban a felületi normális (**D 17.29**)). Az $\mathcal{F}$ felületet **kétoldalúnak** nevezzük, ha a felület bármely zárt görbéjén az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ **felületi normálvektort** végigvezetve nem változik meg az iránya, ha a kiindulási pontba visszajut. A kétoldalú $\mathcal{F}$ felületet **irányítottnak** nevezzük, ha az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ felületi normálvektort kijelöljük a felület minden pontjában. (A felület másik oldala ebben az esetben a $-\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektorral van irányítva.) Az $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dF}$ **skalárértékű**, illetve az $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{dF}$ **vektorértékű felületmenti (felületi) integrált** kétoldalú irányított felületen definiáljuk (I. Szász G., Matematika II., 172 – 173.o.). A felületmenti integrálok előjelet váltanak, ha a felület irányítását megfordítjuk. Zárt felület esetén az $\oint$ integráljel is használatos. A továbbiakban a skalárértékű felületmenti integrál helyett röviden felületmenti integrált mondunk.

T 18.14 Ha $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ egymáshoz csatlakozó (közös belső pont nélküli) felületdarabok, mégpedig az $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ és $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ feületdarabok ugyanúgy vannak irányítva, akkor

$$\int_{\mathcal{F}_1} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dF} + \int_{\mathcal{F}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dF} = \int_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dF}.$$

T 18.15 Ha az $\mathcal{F}$ felületdarab az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ ($(u,v) \in T$) paraméteres vektoregyenlettel van megadva, továbbá az $\mathcal{F}$ felületdarabnak van felszíne (például, ha minden pontja reguláris (**D 17.28**)) és $\mathcal{F}$-en létezik a felületmenti integrál, akkor

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dF} = \pm \iint_T \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dT = \pm \iint_T \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\,dT,$$

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{dF} = \pm \iint_T \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \times (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dT.$$

(A + és – előjelek közül a kijelölt irányításnak megfelelőt kell figyelembe venni.)

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi feladatokban a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvények felületi integrálját a megadott egyenletű $\mathcal{F}$ felületdarab mentén, ha a felület az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektorral van irányítva (**63** – **68**. feladatok):

63.• $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
$\mathcal{F}: \ \mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}, \ 0 \le u \le 3, \ 0 \le v \le 1,$

64. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$;
$\mathcal{F}: \ \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + 2\mathbf{k}, \ 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le \frac{\pi}{2},$

65. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
$\mathcal{F}: \ \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}3\cos v + \mathbf{j}3\cos u \sin v + \mathbf{k}\sin u, \ 0 \le u \le \pi, \ 0 \le v \le 2\pi,$

66. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{k}$; $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (u + 2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u^2 + 3v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $-2 \le v \le 0$,

67.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$; $\mathcal{F}:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$,

68. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $\mathcal{F}:\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$, $z \ge 0$,

69.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{xz}\mathbf{i} + \dfrac{1}{yz}\mathbf{j}$; $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = 5(\mathbf{i}\cos^3 u\cos v + \mathbf{j}\cos^3 u \sin v + \mathbf{k}\sin^3 u)$, $\dfrac{\pi}{4} \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 2\pi$.

70.* Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ vektor-vektorfüggvény felületi integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ egyenletű gömbfelület külső oldalán (azaz kifelé mutató felületi normálvektorral).

71.* Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektor-vektorfüggvény felületi integrálját az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és az $x + y + z = a (> 0)$ egyenletű síkokkal határolt tetraéder külső felületén.

Számítsuk ki a következő feladatokban a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvények vektorértékű felületi integrálját a megadott egyenletű $\mathcal{F}$ felületdarab mentén, ha a felület az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektorral van irányítva:

72.* Az **62.** feladatban szereplő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ és $\mathcal{F}$,

73. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}(u+1) + \mathbf{j}(v - u) - \mathbf{k}v$, $-1 \le u \le 0$, $-1 \le v \le 0$,

74. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + 2\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$.

Integrálredukciós tételek

T 18.16 Határolja az $\mathcal{F}$ kétoldalú irányított felületet a $\mathcal{G}$ zárt görbe. Ha a $\mathcal{G}$ görbét úgy irányítjuk, hogy a felületi normálvektorok felől visszanézve a $\mathcal{G}$ görbére az irányítás pozitív forgásiránynak felel meg, akkor

$$\oint_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F},$$

feltéve, hogy a két integrál létezik (**Stokes tétele**). (Ha $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ minden változója szerint parciálisan differenciálható, s ezek a deriváltak folytonosak, akkor az integrálok léteznek.)

T 18.17 Stokes tételének speciális esete az úgynevezett **Green-tétel**, amely a kettős és a görbementi integrál kapcsolatát mutatja:
Ha az xy koordináta-síkbeli $\mathcal{G}$ zárt görbe az egyszeresen összefüggő T tartományt határolja ebben a síkban és a $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)$ kétváltozós valós függvényeknek még az első parciális deriváltjai is folytonosak T-n, akkor

$$\iint_T \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dT = \oint_{\mathcal{G}} (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j})\, d\mathbf{r},$$

feltéve, hogy ezek az integrálok léteznek és $\mathcal{G}$ irányítása a $\mathbf{k}$ vektor felől visszanézve a görbére pozitív forgásiránynak felel meg.

T 18.18 Gauss-Osztrogradszkij-tétel: Ha a V térbeli tartományt a zárt $\mathcal{F}$ felület határolja, akkor

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, dV = \oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F},$$

feltéve, hogy a két integrál létezik, és $\mathcal{F}$ felületi normálvektora kifelé mutat.

T 18.19 Legyen T a háromdimenziós térnek egy zárt felülettel határolt része, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ pedig a T-n értelmezett vektor-vektorfüggvény, amelynek a rotációja is létezik T-n. A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ akkor és csak akkor örvénymentes T-n, ha integrálja a T-ben futó minden olyan zárt görbe mentén zérus, amelyen ez az integrál létezik (azaz, ha T-ben futó bármely görbe mentén vett integráljának értéke, ha létezik, csak a kezdő- és végponttól függ).
Ha $\mathbf{v}(\mathbf{r})$-nek divergenciája létezik T-n, úgy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ akkor és csak akkor forrásmentes T-n, ha integrálja a T-ben elhelyezkedő minden olyan zárt felületen zérus, amelyen ez az integrál létezik (azaz, ha T-ben elhelyezkedő bármely felület mentén vett integráljának értéke, ha létezik, csak a felület határoló görbéjétől függ).

Feladatok

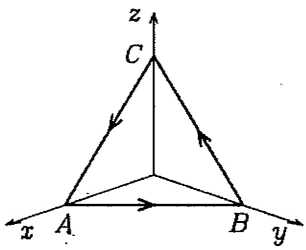
A következő feladatokban, ha lehetséges, akkor Stokes tételével (**T 18.16**) vagy Green tételével (**T 18.17**) számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény görbementi integrálját a megadott úton:

75.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$; az integrálás útja az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ egyenlettel megadott kör a paraméter növekedésének irányában,

76. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy - z)\mathbf{i} + (x^2 + z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$; az integrálás útja a $16x^2 + 9y^2 = 144$ egyenletű elliptikus hengernek és a $z = 2$ síknak a metszésvonala a $\mathbf{k}$ egységvektorból visszanézve pozitív forgásiránnyal,

77.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (x+y+z)\mathbf{k}$; az integrálás útja az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}a\cos t + \mathbf{k}a(\sin t + \cos t)$ $(a > 0,\ 0 \le t \le 2\pi)$ paraméteres vektoregyenlettel megadott $\mathcal{G}$ görbe a paraméter növekedésének irányában,

78.$^{\triangleright}$ $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$; az integrálás útja az ábrán látható, ahol $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ $(a \ne 0)$,



79.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2-yz)\mathbf{i}+(y^2-xz)\mathbf{j}+(z^2-xy)\mathbf{k}$; az integrálás útja az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}\frac{bt}{2\pi}$ $(a > 0,\ b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi)$ paraméteres vektoregyenlettel megadott csavarvonal a paraméter növekedésének irányában,

80.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2(x^2+y^2)\mathbf{i} + (x+y)^2\mathbf{j}$; az integrálás útja az xy koordináta-síkbeli $A(1,1)$, $B(2,2)$ és $C(1,3)$ csúcspontú háromszög a $\mathbf{k}$ vektor irányából visszanézve pozitív forgásiránnyal,

81. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -x^2y\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}$; az integrálás útja az $x^2+y^2=a^2$ egyenletű kör, pozitív forgásiránnyal,

82. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{i} + y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))\mathbf{j}$; az integrálás útja az $1 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$ egyenlőtlenségekkel megadott téglalapot határoló zárt töröttvonal, pozitív forgásiránnyal.

83.* Bizonyítsuk be, hogy Green tételéből (**T 18.17**) egy egyszeresen összefüggő T tartomány $A(T)$ területére a következő képletek kaphatók:

$$A(T) = \oint_{\mathcal{G}} x\mathbf{j}\,d\mathbf{r} = -\oint_{\mathcal{G}} y\mathbf{i}\,d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{G}}(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})\,d\mathbf{r}.$$

Az előző feladat segítségével számítsuk ki a **84 – 86.** feladatokban az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ paraméteres vektoregyenlettel megadott zárt görbék által határolt tartományok területét:

84.* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}b\sin t$; $a > 0,\ b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$ (**ellipszis**, l. a **17.140** feladatot!),

85.* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos^3 t + \mathbf{j}b\sin^3 t$; $a > 0,\ b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$ (**asztroid**),

86.* $\mathbf{r}(t) = a(2\cos t - \cos 2t)\mathbf{i} + a(2\sin t - \sin 2t)\mathbf{j}$ $a > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$ (**kardioid**).

87.* Számítsuk ki görbementi integrállal az $y = x^2$, $x = y^2$ és az $8xy = 1$ egyenletű görbék által határolt (xy koordináta-síkbeli) tartomány területét. Számítsuk ki a területet a **D 13.10**-ben megismert módon is.

88.* Számítsuk ki görbementi integrállal az $y = x^3$ és az $x = y^3$ egyenletű görbék által határolt (xy koordináta-síkbeli) tartomány területét. Számítsuk ki a területet a **D 13.10**-ben megismert módon is.

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel (**T 18.18**) alkalmazásával számítsuk ki a következő feladatokban az adott $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény felületi integrálját:

89.* A **71.** feladatban szereplő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény és integrálási tartomány,

90.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$; az integrálási tartomány az a zárt $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral, amelyet az $x^2+y^2=4$ egyenletű hengerfelület, valamint a $z=-1$ és a $z=2$ egyenletű síkok határolnak,

91.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$; az integrálási tartomány az $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ egyenletű $\mathcal{F}$ felület befelé mutató felületi normálvektorral,

92.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3xy\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-4xz\mathbf{k}$; az integrálási tartomány az $x^2+y^2+z^2-4y-2z+4 = 0$ egyenletű $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral,

93. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2y^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$; az integrálási tartomány az $z = a^2 - x^2 - y^2$ $(a > 0)$ egyenletű forgási paraboloid és a $z = 0$ egyenletű sík által határolt zárt $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral,

94. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}x^2 + \mathbf{j}y^2 + \mathbf{k}z^2$; az integrálási tartomány a koordinátasíkok és az $x^2 + y^2 + 2z = 1$ egyenletű felület által határolt zárt $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral,

95.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; az integrálási tartomány az $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ egyenletű felület és az xy koordinátasík által meghatározott zárt $\mathcal{F}$ felület befelé mutató felületi normálvektorral,

96.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2y\ln z\,\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + \dfrac{z}{z+1}\mathbf{k}$; az integrálási tartomány a $4x^2 + 4y^2 = z$ egyenletű forgási paraboloid, valamint a $z = 1$ és a $z = 4$ egyenletű síkok által határolt zárt $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral,

97.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{x^3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{y^3}{3}\mathbf{j} + \left(\dfrac{z^3}{3} - 3z\right)\mathbf{k}$; az integrálási tartomány az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletű forgáskúp és a $z = \sqrt{3}$ egyenletű sík által határolt zárt $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral,

98.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{x}{2\sqrt{z+2}}\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + \ln^2 z\,\mathbf{k}$; az integrálási tartomány a $z = x^2 + y^2 + 1$ egyenletű forgási paraboloid és a $z = 2$ egyenletű sík által határolt zárt $\mathcal{F}$ felület kifelé mutató felületi normálvektorral,

99.* $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{y - zye^{y+z}}{2 + \sin(y^2 + z^2)}\mathbf{i} + \dfrac{z}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{x^4 + y^4}\mathbf{k}$; az integrálási tartomány az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű gömb, a $3x^2 + 3y^2 = z^2$ egyenletű kúp, a $z = 1$ és az $y = 0$ egyenletű síkok által meghatározott zárt $\mathcal{F}$ zárt felület, ha $1 \le z \le \sqrt{3}$ és kifelé mutató felületi normálvektorral.

Fizikai alkalmazások

A 18.20 Ha az anyagi pont a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ **erőtérben** mozog valamely $\mathcal{G}$ görbén, akkor az erőtérnek az anyagi ponton végzett W **munkáján** a $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ görbementi integrált (**D 18.9**) értjük. (A görbe irányítása megegyezik az anyagi pont haladási irányával.) Ha a görbe zárt, akkor ezt az integrált az erőtér $\mathcal{G}$ menti **cirkulációjának** nevezzük. (A cirkuláció kiszámítható Stokes-tételével is (**T 18.16**).)

A 18.21 Ha az erőtér potenciálos (**D 18.7**), akkor az anyagi ponton végzett munkája független az úttól, csak a kezdő- és végponttól függ (**T 18.12**), azaz bármely zárt görbementi cirkuláció zérus (**T 18.16** és **T 18.19**).

A 18.22 Az $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F}$ felületi integrált (**D 18.13**) a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ erőtér $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó Φ **fluxusának** nevezzük, amely szemléletesen az $\mathcal{F}$-en áthaladó **erővonalak** számát jelenti; áramló folyadékok esetén pedig az $\mathcal{F}$ felületen időegység alatt átáramló folyadékmennyiséget jelenti, ahol $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ az úgynevezett **sebességtér**. (A felület irányítása megegyezik az áramló folyadék sebességének felületre merőleges összetevőjével.) Ha az $\mathcal{F}$ felület zárt, akkor az előbbi integrál az $\mathcal{F}$ felület által határolt V térfogatból időegység alatt kiáramló folyadékmennyiséget jelenti, $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})$ (**D 18.1**) pedig az úgynevezett térfogategységre vonatkoztatott **forráserősség**. (A Gauss-Osztrogradszkij-tétel **T 18.18**) éppen azt mutatja, miként függ a kiáramló folyadék mennyisége a **források** erősségétől. Ha a V térfogatban nincs forrás, azaz a sebességtér V-n forrásmentes (**D 18.1**), akkor a kiáramló folyadék mennyisége 0.)

Feladatok

100.* Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ erőtér munkáját az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt$ $(a > 0,\ b > 0)$ egyenletű csavarvonal mentén a $t = 0$ időpillanattól a $t = 2\pi$ időpillanatig.

101. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}e^{y-z} + \mathbf{j}e^{z-x} + \mathbf{k}e^{x-y}$ erőtér munkáját az $O(0,0,0)$ pontot és az $A(1,3,5)$ pontot összekötő szakasz mentén.

102. Legyen c állandó érték. Határozzuk meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ cirkulációját az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, illetve a $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ egyenletrendszerű körvonal mentén pozitív forgásirányban.

103.* Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$ erőtérnek van potenciálja. Határozzuk meg a potenciálfüggvényt, és számítsuk ki az erőtér munkáját az $O(0,0,0)$ és az $A(1,1,1)$ pontot összekötő szakasz mentén.

104.* Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ sebességtér Φ fluxusát a $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le 1)$ egyenlettel megadott $\mathcal{F}$ felületen keresztül a felületi normálvektor irányában.

105. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = m\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ $(m \neq 0$ állandó) Φ fluxusát az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenlettel megadott gömbfelületen keresztül kifelé mutató felületi normálvektorral. Vannak-e a gömb belsejében források?

106. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{i} - 3z\mathbf{k}$ sebességtér Φ fluxusát a $z = 4 - y^2$ egyenletű parabolikus henger, valamint az $x = 0$, $x = 1$ és $z = 0$ egyenletű síkok által határolt zárt $\mathcal{F}$ felületen keresztül kifelé mutató felületi normálvektorral.

107. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ sebességtér Φ fluxusát az $\mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $(0 \le x \le \ln 2,\ 0 \le z \le 1)$ paraméteres vektoregyenletű $\mathcal{F}$ felületen keresztül $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z$ irányában.

19. fejezet

Mátrix és determináns

Műveletek mátrixokkal

D 19.1 Az m sorba és n oszlopba rendezett mn elemű sorozatokat $m\times n$ típusú **mátrix**oknak nevezzük. (Csak olyan mátrixokkal foglalkozunk, melyek egy kommutatív G gyűrű elemeiből állnak. G lehet **R**, **C**, **Z**, de lehet a polinomok, vagy adott tulajdonságú függvények gyűrűje ...stb.) Két mátrix **egyenlő**, ha egyező típusúak, és egyikük minden sora megegyezik a másik ugyanannyiadik sorával. Egy $m \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix szokásos általános jelölése:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

A csupa zéruselemből álló **O** mátrixot **zérusmátrix**nak nevezzük. **Egységmátrix** az a négyzetes — azaz $n \times n$ típusú — $\mathbf{E}$ ill. $\mathbf{E}_n$ mátrix, melynek főátlójában — azaz az a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} elemek helyén — csupa 1 áll, a többi helyen csupa 0.

D 19.2 Mátrixműveletek: Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n\times p}$. Az $\mathbf{A}$ **transzponáltján**, g-**szeresén** ($g \in G$), $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ **összegén**, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ **szorzatán** az alábbi mátrixokat értjük:

$$\mathbf{A}^T = [a_{ij}]_{m\times n}^T := [a_{ji}]_{n\times m}, \quad g\mathbf{A} = g\,[a_{ij}]_{m\times n} := [ga_{ij}]_{m\times n}, \quad -\mathbf{A} := (-1)\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n} := [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}, \; \mathbf{BC} = [b_{ij}]_{m\times n}[c_{ij}]_{n\times p} = \left[\sum_{t=1}^{n} b_{it}c_{tj}\right]_{m\times p}$$

(Az utóbbi kifejezés azt jelenti, hogy a $\mathbf{BC}$ szorzatmátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem a $\mathbf{B}$ mátrix i-edik sorvektorának és a $\mathbf{C}$ mátrix j-edik oszlopvektorának skaláris szorzata. Egy $m \times n$ és egy $p \times q$ típusú mátrix csak akkor szorozható össze, ha $n = p$, és ekkor a szorzat típusa $m \times q$ lesz.)

T 19.3 Műveleti azonosságok: Az alábbi azonosságok úgy értendők, hogy ha az egyenlőségjel bal oldalán álló művelet elvégezhető, akkor a jobb oldalán álló is, és a két kifejezés egyenlő.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}, \quad \mathbf{O}+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{O};$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \; \mathbf{EA} = \mathbf{A}, \; \mathbf{AE} = \mathbf{A}, \; \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}, \; (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC};$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T, \quad (g\mathbf{A})^T = g\mathbf{A}^T, \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

Feladatok

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha azok végrehajthatók:

1. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix}$,

2. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$,

3. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$,

4. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,

5. $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\ 9 & -1 & 1 & -9\\ 2 & 16 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$,

6. $\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 2 & 3 & \dots & n+1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n+1 & \dots & 2n-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$,

7. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$,

8. $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,

9. $[2]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,

10. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}[2]$.

11. Legyenek adva az $\mathbf{A}_{4\times5}$, $\mathbf{B}_{5\times4}$, $\mathbf{C}_{5\times2}$, $\mathbf{D}_{4\times2}$, $\mathbf{F}_{4\times5}$ mátrixok. Az alábbi kifejezések közül melyek vannak definiálva és mi a típusuk:
a) $\mathbf{AF}$, b) $\mathbf{BD}-\mathbf{C}$, c) $\mathbf{ABF}+\mathbf{DC}^T$, d) $(\mathbf{B}^T+\mathbf{A})\mathbf{C}+\mathbf{D}$.

12. Ha $\mathbf{A}$ $n\times m$ típusú és $\mathbf{ABA}$ értelmezve van, akkor mi $\mathbf{B}$ típusa?

13. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ is értelmezve vannak, akkor $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ is négyzetesek.

Az alábbi feladatokban megadott mátrixoknak számítsuk ki az összes pozitív egész kitevős hatványait:

14. $\mathbf{C}_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

15. $\mathbf{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$,

16.* $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_n\end{bmatrix}$,

17. $\mathbf{C}_n=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$.

18. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}F_{n-1} & F_n\\ F_n & F_{n+1}\end{bmatrix},\ (n\in\mathbb{N}^+),$$

ahol F_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli, melynek rekurzív definíciója: $F_0=0$, $F_1=1$ és $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, ha $n>0$.

19. Az **A**, **B**, **C** mátrixok felhasználásával ellenőrizzük a **T 19.3** azonosságainak teljesülését!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

20. Az előbbi feladat mátrixait felhasználva mutassuk meg, hogy az alábbi egyenlőségek nem azonosságok:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}, \quad (\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2.$$

21. Milyen **A**, **B** mátrixokra áll fenn az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ egyenlőség?

Írjuk fel szummajelek segítségével az alábbi műveletek elvégzése után kapott mátrix megadott elemét:

22. $$[c_1 \ \dots \ c_m] = [a_1 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \qquad c_3 = ?,$$

23. $$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad z_k = ?,$$

24. $[a_{ij}]_{5\times 6} = [b_{ij}]_{5\times 4}[c_{ij}]_{4\times 6}, \qquad a_{24} = ?,$

25.[▷] $[a_{ij}]_{n\times m} = \left([b_{ij}]_{n\times k}[c_{ij}]_{k\times l}\right)[d_{ij}]_{l\times m}, \qquad a_{23} = ?,$

26. $[a_{ij}]_{n\times m} = [b_{ij}]_{n\times k}\left([c_{ij}]_{k\times l}[d_{ij}]_{l\times m}\right), \qquad a_{23} = ?,$

27. $[a_{ij}]_{n\times m} = [b_{ij}]_{n\times k}[c_{ij}]_{k\times l}[d_{ij}]_{l\times m}, \qquad a_{ij} = ?,$

28. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad [c] = \mathbf{B}^T\mathbf{B}, \qquad c = ?.$$

Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az **A** és **B** mátrixokkal és azok megfelelően kiválasztott soraiból ill. oszlopaiból képzett mátrixok segítségével fejezzük ki az alábbiakat:

29.[▷] $\mathbf{A}^2$ második sora, **30.** **AB** első oszlopa,

31. **BA** harmadik sor második eleme, **32.** **BA** harmadik sora.

33. Bizonyítsuk be, hogy minden másodrendű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mátrix kielégíti az $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$ egyenletet, ami azt jelenti, hogy x helyébe az **A** mátrixot, konstans helyébe az egységmátrix konstansszorosát, 0 helyébe a zérusmátrixot helyettesítve az egyenlőség igaz lesz.

34.$^\triangleright$ Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$ két n-edrendű valóselemű négyzetes mátrix. Számítsuk ki az $\mathbf{AB}$ és az $\mathbf{E}$ mátrixok főátlóbeli elemeinek összegét, és ennek segítségével mutassuk meg, hogy az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ egyenlőség semmilyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixra nem teljesülhet.

35. Jelölje egy komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrix konjugáltjának transzponáltját $\mathbf{A}^*$, azaz $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$. (Mátrix konjugáltján azt értjük, hogy a mátrix minden elemét konjugáljuk.) Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

Determináns

D 19.4 A kommutatív G gyűrű elemeiből képzett n-edrendű négyzetes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrix **determinánsán** értjük és det $\mathbf{A}$-val vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

-nel jelöljük a szintén G-beli

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

elemet, ahol $A_{ik} = (-1)^{i+k}D_{ik}$, és D_{ik} az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsa. Az elsőrendű mátrix determinánsa a benne szereplő egyetlen elemmel egyenlő. Azt mondjuk, hogy a det $\mathbf{A}$ determinánsnak D_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó **aldeterminánsa**, A_{ik} pedig az **előjeles aldeterminánsa**.

T 19.5 A determinánst bármely sora vagy oszlopa szerint „kifejtve" is megkaphatjuk, azaz

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

és

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad (j = 1,2,\dots,n).$$

T 19.6 Műveletek determinánsokon:

1. Ha a determinánst főátlóján tükrözzük, értéke nem változik.
2. Ha a determináns két sorát felcseréljük, értéke (-1)-szeresére változik.
3. Ha egy sor helyébe annak konstansszorosát írjuk, a determináns értéke is ugyanannyiszorosára változik.
4. Ha a determináns egyik sorához egy másik sorának konstansszorosát adjuk, értéke nem változik.
5. Ha az i-edik sorban csupa kéttagú összeg szerepel, akkor a determináns egyenlő annak a két determinánsnak az összegével, amelyek i-edik sorában e kéttagú összegek első, illetve második tagja áll, minden más soruk pedig megegyezik az eredeti determináns ugyanannyiadik sorával.

T 19.7 Determináns értéke:

1. Ha a főátló alatt csupa zérus áll, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzatával egyenlő.
2. A determináns értéke pontosan akkor zérus, ha sorvektorai lineárisan összefüggőek. Speciálisan, igaz a további két állítás:
3. Ha a determináns egyik sorának minden eleme zérus, akkor a determináns értéke is zérus.
4. Ha a determináns egyik sora a másiknak konstansszorosa, akkor a determináns értéke zérus.
5. Az 1.-ben az „alatt" helyébe „felett" is írható, a 2.–4.-ben pedig sor helyett oszlop.

D 19.8 Egy kommutatív G gyűrű elemeiből képzett mátrix vagy determináns **elemi sorátalakításain** értjük
1. két sorának felcserélését,
2. egy sorának szorzását G valamely nem-zérus elemével,
3. egy sor G-beli elemmel vett szorzatának valamely másik sorhoz adását.

Hasonlóan definiálhatók az **elemi oszlopátalakítások** is. Az elemi sor- és oszlopátalakításokat **elemi átalakításoknak** nevezzük.
A megoldásokban az elemi átalakításokra rövidítéseket használunk, ezek a következők:
1. az i-edik és j-edik sort (oszlopot) felcseréljük: $S_i \leftrightarrow S_j$ $(O_i \leftrightarrow O_j)$,
2. az i-edik sort (oszlopot) szorozzuk k-val: kS_i (kO_i),
3. a j-edik sor (oszlop) k-szorosát az i-edik sorhoz (oszlophoz) adjuk: $+kS_j \to S_i$ $(+kO_j \to O_i)$.

P 19.9 Determináns kiszámítása: Determináns kiszámítását a gyakorlatban úgy végezzük, hogy elemi átalakítások (lásd **D 19.8**) segítségével a determinánst olyan alakra hozzuk, melyből a determináns értéke gyorsan leolvasható (lásd **T 19.7**), illetve amelyből a definíció (**D 19.4**) alapján könnyebben kiszámítható. Ha egyszerűbb módszert nem találunk, igyekezzük a determinánst a **D 19.7** 1. pontjában leírt „háromszögalakra" hozni. Az alábbi példa egy ilyen háromszögalakra-hozást szemléltet.

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16.$$

1. lépés: Cseréljük ki az első és második sort, hogy az első sor első eleme 1 legyen, s így ne kelljen törtekkel számolni. A determináns értéke (-1)-szeresére változik.
2. lépés: Az első sor (-3)-, (-1)- ill. (-2)-szeresét adjuk a második, harmadik ill. negyedik sorhoz.
3. lépés: Hogy a második sor második eleme is 1 legyen, emeljünk ki 2-t a második sorból.
4. lépés: A második sort ill. (-1)-szeresét adjuk a harmadik ill. negyedik sorhoz.
5. lépés: Adjuk a harmadik sort a negyedikhez. A determináns értéke -16.

Leolvasható a determináns értéke akkor is, ha valamilyen ismert értékű determinánssá alakítjuk, ami lehet például az alábbi:

T 19.10 Vandermonde-féle determináns:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{n-1} & v_2^{n-1} & \dots & v_n^{n-1} \end{vmatrix} = (v_2-v_1)(v_3-v_1)(v_3-v_2)\dots(v_n-v_{n-1}) = \prod_{i<j}(v_j-v_i).$$

Feladatok

A definíció segítségével számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

36.• $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, **37.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Egy megfelelően választott sora vagy oszlopa szerint fejtsük ki az alábbi determinánsokat:

38. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, **39.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

40.• A T 19.7 valamelyik állítását felhasználva állapítsuk meg az alábbi determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

Sorcserék vagy oszlopcserék segítségével hozzuk egyszerűbb alakra (például háromszögalakra) az alábbi determinánsokat, és így számítsuk ki értéküket:

41.▹• $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **42.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

43. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, **44.**• $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

45. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

46.▷ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

47.▷ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$.

Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

48.▷ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$,

49.▷ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$,

50. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

51. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

52.▷ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$,

53.▷ $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$,

54.▷ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$,

55. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,

56.• $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{vmatrix}$,

57.▷ $\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ b_1 & a & b_2 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ b_1 & b_2 & a & \dots & b_{n-1} & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & 1 \end{vmatrix}$,

58. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$,

59.* $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$,

60.* $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

61.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy

$$D=\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix}=(p-q)(p-r)(p-s)(q-r)(q-s)(r-s).$$

62.$^\triangleright$ A determináns sorain végrehajtott átalakítások segítségével igazoljuk, hogy ha egy determináns sorvektorai lineárisan összefüggőek, akkor a determináns értéke zérus.

Az előző feladat állítását felhasználva, a determináns értékének közvetlen kiszámítása nélkül igazoljuk, hogy

63.$^\triangleright$ $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}=0.$ **64.**$^\triangleright$ $\begin{vmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & 0 & \ln 2 \end{vmatrix}=0.$

65. Mutassuk meg, hogy bármely polinom kifejezhető determináns alakban az alábbi módon:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

66. Mutassuk meg, hogy az $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ képletekkel definiált Fibonacci-sorozat n-edik eleme egyenlő az alábbi $n\times n$-es determinánssal:

$$a_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

67.* Legyen

$$P_n=\begin{vmatrix} a_n & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cfrac{1}{\ddots\, \cfrac{}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}}.$$

68.ᐅ Számítsuk ki a Pascal-háromszögből képzett alábbi determinánst úgy, hogy az utolsó oszloppal kezdve mindegyik oszlopból kivonjuk az előzőt, majd mindegyik sorból az előzőt!

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

69. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést:

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & x & x & \dots & x \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & x & \dots & x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = (1-x)^n.$$

Legyen $F(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)$. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat:

70.ᐅ
$$\begin{vmatrix} F(1) & F(2) & F(3) & \dots & F(n+1) \\ F(2) & F(3) & F(4) & \dots & F(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(n+1) & F(n+2) & F(n+3) & \dots & F(2n+1) \end{vmatrix},$$

71.ᐅ
$$\begin{vmatrix} F(x) & F'(x) & F''(x) & \dots & F^{(n)}(x) \\ F'(x) & F''(x) & F'''(x) & \dots & F^{(n+1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F^{(n)}(x) & F^{(n+1)}(x) & F^{(n+2)}(x) & \dots & F^{(2n)}(x) \end{vmatrix}.$$

72. Legyenek az f_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ függvények differenciálhatóak valamely T halmazon. Mutassuk meg, hogy ekkor a belőlük képzett alábbi determinánsok is differenciálhatóak, és fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f'_{31} & f'_{32} & f'_{33} \end{vmatrix}.$$

A determináns értékének kiszámítása nélkül bizonyítsuk be az alábbi oszthatóságokat, felhasználva azt, hogy 343, 637, 525, 33516, 40572, 44541, 50022 és 84042 osztható 7-tel.

73.[*] $7 \mid \det \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, **74.**[*] $630 \mid \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

75.[*] Mutassuk meg, hogy az a, b, c oldalú háromszög t területére

$$t^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

76.[*] Mutassuk meg, hogy az $A_i(a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ pontok által meghatározott tetraéder előjeles térfogata

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

77.[*] Az előző feladat állítását felhasználva döntsük el, hogy egy síkon vannak-e az alábbi pontok:

$$A_1(2,3,-4),\quad A_2(3,-1,-6),\quad A_3(-1,5,2),\quad A_4(2,1,-4).$$

78. A determináns négyzetének kiszámításával és a determinánsok szorzástételének (T 19.15) alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & -a & -d & c & f & -e & h & -g \\ c & d & -a & -b & g & -h & -e & f \\ d & -c & b & -a & h & g & -f & -e \\ e & -f & -g & -h & -a & b & c & d \\ f & e & h & -g & -b & -a & d & -c \\ g & -h & e & f & -c & -d & -a & b \\ h & g & -f & e & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

79. Mutassuk meg, hogy az $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$ szorzat előállítható két szám négyzetének összegeként, azaz

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) = (z_1^2+z_2^2),$$

ahol z_1 és z_2 mindegyike külön az x_i és külön az y_i változóknak is lineáris kifejezése. (Hasonló összefüggések bizonyíthatóak négy illetve nyolc négyzetszám összegéről is. Például a négy szám négyzetösszegére vonatkozó képlet

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = (z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2),$$

ahol z_i az x_i és az y_i $(i = 1,2,3,4)$ változókban lineáris. A megoldáshoz használjuk fel az előző feladat állítását.)

Mátrix rangja

D 19.11 Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ **mátrixból kiválasztható determinánson** a mátrix k különböző sorának és oszlopának kereszteződésében álló elemek alkotta determinánst, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

alakú determinánst értünk, ahol $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$.

D 19.12 Az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható nem zérus értékű determinánsok rendszámának maximumát az $\mathbf{A}$ mátrix **rangjának** nevezzük, és $\operatorname{rang}\mathbf{A}$-val jelöljük.

T 19.13 Rangszámtétel: Test elemeiből képzett mátrix rangja elemi átalakítások közben nem változik.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját a definíció alapján:

80. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, **81.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, **82.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$,

83. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Elemi átalakítások alkalmazásával számítsuk ki az alábbi valós, illetve komplex elemű mátrixok rangját:

84.• $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, **85.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, **86.▷** $\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$,

87.▷ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, **88.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, **89.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Az a, b milyen értékeire lesz az alábbi mátrixok rangja 1, 2 ill. 3?

90.▷ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ b & 0 & 5 \end{bmatrix}$, **91.▷** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & a & b \end{bmatrix}$, **92.** $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

93. $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$, **94.*** $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$, **95.** $\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{bmatrix}$.

Határozzuk meg a következő $\mathbf{A}$ mátrix rangját a paraméter (paraméterek) függvényében:

96. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$, **97.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

98. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & a & b & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & (b-3) \end{bmatrix}$, **99.** $\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & \beta & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Reguláris és szinguláris mátrixok, mátrix inverze

D 19.14 Test elemeiből képzett négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot **regulárisnak** nevezünk, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, illetve **szingulárisnak**, ha $\det \mathbf{A} = 0$.

D 19.15 Determinánsok szorzástétele: Az egyező típusú négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokra igaz, hogy

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

D 19.16 Az $n \times n$ típusú $\mathbf{A}$ **mátrix inverzén** olyan $\mathbf{M}$ mátrixot értünk, amelyre

$$\mathbf{AM} = \mathbf{MA} = \mathbf{E}_n,$$

ahol $\mathbf{E}_n$ az $n \times n$ típusú egységmátrixot jelöli.

T 19.17 Szinguláris mátrixnak nincs inverze, reguláris mátrixnak egyetlen inverze van, mégpedig az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrix inverze az $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [A_{ij}]_{n\times n}^T$ mátrix, vagyis az előjeles aldeterminánsokból képzett mátrix transzponáltjának a determináns reciprokával vett szorzata.

T 19.18 Az $\mathbf{A}$ mátrix legyen $n \times n$, az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{B}$ legyenek $n \times m$, az $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok legyenek $k \times n$ típusúak. Ha $\mathbf{A}$ reguláris, akkor az

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \text{és az} \quad \mathbf{YA} = \mathbf{C}$$

mátrixegyenletek egyértelműen megoldhatók.

P 19.19 Mátrix inverzének kiszámítása: Egy mátrix inverzének kiszámítására a gyakorlatban a **T 19.17** tételbeli képletet — nagy műveletigénye miatt — csak ritkán használjuk. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzét azonban kiszámíthatjuk úgy, hogy elemi sorátalakításokkal $\mathbf{A}$-t az egységmátrixszá transzformáljuk (ha ez nem lehetséges, akkor $\mathbf{A}$ szinguláris), és ezzel párhuzamosan az egységmátrixon elvégezzük ugyanazokat az elemi sorátalakításokat, mely így az $\mathbf{A}$ mátrix inverzébe fog transzformálódni (a módszer helyességének igazolására nézve lásd a **120.** feladatot). Az eljárást az egyszerűség kedvéért csak egy 2×2-es mátrixon mutatjuk be, bár alkalmazása éppen a nagyobb méretű mátrixok esetén hasznos. Például az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix inverzének kiszámítása a következőképpen történhet: e mátrixot egyesítjük az egységmátrix-szal, majd az első sor 3-szorosát levonjuk a másodikból ($-3S_1 \to S_2$), a második kétszeresét az elsőhöz adjuk ($+2S_2 \to S_1$), végül a második sort szorozzuk (-1)-gyel ($-S_2$):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Feladatok

A **T 19.17** tételbeli képlet segítségével számítsuk ki az alábbi **A** mátrixok inverzét:

100.▷ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, **101.**▷ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, **102.** $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$,

103.• $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, **104.**• $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, **105.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

106. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **107.** $\begin{bmatrix} 1+i & i \\ i & i \end{bmatrix}$, **108.** $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Elemi sorátalakítások alkalmazásával határozzuk meg az alábbi **A** mátrixok inverzét:

109.• $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, **110.** $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 9 & 10 & 14 \end{bmatrix}$, **111.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

112. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **113.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **114.** $\begin{bmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

115.• $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, **116.** $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **117.** $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$.

118. **Elemi mátrix**nak nevezünk egy mátrixot, ha az vagy egységmátrix, vagy egy egységmátrixból egyetlen elemi átalakítással megkapható (l. **D 19.8**). Az alábbi mátrixok közül melyek elemiek, és melyek nem:

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

119. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{E}_n$ egységmátrixon elvégzünk egy elemi sorátalakítást, akkor olyan elemi mátrixot kapunk, amellyel balról szorozva bármely $\mathbf{A}_{n\times m}$ mátrixot, a kapott eredmény az $\mathbf{A}_{n\times m}$ mátrixból ugyanazzal az elemi sorátalakítással kapható meg. Ez azt jelenti, hogy ha egy elemi sorátalakítás az $\mathbf{E}$ egységmátrixot az $\mathbf{E}'$ mátrixba, az $\mathbf{A}$ mátrixot az $\mathbf{A}'$ mátrixba képezi, akkor $\mathbf{E}'\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Hasonló eredmény igaz elemi oszlopátalakításokkal is, ha az elemi mátrixszal jobbról szorzunk.)

120.* Az előző feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be a mátrixinvertálás **P 19.19** pontban leírt módszerének helyességét.

121.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ invertálható, és

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}.$$

122.* Legyen

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{T}_\alpha\mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_\beta\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_{\alpha+\beta} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_\alpha^{-1} = \mathbf{T}_{-\alpha}.$$

123.▷ Egy $\mathbf{A}$ mátrixot **ortogonálisnak** nevezünk, ha $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$, azaz ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ determinánsa $+1$ vagy -1.

124.▷ Mutassuk meg, hogy tetszőleges 1-determinánsú, 2×2-es ortogonális mátrix felírható az alábbi alakban:

$$\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}.$$

125.▷ Egy $\mathbf{A}$ mátrixot **unitérnek** nevezünk, ha $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}$, azaz ha $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$. Mutassuk meg, hogy két unitér mátrix szorzata unitér, továbbá hogy unitér mátrix determinánsának abszolút értéke 1.

Gráfokkal kapcsolatos mátrixok

D 19.20 Legyen P és E két, közös elem nélküli véges halmaz, f pedig egy E minden elemén értelmezett, P^2-be, azaz a P-beli elempárok halmazába képező függvény. Azt mondjuk, hogy P, E és f egy $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, E, f)$ gráfot alkot, ahol P a **szögpontok** (vagy **pontok**), E az **élek** halmaza. Az e élhez rendelt p_1 és p_2 pontot az él **végpontjainak** nevezzük, és azt mondjuk, hogy az él összeköti a két pontot, illetve, hogy p_1 és e, valamint p_2 és e **illeszkednek**. Egy szögpontra illeszkedő élek számát a szögpont **fokának** nevezzük. Egy gráfot k-**regulárisnak** hívunk, ha minden szögpontjának k a foka. A gráfot **irányítatlannak** mondjuk, ha benne minden (p_1, p_2) szögpontpárt a (p_2, p_1) párral azonosnak tekintünk, és **irányítottnak** mondjuk, ha a $p_1 = p_2$ esetet kivéve a (p_1, p_2) és a (p_2, p_1) szögpontpárokat megkülönböztetjük. Ha külön nem említjük, akkor a gráfot irányítatlannak tekintjük.

D 19.21 Egy gráfot **egyszerűnek** nevezünk, ha nincs benne **hurokél** (egy szögpontot önmagával összekötő él), és bármely szögpontpárt legfeljebb egy él köt össze. **Teljes gráfnak** nevezzük azt a gráfot, amelyben bármely szögpontpárt pontosan egy él köt össze.

D 19.22 Egy irányítatlan gráfban váltakozva pontokat és éleket tartalmazó

$$p_1 e_1 p_2 e_2 \dots p_{k-1} e_{k-1} p_k$$

sorozatot $(k-1)$-hosszú **sétának** nevezünk, ha mindegyik felsorolt e_i él a p_i és a p_{i+1} pontokat köti össze. Egy sétát **útnak** nevezünk, ha a benne felsorolt elemek mindegyike különböző, és csak a szomszédaival illeszkedik a sorozat elemei közül. Irányított gráfban még azt a további feltevést tesszük, hogy az e_i él a p_i pontból a p_{i+1}-be vezessen ($i = 1, 2, \dots, k-1$); így az **irányított séta**, illetve **irányított út** fogalmához jutunk. Ha az út (irányított út) definícióján csak annyit változtatunk, hogy legyen $p_1 = p_k$, akkor a **kör (irányított kör)** fogalmához jutunk. Egy egyszerű gráfot **összefüggőnek** nevezünk, ha bármely két különböző pontjához található őket összekötő út (azaz olyan, amelyben az egyik pont p_1, a másik p_k). Az egyszerű, összefüggő, körmentes gráfot **fának** nevezzük.

D 19.23 A $p_1, p_2, \dots, p_n$ szögpontokból és $e_1, e_2, \dots, e_m$ élekből álló irányítatlan gráf **illeszkedési mátrixán (incidenciamátrixán)** azt az $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times m}$ mátrixot értjük, amelyben $x_{ij} = 1$, ha p_i illeszkedik az e_j élre, és $x_{ij} = 0$, ha nem. Irányított gráf illeszkedési mátrixában pedig $x_{ij} = 1$, ha p_i-be vezet az e_j él, $x_{ij} = -1$, ha p_i-ből indul ki az e_j él, és $x_{ij} = 0$, ha a p_i pont és az e_j él nem illeszkedik.

D 19.24 A $p_1, p_2, \dots, p_n$ szögpontokból álló irányítatlan gráf **szomszédsági mátrixán (adjacenciamátrixán)** azt az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ mátrixot értjük, amelyben $a_{ij} = k$, ha a p_i és p_j pontokat k él köti össze ($a_{ii} = k$, ha a p_i ponthoz k hurokél illeszkedik). Irányított gráf szomszédsági mátrixában $a_{ij} = k$, ha a p_i pontból a p_j pontba k irányított él fut.

Feladatok

126. Egy társaságban bemutatkozáskor néhányan kezet fogtak. Mutassuk meg, hogy azok száma, akik páratlan sok emberrel fogtak kezet, páros.

127.* Mutassuk meg, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú szögpontok száma páros.

128. Hány éle van egy n szögpontú k-reguláris gráfnak?

129.* Hány éle van egy n szögpontú teljes gráfnak?

130. Írjuk fel a 4 szögpontú teljes gráf egyik **X** illeszkedési mátrixát (ez nem egyértelmű, az élek sorszámozásától függően más és más mátrixot kapunk), és **A** szomszédsági mátrixát, majd általánosan az n-szögpontú teljes gráf szomszédsági mátrixát.

131.^{P} Írjunk számítógépprogramot, mely felrajzol egy egyszerű gráfot annak incidencia-, vagy szomszédsági mátrixa alapján.

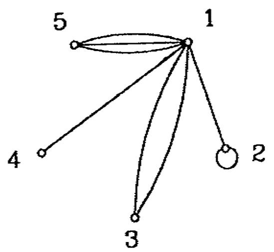
132.^{P} Írjunk számítógépprogramot, melynek inputja egy gráf illeszkedési mátrixa, outputja a szomszédsági mátrixa.

133. Írjuk fel annak a gráfnak egyik illeszkedési mátrixát, és rajzoljuk fel a gráfot, amelynek szomszédsági mátrixa

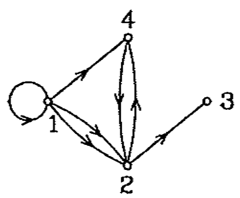
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az alábbi gráfok szomszédsági mátrixát:

134.



135.

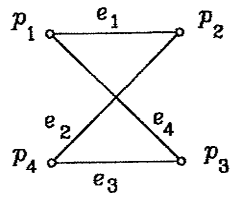


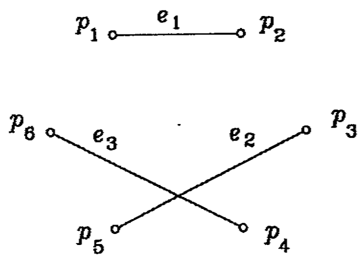
136.* Bizonyítsuk be, hogy egyszerű gráf szomszédsági mátrixának i-edik sorában az elemek összege az i-edik szögpont fokát adja.

137. Mátrixműveletek segítségével állítsuk elő egy n-szögpontú egyszerű gráf szomszédsági mátrixának segítségével az $[d(p_i)]_{n\times 1}$ mátrixot, ahol $d(p_i)$ jelöli a p_i pont fokát.

138. Mutassuk meg, hogy az alábbi bal oldali ábrán látható gráf **X** illeszkedési mátrixára és **A** szomszédsági mátrixára fennáll, hogy

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{A} + 2\mathbf{E}.$$





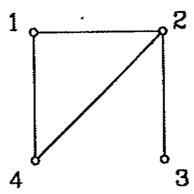
139. Mutassuk meg, hogy a fenti jobb oldali ábrán látható gráf $\mathbf{X}$ illeszkedési mátrixára és $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixára fennáll, hogy

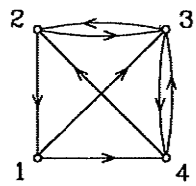
$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{A} + \mathbf{E}.$$

140.* Legyen az n szögpontú és m élű, egyszerű $\mathcal{G}$ gráf minden pontjának foka k. Jelölje $\mathbf{X}$ az illeszkedési mátrixát, $\mathbf{A}$ az szomszédsági mátrixát. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{A} + k\mathbf{E}.$$

141.$^\triangleright$ Írjuk fel az alábbi ábrán látható irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának köbét, majd azt a $[b_{ij}]_{4\times4}$ mátrixot, amelyben b_{ij} megadja az i és j csúcsok közt haladó különböző 3-hosszú séták számát.





142.$^\triangleright$ Írjuk fel az előző ábrán látható irányított gráf szomszédsági mátrixának negyedik hatványát, majd azt a $[b_{ij}]_{4\times4}$ mátrixot, amelyben b_{ij} megadja az i-ből j-be vezető különböző 4-hosszú irányított séták számát.

143.* Mutassuk meg, hogy az n szögpontú, irányítatlan (irányított) gráf szomszédsági mátrixának k-adik hatványában az i-edik sor j-edik eleme megadja az i-edik pontból a j-edik pontba vezető k-hosszú (irányított) séták számát.

144.$^\triangleright$ Legyen egy egyszerű (irányítatlan) gráf szomszédsági mátrixa $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Mutassuk meg, hogy az i-edik pont foka az $\mathbf{A}^2$ mátrix főátlójában álló i-edik elem.

145.* Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixú irányított gráfban akkor és csak akkor nincs irányított kör, ha van olyan k pozitív egész, hogy $\mathbf{A}^k$ a zérusmátrix.

146.* Bizonyítsuk be, hogy a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ szögpontú, $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixú gráfban a p_i és p_j pontok közti legrövidebb út hossza az a legkisebb k egész, amelyre az $\mathbf{A}^k$ mátrixban $a_{ij}^{(k)} \neq 0$.

147. Mutassuk meg, hogy minden legalább két pontú fában van legalább két elsőfokú pont. (Útmutatás: tekintsük a fában található leghosszabb utat.)

148. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fa éleinek száma $n-1$. (Útmutatás: bizonyítsunk teljes indukcióval.)

149. Mutassuk meg, hogy minden n pontú összefüggő $\mathcal{G}$ gráf éleiből kiválasztható néhány él úgy, hogy azok az n szögponton egy fát alkossanak. (Az ilyen fát $\mathcal{G}$ **feszítő fájának** nevezzük.)

150.* Mutassuk meg, hogy egy n pontú fa illeszkedési mátrixának rangja $n-1$.

151.* Mutassuk meg, hogy egy n pontú, összefüggő, hurokélmentes irányított gráf illeszkedési mátrixának rangja $n-1$. (Útmutatás: a sorvektorok összege a zérusvektor.)

20. fejezet

Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszerek

Lineáris egyenletrendszerek és megoldása mátrixinverz és Cramer-szabály segítségével

D 20.1 Lineáris egyenletrendszeren

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

alakú egyenletrendszert értünk, ahol x_1, x_2, ..., x_n az ismeretleneket, a_{ik} $(i = 1, 2, \dots, m;$ $k = 1, 2, \dots, n)$ az egyenletrendszer együtthatóit, c_1, c_2, ..., c_m az egyenletrendszer konstansait jelöli, m az egyenletek, n az ismeretlenek számát.
A fenti egyenletrendszerrel ekvivalens az

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

mátrixegyenlet, a **lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja**, ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A-t az **egyenletrendszer mátrixának**, az

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}, \mathbf{c}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

mátrixot az **egyenletrendszer kiegészített**, vagy **bővített mátrixának** nevezzük. Az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszert **homogénnek** nevezzük, ha $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, és **inhomogénnek**, ha $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$.

T 20.2 Ha a négyzetes **A** mátrix determinánsa nem zérus, akkor az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszer egyetlen megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$.

T 20.3 Cramer-szabály. Ha az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer determinánsa nem zérus, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, és a k-adik ismeretlen értékét a k-adik módosított determinánsnak és az egyenletrendszer determinánsának hányadosa adja:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \text{ ahol } D = \det \mathbf{A} \text{ és } D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & c_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & c_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & c_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Megjegyzés. A Cramer-szabállyal való számolás műveletigénye nagyobb, mint a mátrixinvertálással való számolásé, ezért a Cramer-szabályt konkrét számolási feladatok megoldására ritkán használjuk.)

Feladatok

Mátrix inverzének segítségével (lásd **T 20.2**) oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

1.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} bx_1 - ax_2 &= -2ab \\ -2cx_2 + 3bx_3 &= bc \\ cx_1 + ax_3 &= 0, \end{aligned}$$

ahol $abc \neq 0$.

6. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét mint lineáris egyenletrendszer megoldását, feltéve, hogy az inverz létezik.

A Cramer-szabály (**T 20.3**) segítségével oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

7.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

A **T 20.3** (Cramer-szabály) segítségével határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek kijelölt ismeretlenének értékét:

13.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8, \\ x_4 &= ? \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5, \\ x_1 &= ? \end{aligned}$$

15. Az alábbi egyenletrendszerből határozzuk meg $x_1 - x_2$ értékét.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele, megoldás Gauss-módszerrel

M 20.4 Gauss-módszer. Az alábbiakban ismertetendő módszerrel tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldható. Tekintsük a **D 20.1** definíció szerint megadott,

$$(1)\qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

kiegészített mátrixú egyenletrendszert. Feltehető, hogy $a_{11} \neq 0$, mert az egyenletek cseréjével ez elérhető. Vonjuk le az első egyenlet a_{21}/a_{11}-szeresét a másodikból, a_{31}/a_{11}-szeresét a harmadikból, és így tovább. Ily módon olyan egyenletrendszerhez jutunk, melynek kiegészített mátrixa

$$(2)\qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & d_2 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

($b_{11} \neq 0$, $b_{1i} = a_{1i}$, $i = 1, \dots, n$) alakú. Ha az első egyenlettől eltekintve már minden ismeretlen együtthatója 0, úgy az átalakítással végeztünk. Ha a (2)-nek megfelelő egyenletrendszerben az első egyenleten kívül is van még nemzérus együtthatójú ismeretlen, akkor feltehető, hogy

$b_{22} \neq 0$, mert az egyenletek vagy az ismeretlenek sorrendjének megváltoztatásával ez elérhető. (Az ismeretlenek cseréje az együtthatómátrix megfelelő oszlopcseréjével azonosítható.) Most a (2)-nek megfelelő egyenletrendszer második egyenletének b_{i2}/b_{22}-szeresét vonjuk le az i-edik egyenletből ($i = 1, 3, 4, \ldots, m$). Az eljárást folytatva véges sok lépésben az eredeti egyenletrendszerrel azonos megoldással bíró olyan alakú egyenletrendszerhez jutunk, melynek kiegészített mátrixa

$$(3)\qquad \left[\begin{array}{cccccccc|c} g_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & g_{1,r+1} & \cdots & g_{1n} & h_1 \\ 0 & g_{22} & 0 & \ldots & 0 & g_{2,r+1} & \cdots & g_{2n} & h_2 \\ 0 & 0 & g_{33} & \ldots & 0 & g_{3,r+1} & \cdots & g_{3n} & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & g_{rr} & g_{r,r+1} & \cdots & g_{rn} & h_r \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & h_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & h_m \end{array}\right]$$

alakú, ahol $r = m$ is lehetséges, és ekkor a fenti hosszú ····· vonal alatti rész hiányozni fog. Ha a (3)-nak megfelelő egyenletrendszer megoldható, akkor az első r egyenletből $r = n$ esetén $x_1, x_2, \ldots, x_r$ egyértelműen számítható ki, az $r < n$ esetben pedig $x_1, x_2, \ldots, x_r$ egyértelműen fejezhető ki az $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ismeretlenekkel (ekkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, mert az $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ismeretlenek értékét tetszőlegesen választhatjuk meg).

M 20.5 Módosított Gauss-módszer. Ha a **M 20.4**-ben ismertetett Gauss-módszertől abban térünk el, hogy oszlopcseréket nem végzünk, továbbá a kiválasztott egyenlettel csak az alatta lévők megfelelő együtthatóit nullázzuk ki, akkor az (1)-nek megfelelő lineáris egyenletrendszer az alábbinak megfelelő egyenletrendszerbe vihető át:

$$(4)\qquad \left[\begin{array}{ccccccccccccc|c} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,k_2-1} & g_{1,k_2} & g_{1,k_2+1} & \cdots & g_{1,k_3} & g_{1,k_3+1} & \cdots & g_{1,k_r} & \cdots & g_{1n} & h_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_{2,k_2} & g_{2,k_2+1} & \cdots & g_{2,k_3} & g_{2,k_3+1} & \cdots & g_{2,k_r} & \cdots & g_{2n} & h_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{3,k_3} & g_{3,k_3+1} & \cdots & g_{3,k_r} & \cdots & g_{3n} & h_3 \\ \hdashline & & & & & & & & & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \cdots & g_{r,k_r} & \cdots & g_{rn} & h_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & h_{r+1} \\ \hdashline & & & & & & & & & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & h_m \end{array}\right]$$

ahol $1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_r \leq n$ és $g_{11} \neq 0$, $g_{2,k_2} \neq 0, \ldots, g_{r,k_r} \neq 0$.
Az egyenletrendszer megoldhatósága kiolvasható ebből az alakból, ugyanis könnyen belátható, hogy ha egy mátrix olyan alakú, hogy minden sor vagy csupa nulla, vagy a sor első nem nulla elemének oszlopában az alatta álló elemek nullák, akkor a mátrix rangja megegyezik a nem csupa nulla sorok számával. A megoldáshoz eljuthatunk úgy, hogy felírjuk a (4)-nek megfelelő egyenletrendszert, és kifejezzük rendre az r-edik egyenletből az x_{k_r}, az $(r-1)$-edik egyenletből az $x_{k_{r-1}}, \ldots,$ az 1. egyenletből az x_1 ismeretlent.
Megjegyzés. Ez az eljárás úgy is elvégezhető, hogy a kiválasztott elemek oszlopában az azok feletti elemeket is kinullázzuk, azaz a (4) formulában $g_{1,k_2} = g_{1,k_3} = g_{2,k_3} = \cdots = g_{1,k_r} = g_{2,k_r} = \cdots = g_{r-1,k_r} = 0$. Az ennek megfelelő egyenletrendszerből az x_1, x_{k_2}, $x_{k_3}, \ldots, x_{k_r}$ változók azonnal kifejezhetők a többi változó, mint paraméter segítségével. Így

ez a változat megegyezik az **M 20.4**-ben leírt Gauss-módszerrel, azzal a különbséggel, hogy nincsenek oszlopcserék.

T 20.6 Lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenletrendszer mátrixának és kiegészített mátrixának rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha a közös rang az ismeretlenek számával is megegyezik.
Megjegyzés. A megoldhatóság $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}')$ feltétele ellenőrizhető úgy is, hogy az $\mathbf{A}'$ mátrixot a módosított Gauss-módszernek megfelelő sorátalakításokkal a (4) alakra hozzuk.

T 20.7 Homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális – tehát nem azonosan nulla – megoldása, ha a rendszer mátrixának rangja kisebb az ismeretlenek számánál.
Következmény. Az n egyenletből álló n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa zérus.

Feladatok

Gauss-módszerrel oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

16.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5&=2\\ -2x_1-2x_2-6x_3-8x_4&=10\\ 2x_1+2x_2-3x_3-x_4+3x_5&=17\\ -x_1-x_2+x_3+4x_5&=9\\ 3x_1+3x_2+6x_3+9x_4+8x_5&=15 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 5x_1-x_2+2x_3+x_4&=7\\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4&=1\\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4&=0 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=2\\ 3x_1-x_2+2x_3&=7\\ x_1-x_3&=-2\\ 2x_1+x_2+x_3&=7 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ x_2+x_3+x_4&=2\\ x_3+x_4+x_5&=2\\ x_4+x_5+x_1&=1 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=4\\ -x_1+x_2-x_3&=2\\ 2x_1+x_2+2x_3&=1\\ 4x_1+4x_2+4x_3&=1 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 7x_1+14x_2-21x_3&=7\\ x_1+2x_2-3x_3&=1\\ 5x_1+10x_2+15x_3&=5\\ 3x_1+6x_2-9x_3&=3 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} x_1+x_2&=4\\ 3x_1-x_2&=2\\ -3x_1+5x_2&=2\\ x_1+2x_2&=1 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} x_1-x_2&=3\\ 2x_1+x_2&=1\\ x_1+4x_2&=-8\\ 2x_1+4x_2&=-4 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=1\\ 2x_1+7x_2+2x_3&=0\\ x_1+4x_2+4x_3&=1\\ x_1+4x_2+x_3&=-1\\ 4x_1+15x_2+10x_3&=2 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+4x_4&=3\\ x_2-x_3+3x_4&=1\\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4&=0\\ 3x_1-x_2+4x_3&=5 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_5 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 - 3x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_5 &= 6 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 &= -1 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

31.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= -2 \\ 12x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

A Gauss-módszer alkalmazásával oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket. (Homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának és kiegészített mátrixának rangja mindig megegyezik, és a Gauss-módszernél megengedett elemi mátrixátalakítások közben a kiegészített mátrix utolsó, csupa nullából álló oszlopa nem változik; ezért a számítás közben ez az oszlop elhagyható, akár a közös rang meghatározása, akár a megoldás előállítása a kérdés.)

32.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

33.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixának a rangja, vagy – ha létezik – determinánsa alapján döntsük el, hogy a következő homogén lineáris egyenletrendszereknek van-e nemtriviális megoldásuk.

36.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 6x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_3 - 7x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

39.? Állítsuk elő az $x^2 - 3x + 5$ polinomot az $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x - 2$ polinomok lineáris kombinánációjaként.

40.$^{\triangleright}$ Mutassuk meg, hogy n számú, legfeljebb $(n-2)$-edfokú polinom lineárisan összefüggő.

41.$^{\triangleright}$ Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_n$ legfeljebb $(n-2)$-edfokú polinomok, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig tetszőleges számok. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \ldots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Határozzuk meg az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszerek mátrixának (**A**-nak) és kiegészített mátrixának (**A**$'$-nak) a rangját, majd ezek alapján döntsük el, hogy az egyenletrendszer megoldható-e, vagy nem, illetve ha megoldható, egyértelmű-e a megoldás, vagy pedig végtelen sok megoldás létezik.
(Útmutatás: Először az **A**$'$ rangját számítsuk ki, és eközben lehetőleg csak sorátalakításokat végezzünk, hogy az átalakításokkal kapott mátrixot az **A** rangjának meghatározásához is felhasználhassuk.)

42.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 6x_4 &= 18 \end{aligned}$$

43.
$$\begin{aligned} x_1 - 8x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 7x_2 &= -4 \end{aligned}$$

44.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

45.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_6 &= -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

47.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

48.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 6x_5 &= 37 \\ 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 &= -19 \end{aligned}$$

49.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

50.
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

51.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= -1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi homogén lineáris **egyenletrendszereknek csak triviális megoldása legyen.**

52. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ ax_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

53. $$\left.\begin{aligned} x_1 \cdot (1-a) + 9x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 \cdot (2+a) &= 0 \end{aligned}\right\} a: \text{ valós}$$

Határozzuk meg a paraméter értékét úgy, hogy az alábbi homogén lineáris egyen**letrendszernek legyen nemtriviális megoldása.**

54. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + cx_2 + 5x_3 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - cx_3 &= 0. \end{aligned}$$

Oldjuk meg a következő homogén **lineáris** egyenletrendszereket, amelyekben λ és μ **valós paraméterek.**

55. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + \mu x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

56. $$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + (\lambda - 1)y + 4z &= 0 \\ 3x - 5y + (2-\lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

Állapítsuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszereknek a valós paraméter (paraméterek) **mely értékeire**

a) **nincs megoldásuk,**

b) **van egyetlen (egyértelmű) megoldásuk,**

c) **van végtelen sok megoldásuk.**

57. $$\begin{aligned} (2a+1)x_1 - ax_2 + (a+1)x_3 &= a - 1, \\ (a-2)x_1 + (a-1)x_2 + (a-2)x_3 &= a, \\ (2a-1)x_1 + (a-1)x_2 + (2a-1)x_3 &= a. \end{aligned} \quad (a \text{ paraméter})$$

58. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ \lambda x_1 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

59. $$\begin{aligned} (3a-1)x_1 + 2ax_2 + (3a+1)x_3 &= 1 \\ 2ax_1 + 2ax_2 + (3a+1)x_3 &= a \\ (a+1)x_1 + (a+1)x_2 + 2(a+1)x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

60. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ux_2 &= 2 \\ x_1 + vx_2 &= 2 \end{aligned}$$

61. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= v \\ -x_1 + ux_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

62. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + ux_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= v \end{aligned}$$

63. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 6 \\ -3x_1 + 5x_2 + ax_3 + bx_4 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b - 3 \end{aligned}$$

64.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= \beta \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + \alpha x_4 &= \beta \end{aligned}$$

65.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 5x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= \beta \end{aligned}$$

66.
$$\begin{aligned} ax_1 + a^2x_2 + 3x_3 + (a+1)x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 - 6x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 - 3x_3 &= b \end{aligned}$$

67.
$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= 1, \\ x_1 + ax_2 + abx_3 &= a, \\ bx_1 + a^2x_2 + a^2bx_3 &= a^2b \end{aligned}$$

68.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ ax_1 - 2x_2 + x_3 + bx_4 &= c \end{aligned}$$

69.
$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= c \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= d. \end{aligned}$$

70.
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + (3+\lambda)x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= \lambda + 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + (8+\lambda)x_3 + 9x_4 &= \lambda + 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (8+\lambda)x_4 &= \lambda + 2 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszereket az a, b, v valós paraméterek függvényében. Állítsuk elő a megoldást is!

71.
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}$$

72.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 14 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

73.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + ux_2 &= v \end{aligned}$$

74.
$$\begin{aligned} x + 2y + (a+b)z &= 0 \\ 3x - 2y + az &= b \\ -3x - 6y + (a-b)z &= 2b \end{aligned}$$

75.
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + abx_3 &= 0 \\ bx_1 - ax_2 + abx_4 &= 0 \\ x_2 + ax_3 - bx_4 &= a \\ ax_3 + bx_4 &= b. \end{aligned}$$

76.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 + ax_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ bx_3 + bx_4 &= 0 \\ -x_1 - ax_2 + bx_3 + bx_4 &= c. \end{aligned}$$

77.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 &= d, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 &= d^2. \end{aligned}$$

Mátrix sajátértékei és sajátvektorai

D 20.8 A komplex számokból álló **A** négyzetes **mátrix sajátértékének** nevezzük a λ komplex számot, ha található olyan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, és az ilyen a $\mathbf{v}$ vektorról azt mondjuk, hogy $\mathbf{v}$ az **A mátrixnak** a λ sajátértékhez tartozó **sajátvektora**.

(A definícióból következik, hogy ha $\mathbf{v}_0$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektora, akkor bármely $t\mathbf{v}_0$ is sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, ahol $t \neq 0$.)

T 20.9 Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

A λ akkor és csak akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt az egyenletet az $\mathbf{A}$ **mátrix karakterisztikus egyenletének** nevezzük. Ekkor a λ-hoz tartozó $\mathbf{v}$ sajátvektorok az

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= 0, \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaiként adódnak. (Mivel ennek az egyenletrendszernek a determinánsa nulla, legalább egy egyenlet a többinek lineáris kombinációja.)

D 20.10 Valós számokból álló $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixról azt mondjuk, hogy

$$\mathbf{A} \textbf{ szimmetrikus mátrix}, \text{ ha } \mathbf{A}^T = \mathbf{A},$$
$$\mathbf{A} \textbf{ ferdén szimmetrikus mátrix}, \text{ ha } \mathbf{A}^T = -\mathbf{A},$$

ahol $\mathbf{A}^T$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját.

T 20.11 Valós számokból álló bármely $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix egyértelműen előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, éspedig az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

alakban.

T 20.12 Szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós, ferdén szimmetrikus mátrix minden sajátértéke képzetes szám.

T 20.13 Főtengelytétel. Minden $n \times n$ típusú szimmetrikus mátrixnak van n darab, páronként egymásra merőleges sajátvektora.

Feladatok

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

78. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **79.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, **80.** $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

81. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$, **82.** $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, **83.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

84. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$, 85. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 86. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

87. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, 88. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, 89. $\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

90. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, 91. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 92. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Szemléltessük a főtengelytételt a következő szimmetrikus mátrixokon:

93. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$, 94. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 95. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$,

96. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, 97. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 98. $\begin{bmatrix} 36 & 18 & 12 \\ 18 & 9 & 6 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Bontsuk fel a következő mátrixokat egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére.

99. $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$, 100. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

101. A komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrixot **Hermite-félének** (ejtsd: ermit) nevezzük, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ (definíció szerint $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$). Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ valós mátrixok és $\mathbf{A} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ Hermite-féle mátrix, akkor $\mathbf{X}$ szimmetrikus, $\mathbf{Y}$ ferdén szimmetrikus.

102. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak van negatív képzetes részű sajátértéke, és határozzuk meg a hozzá tartozó sajátvektort.

103. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit. Adjuk meg a legnagyobb valós értékű sajátértékhez tartozó 2 hosszúságú sajátvektort.

104. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\mathbf{A}$ inverzét, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértékeit, és a legkisebb valós sajátértékhez tartozó egységnyi hosszú sajátvektoraikat.

105. Jelöljön $\mathbf{A}$ egy reguláris négyzetes mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{-1}$ sajátvektorai azonosak, sajátértékeik pedig egymás reciprokai.

106. Egy $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$, egy-egy hozzátartozó sajátvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, illetve $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

107. Igazoljuk, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrixnak $\lambda = 0$ pontosan akkor sajátértéke, ha $\det \mathbf{A} = 0$.

108. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{A}$ reguláris, továbbá, hogy az $u = [1, -1, 0]^T$, $v = [-2, 3, 4]^T$, $w = [-1, -3, 2]^T$ vektorok $\mathbf{A}$ sajátvektorai. Ezek alapján határozzuk meg $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

109. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Tudjuk, hogy $\mathbf{A}$-nak egyik sajátértéke $\lambda_1 = 3$, egy másik sajátértékhez tartozó egyik sajátvektora: $\mathbf{v}_2 = [2, 1, -2]^T$. Ezt felhasználva határozzuk meg $\mathbf{A}$ összes sajátértékét és sajátvektorát!

110. Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixnak -1 sajátértéke legyen. Adjuk meg az összes sajátértéket és a legnagyobb valós sajátértékhez tartozó sajátvektorokat.

111. Igaz-e, hogy ha az $\mathbf{A}_{2\times 2}$ mátrix szimmetrikus, akkor a $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = 0$ egyenlet diszkriminánsa nem lehet negatív, x az ismeretlen. (A választ indokoljuk.)

112. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2/3 \\ -2 & -2/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ mátrix sajátértékeit, valamint a legkisebb abszolút értékű sajátértékhez tartozó sajátvektorokat!

113. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 14 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit! Számítsuk ki a legnagyobb és legkisebb (valós) sajátértékhez tartozó sajátvektorokat és az általuk bezárt szöget!

114. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a **B** mátrix legkisebb pozitív sajátértékéhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorokat, és döntsük el, hogy ezek sajátvektorai-e az **A**-nak.

115. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok **AB** szorzatának sajátértékeit és a legnagyobb abszolút értékű sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$ sajátvektorokat!

Lineáris egyenletrendszer közelítő megoldása

T 20.14 Legyen a megoldandó egyenletrendszer

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, & (a_1 \neq 0), \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, & (b_2 \neq 0), \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, & (c_3 \neq 0). \end{cases}$$

Ha az

$$(2) \qquad \begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = 0, \\ x_{n+1} = -\dfrac{b_1}{a_1}y_n - \dfrac{c_1}{a_1}z_n + \dfrac{d_1}{a_1}, \\ y_{n+1} = -\dfrac{a_2}{b_2}x_n - \dfrac{c_2}{b_2}z_n + \dfrac{d_2}{b_2}, \\ z_{n+1} = -\dfrac{a_3}{c_3}x_n - \dfrac{b_3}{c_3}y_n + \dfrac{d_3}{c_3} \end{cases}$$

iterációs képlettel értelmezett $[x_n; n \in \mathbf{N}]$, $[y_n; n \in \mathbf{N}]$, $[z_n; n \in \mathbf{N}]$ sorozatok konvergensek, akkor a

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty} z_n$$

számhármas az (1)-nek megoldása (de (1)-nek lehet más megoldása is).

T 20.15 Ha van olyan $q < 1$ pozitív szám, hogy

$$(4) \qquad \frac{|b_1| + |c_1|}{|a_1|}, \quad \frac{|a_2| + |c_2|}{|b_2|}, \quad \frac{|a_3| + |b_3|}{|c_3|} \leq q,$$

akkor a (2) képletekkel értelmezett $[x_n; n \in \mathbf{N}]$, $[y_n; n \in \mathbf{N}]$, $[z_n; n \in \mathbf{N}]$ sorozatok konvergensek és a (3) számhármas az (1) egyenletrendszer egyetlen megoldása.

Megjegyzés. Ha (4) egyenlőtlenségei nem teljesülnek, akkor próbálkozhatunk az egyenletek és az ismeretlenek átrendezésével, vagy $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha}x$, $\tilde{y} = \frac{1}{\beta}y$, $\tilde{z} = \frac{1}{\gamma}z$ alakban új változók bevezetésével, ahol az α, β, γ konstansokat úgy választjuk meg, hogy (4) már teljesüljön.

D 20.16 Relaxációs módszer

Kimutatható, hogy ha az (1) egyenletrendszer determinánsa nem nulla, akkor (1) a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} -x + f_1y + g_1z + h_1 &= 0, \\ e_2x - y + g_2z + h_2 &= 0, \\ e_3x + f_3y - z + h_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Legyen x_0, y_0, z_0 tetszőleges, képezzük a

$$\begin{aligned} R_{10} &= -x_0 + f_1y_0 + g_1z_0 + h_1, \\ R_{20} &= e_2x_0 - y_0 + g_2z_0 + h_2, \\ R_{30} &= e_3x_0 + f_3y_0 - z_0 + h_3 \end{aligned} \tag{6}$$

úgynevezett **relaxációs maradékokat**. Jelölje m_0 az R_{10}, R_{20}, R_{30} közül azt, amelynek az abszolút értéke a legnagyobb; a megfelelő ismeretlen értékét növeljük meg m_0-lal. Vagyis:

Ha $m_0 = R_{10}$, akkor $x_1 = x_0 + m_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$,
ha $m_0 = R_{20}$, akkor $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0 + m_0$, $z_1 = z_0$,
ha $m_0 = R_{30}$, akkor $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0 + m_0$.

Most x_0, y_0, z_0 helyett x_1, y_1, z_1-re számítsuk ki (6)-ot, majd x_2, y_2, z_2-t, stb.. Bizonyítható, hogy ha az $[x_n, y_n, z_n]$ sorozat konvergens, akkor az egyenletrendszer megoldásához tart, és két szomszédos közelítő megoldás eltérése:

$$\max(|x_n - x_{n-1}|, |y_n - y_{n-1}|, |z_n - z_{n-1}|) = |m_0|.$$

Feladatok

Oldjuk meg iterációval az alábbi egyenletrendszereket „olyan pontosságig, hogy két szomszédos megoldás eltérése kisebb legyen 10^{-3}-nál"! Ehhez a következő módszert használjuk: Határozzuk meg négy tizedes pontossággal a T 20.14-ben (2)-vel értelmezett rekurzív sorozatoknak azt az x_n, y_n, z_n elemhármasát, amelyre

$$|x_n - x_{n-1}|, \ |y_n - y_{n-1}|, \ |z_n - z_{n-1}| \ \leq \ 4 \cdot 10^{-4},$$

majd ellenőrizzük az $x \approx x_n$, $y \approx y_n$, $z \approx z_n$ közelítés jóságát az egyenletrendszerbe történő visszahelyettesítés útján, meghatározva azt a h számot, amely megmutatja, hogy az egyenletek két oldalának abszolút értékben mekkora a maximális eltérése.

116.[k] $\begin{aligned} 0{,}02x + 0{,}02y - 4z &= 8 \\ -0{,}01x + 5y - 0{,}02z &= 10 \\ 3x + 0{,}03y + 0{,}06z &= 12, \end{aligned}$

117.[k] $\begin{aligned} 3{,}21x + 0{,}71y + 0{,}34z &= 6{,}12 \\ 0{,}17x + 0{,}16y + 4{,}73z &= 7{,}06 \\ 0{,}43x + 4{,}11y + 0{,}22z &= 5{,}71, \end{aligned}$

118.[k] $\begin{aligned} 4x + 0{,}24y - 0{,}08z &= 8 \\ 0{,}09x + 3y - 0{,}15z &= 9 \\ 0{,}04x - 0{,}08y + 4z &= 20, \end{aligned}$

119.[k] $\begin{aligned} 3{,}21x + 0{,}08y + 0{,}09z &= 21{,}55 \\ -0{,}59x - 8{,}60y - 0{,}21z &= -24{,}63 \\ 0{,}47x - 0{,}08y - 3{,}34z &= -1{,}98, \end{aligned}$

120.ᵏ $1{,}22x - 1{,}32y + 3{,}96z = 2{,}12$
$2{,}12x - 3{,}52y + 1{,}62z = -1{,}26$
$4{,}23x - 1{,}21y + 1{,}09z = 3{,}22$.

121.ᵏ $0{,}6x - 0{,}2y + 0{,}5z = 12$
$0{,}02x - 2y + 0{,}42z = -10$
$0{,}06x - 0{,}2y + 5z = 10$.

Oldjuk meg relaxációs módszerrel a következő egyenleteket szintén „olyan pontosságig, hogy két szomszédos megoldás eltérése kisebb legyen 10^{-3}-nál"!

122.ᵏ $10x - 2y - 2z = 6$
$-x + 10y - 2z = 7$
$-x - y + 10z = 8$,

123.ᵏ $4x - y = 2$
$-x + 4y - z = 6$
$-y + 4z = 2$,

(Az utolsó kivételével az alábbi feladatokat iterációs módszerrel már megoldottuk, lásd **116.** – **121.**!)

124.ᵏ Az **1.** feladatbeli egyenletrendszer. **125.**ᵏ A **2.** feladatbeli egyenletrendszer.
126.ᵏ A **3.** feladatbeli egyenletrendszer. **127.**ᵏ A **4.** feladatbeli egyenletrendszer.
128.ᵏ A **5.** feladatbeli egyenletrendszer. **129.**ᵏ A **6.** feladatbeli egyenletrendszer.

Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek és lineáris programozás

D 20.17 n-ismeretlenes **lineáris egyenlőtlenségen** $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ vagy $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ge b$ alakú egyenlőtlenséget értünk ($\le$ helyett állhat $<$, $\ge$ helyett pedig $>$ is).
A lineáris egyenlőtlenség rövidített írásmódja:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{x} \le b, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{a}\,\mathbf{x} \ge b, \text{ ahol } \mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n], \ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Az $\mathbf{a}\,\mathbf{x} \le b$ egyenlőtlenség **megoldásának** nevezünk minden olyan valós n-dimenziós $\mathbf{x}_0$ vektort, amelyre $\mathbf{a}\,\mathbf{x}_0 \le b$.

D 20.18 n-ismeretlenes **lineáris egyenlőtlenség-rendszeren**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

alakú egyenlőtlenség-rendszert értünk. A **lineáris egyenlőtlenség-rendszer mátrixszorzatos alakja**:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

D 20.19 Legyen $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. Az n-változós lineáris $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \mathbf{c}\mathbf{x}$ **célfüggvényhez** és az

(1) $$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \quad (\text{vagy } \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0})$$

korlátozó feltételekhez tartozó **lineáris programozási maximum-feladaton** olyan

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$ vektor meghatározását értjük, amely megoldása (1)-nek és amelyre teljesül, hogy

$$\mathbf{c}\,\mathbf{x}_0{}' \leq \mathbf{c}\,\mathbf{x}_0, \text{ tetszőleges } \mathbf{x}_0' = \begin{bmatrix} x'_{10} \\ x'_{20} \\ \vdots \\ x'_{n0} \end{bmatrix} \text{ vektorra.}$$

Ha a $\mathbf{c}\,\mathbf{x}_0{}' \leq \mathbf{c}\,\mathbf{x}_0$ helyett a $\mathbf{c}\,\mathbf{x}_0{}' \geq \mathbf{c}\,\mathbf{x}_0$ feltételt követeljük meg, akkor **lineáris programozási minimum-feladatról** beszélünk. Azt, hogy a $\mathbf{c}\mathbf{x}$ célfüggvénynek a maximumhelyét, illetve a minimumhelyét keressük, a

$$\mathbf{c}\,\mathbf{x} \rightarrow \max, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{c}\,\mathbf{x} \rightarrow \min$$

jelöléssel fejezzük ki.
Egy lineáris programozási feladat **megengedett megoldásának (lehetséges programjának)** nevezünk minden olyan $\mathbf{x}$-t, amely kielégíti a feladat egyenlőtlenség-rendszerét; az előbb definiált $\mathbf{x}_0$-t pedig **optimális megoldásnak**, vagy másképpen **optimális programnak** nevezzük. A megengedett megoldások halmazát a továbbiakban L-lel fogjuk jelölni.

T 20.20 Minden minimum-feladat visszavezethető maximum-feladatra és viszont. A visszavezetés úgy történik, hogy a korlátozó feltételeket, valamint a célfüggvényt -1-gyel megszorozzuk és a min, max jeleket kicseréljük.

Feladatok

Írjuk fel az alábbi feladatokat (az egyenlőtlenségek és a célfüggvény megfelelő átalakításával)

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0};$$
$$\mathbf{c}\,\mathbf{x} \rightarrow \max$$

alakban.

130.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\geq 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ (-3x_1 - 4x_2 - 2x_3) &\rightarrow \min \end{aligned}$$

131.
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= -7 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &\geq -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ (2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4) &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

132.
$$\begin{aligned} x_1 - 1 &\geq 0 \\ x_2 - 1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - 3 &\geq 0 \\ -6x_1 - 7x_2 + 42 &\geq 0 \end{aligned}$$

133.
$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &\leq 0 \\ x_1 &\leq 2 \end{aligned}$$

134.
$$\begin{aligned} x_1 &\geq 3 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

135.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq -2 \\ x_1 - x_2 &\geq -2 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 0 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 3 \end{aligned}$$

136.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 0 && (1) \\ x_1 - x_2 &\leq 0 && (2) \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 && (3) \\ x_1 &\leq 2 && (4) \\ 3x_1 - x_2 &\geq -4 && (5) \end{aligned}$$

137.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &\leq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

138.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

139.
$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 - x_3 &\geq 0 \\ x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Állapítsuk meg grafikus úton, hogy a következő egyenlőtlenség-rendszerekben vannak-e olyan – és ha igen, melyek azok az – egyenlőtlenségek, amelyek („feleslegesek” abban az értelemben, hogy) a rendszerből a megoldáshalmaz változása nélkül elhagyhatók:

140.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 2 && (1) \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 && (2) \\ x_1 + x_2 &\leq 4 && (3) \\ -2x_1 - x_2 &\leq 4 && (4) \\ x_1 &\geq 0 && (5) \\ x_2 &\geq 0 && (6) \\ & && (7) \end{aligned}$$

141.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &\leq 15 \\ -5x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

142.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ -2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Feladatok

Oldjuk meg grafikusan a következő kétváltozós lineáris programozási feladatokat.

143.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 && \text{I.} \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 && \text{II.} \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 40 && \text{III.} \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 && \text{IV.} \\ x_1, x_2 &\geq 0 && \text{V.} \\ (2x_1 + x_2) &\to \max \end{aligned}$$

144.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\leq 3 && \text{I.} \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 && \text{II.} \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 && \text{III.} \\ x_1, x_2 &\geq 0 && \text{IV.} \\ (x_1 + x_2) &\to \max \end{aligned}$$

145. Oldjuk meg az előző feladatbeli korlátozó feltételekre és az $x_1 + x_2$ célfüggvényre vonatkozó lineáris programozási minimum-feladatot!

146. Oldjuk meg a **144.** feladatbeli korlátozó feltételekre, de most a $-x_1 + x_2$ célfüggvényre vonatkozó lineáris programozási maximum-feladatot!

Oldjuk meg grafikusan a további kétváltozós lineáris programozási feladatokat.

147.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq -6 && \text{I.}\\ 3x_1 + x_2 &\geq 3 && \text{II.}\\ x_1 &\leq 3 && \text{III.}\\ x_1,\, x_2 &\geq 0 && \text{IV.}\\ (2x_1 + 2x_2) &\to \max \end{aligned}$$

148.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10\\ -x_1 + x_2 &= 3\\ x_1 + x_2 &= 5\\ x_1,\, x_2 &\geq 0\\ (3x_1 + 5x_2) &\to \max \end{aligned}$$

149.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4\\ x_1 + 2x_2 &\leq 6\\ x_1,\, x_2 &\geq 0\\ (2x_1 + 4x_2) &\to \max \end{aligned}$$

Határozzuk meg grafikusan az alábbi kétváltozós feladatok optimális megoldását a megadott különböző célfüggvények esetén! (A célfüggvényeket z_1 és z_2, illetve z_1, z_2, z_3 jelöli.)

150.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4 &\geq -x_2\\ 3x_1 &\leq 6\\ 2x_1 &\leq x_2 - 2\\ x_1,\, x_2 &\geq 0\\ z_1 = (2x_1 - x_2) &\to \min\\ z_2 = (x_1 - x_2) &\to \max \end{aligned}$$

151.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2\\ x_1 + x_2 &\geq 2\\ -x_1 + x_2 &\leq 4\\ x_1 + x_2 &\leq 8\\ x_1 &\leq 4\\ x_1,\, x_2 &\geq 0\\ z_1 = (7x_1 + 8x_2) &\to \max\\ z_2 = (8x_1 + 7x_2) &\to \max\\ z_3 = (8x_1 + 8x_2) &\to \max \end{aligned}$$

152.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\leq 4\\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 12\\ 2x_1 + x_2 &\geq 3\\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 9\\ x_1,\, x_2 &\geq 0\\ z_1 = (7x_1 + 5x_2) &\to \min\\ z_2 = (2x_1 + 5x_2) &\to \max\\ z_3 = (-7x_1 - 5x_2) &\to \max \end{aligned}$$

Oldjuk meg grafikusan az alábbi háromváltozós lineáris programozási feladatokat:

153.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &\leq 3 && \text{I.}\\ x_1 - x_2 &\geq 0 && \text{II.}\\ x_2 &\geq 1 && \text{III.}\\ 3x_1 + x_2 &\leq 15 && \text{IV.}\\ x_1,\, x_2,\, x_3 &\geq 0 && \text{V.}\\ z = (x_1 + 3x_2 + 3x_3) &\to \max \end{aligned}$$

154.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 6\\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\leq 8\\ x_1,\, x_2,\, x_3 &\geq 0\\ (3x_1 - 6x_2 + 2x_3) &\to \max \end{aligned}$$

155.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3\\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 0\\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 0\\ x_1,\, x_2,\, x_3 &\geq 0\\ (x_1 + 2x_2 + 3x_3) &\to \max \end{aligned}$$

156.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2\\ 3x_1 + x_2 &\leq 6\\ x_3 &\leq 3\\ x_1,\, x_2,\, x_3 &\geq 0\\ (-2x_1 - x_2 + 3x_3) &\to \min \end{aligned}$$

157. Írjunk fel olyan lineáris egyenlőtlenség-rendszert, amelynek L megoldáshalmazát a $(0;1)$, $(1;3)$, $(2;0)$ és $(3;1)$ csúcspontok által meghatározott konvex sokszögtartomány alkotja! Legyen a célfüggvény $(x_1 - x_2)$! Oldjuk meg grafikusan a megfelelő lineáris programozási feladatot $(x_1 - x_2) \to$ max és $(x_1 - x_2) \to$ min esetekben!

158. Írjunk fel olyan lineáris egyenlőtlenség-rendszert, amelynek L megoldáshalmaza az $(1;2)$, $(5;1)$, $(7;3)$, $(5;6)$ és a $(2;4)$ csúcspontok által meghatározott konvex sokszögtartomány. Az ehhez az egyenlőtlenség-rendszerhez és az $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ egyenlőtlenségekhez tartozó lineáris programozási minimumfeladat célfüggvénye legyen $3x_1 + bx_2$ alakú. Határozzuk meg, hogy a b paraméter mely értékei esetén lesz optimális megoldás az $x_1 = 5$, $x_2 = 6$.

159. Legyen egy lineáris programozási maximumfeladat lehetséges megoldásainak L halmaza az a konvex ötszög, amelynek csúcspontjai a következők: $(2;0)$, $(4;1)$, $(6;3)$, $(3;6)$, $(0;5)$!
a) Írjuk fel a lineáris programozási feladat feltételrendszerét!
b) Határozzuk meg, hogy az a és b paraméterek mely értékei esetén veszi fel az $ax_1 + bx_2$ célfüggvény az optimális értékét az L egyetlen pontjában, mégpedig a $(6;3)$ pontban!

160. Egy gyárban négy különböző termék (T_1, T_2, T_3, T_4) előállításához az A_1, A_2, A_3 alapanyagokat használják fel. Az alapanyagoknak a termékekbe való beépülését az alábbi összefüggések írják le.
A T_1 termék egységének előállításához 1 db A_1, 2 db A_2 és 3 db A_3 egység szükséges. A T_2 egységéhez A_1, A_2, A_3-ból 2, 1, 2 egység kell. T_3, illetve T_4 egységéhez 4, 0, 2 illetve 1, 4, 1 egységnyi alapanyagra van szükség. Az egyes alapanyagokból különböző mennyiség áll rendelkezésre, éspedig
az A_1 alapanyagból 360 egység, az A_2 alapanyagból 400 egység, az A_3 alapanyagból 300 egység.
A T_1 termék egységára 18 Ft, a T_2 termék egységára 16 Ft, a T_3 termék egységára 19 Ft, a T_4 termék egységára 20 Ft.
Az A_1 és A_3 alapanyag romlandó, azért ezek teljes mennyiségét fel kell használni a termékek előállításához. A gyár tervezési osztályának el kell döntenie, hogy hány egységet állítsanak elő az egyes termékekből, ha a cél a maximális árbevétel. Írjuk fel a feladatnak megfelelő matematikai modellt.

161. A tehenek súlyának és tejhozamának adott szinten tartásához 18,26 kalóriaegységre, 1832 g fehérjeféleségre, 118 g kalciumra és 72 g foszforra van szükség. Tegyük fel, hogy a tehenek takarmányát lóhereszénából, rétiszénából, takarmányrépából, burgonyából, napraforgóból és bizonyos koncentrátumból állítják össze! Ezek 1kg-ja a felsorolt tápanyagokat az alábbi táblázat szerinti mennyiségben tartalmazza.

Takarmányok megnevezése	A takarmány 1 kg-jában levő kalória (egység)	fehérje (g)	kálcium (g)	foszfor (g)	1 kg takarmány ára (Ft)
Lóhereszéna	0,54	56	9,31	1,96	1,62
Rétiszéna	0,52	38	6,02	2,18	1,45
Takarmányrépa	0,12	3	0,42	0,33	0,52
Burgonya	0,30	9	0,16	0,72	1,54
Napraforgó	0,31	12	3,55	0,68	2,82
Koncentrátum	1,32	198	2,72	8,11	8,02

A takarmányféleségek árait is mutatja a táblázat. A felsorolt takarmányféleségekből olyan takarmánykeveréket kell készíteni, amely a szükséges anyagokat legalább az előírt mennyiségben tartalmazza, és emellett költsége minimális. Írjuk fel azt a matematikai modellt, amelynek alapján meghatározható, hogy (az adott feltételek mellett) az egyes takarmányokból hány kilogrammot kell tenni a takarmánykeverékbe!

162. Egy vidéki vállalat vezetősége arról akar dönteni, hogy létesítsen-e telephelyén ipari melléküzemágat, mivel egy fővárosi üzem felajánlotta, hogy rendelkezésükre bocsát két gépet (G_1, G_2), amelyek két különböző alkatrész (A_1, A_2) gyártására alkalmasak. Szerződést azonban csak akkor kötnek, ha a vidéki vállalat garantálja, hogy naponta legalább 200 db-ot gyárt mindkét alkatrészből. Raktárkapacitás hiánya miatt a heti össztermelés legfeljebb 4000 db lehet. A gépeket legfeljebb napi 8 órában üzemeltethetnék, és 5 napos munkahéttel számolhatnak. Az egyes alkatrészek fajlagos megmunkálási ideje az egyes gépeken (percben kifejezve):

Alkatrészek	Gépek G_1	G_2
A_1	0,5	0,6
A_2	0,8	1,2

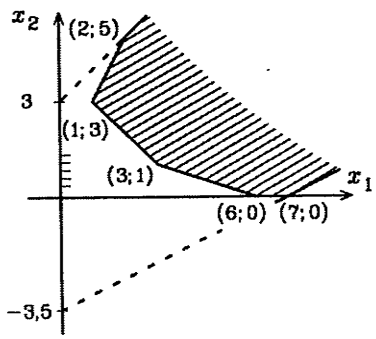
A fővárosi üzem a termelt alkatrészeket korlátlan mennyiségben átveszi, mégpedig az A_1 alkatrész darabját 10 Ft-ért, az A_2 alkatrész darabját 12 Ft-ért. A gépek használatáért a helyi vállalatnak nem kell fizetnie. Az előzetes kalkulációk szerint A_1 önköltsége 7 Ft/db, A_2 önköltsége 8 Ft/db.
Írjuk fel a döntést korlátozó feltételeket matematikai alakban!
Ábrázoljuk a lehetséges megoldások halmazát, és határozzuk meg grafikusan azt a termelési programot, amelyre a vállalatnak napi bruttó nyeresége maximális!
Kihasználja-e a vállalat a gépek kapacitását ilyen gyártási terv esetén?
Megköti-e a szerződést a vállalat a fővárosi üzemmel?
Változna-e a vállalat bruttó nyeresége, ha nem kötnék ki, hogy mindegyik alkatrészből legalább 200 db-ot kell gyártani naponta?

163. Legyen $t \leq 1$ egy pozitív paraméter! Adjuk meg t azon értékeit, amelyeknél a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ tx_1 + (1-t)x_2 &\to \max \end{aligned}$$

feladatnak végtelen sok optimális megoldása van.

164. Egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak L halmazát az ábra szemlélteti:



a) Írjuk fel azt a feltételrendszert, amely az L halmazt meghatározza.

b) Az a és b paraméterek mely értékei esetén kapunk olyan $ax_1 + bx_2$ alakú célfüggvényt, amely sem maximális, sem minimális értéket nem vesz fel az L halmazon?

c) Az a és b paraméterek milyen értékei esetén lesz olyan a célfüggvény, amely maximális értéket felvesz az L halmazon, de minimálisat nem (illetve minimális értéket felvesz, de maximálisat nem)?

d) Létezik-e olyan lineáris célfüggvény, amely az adott L halmazon maximális és minimális értéket is felvesz?

Oldjuk meg grafikusan a következő, lineáris korlátozó feltételekhez, de másodfokú célfüggvényhez tartozó nemlineáris programozási feladatokat, mégpedig maximum- és minimumfeladatként is!

165.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 7 \\ 7x_1 - 2x_2 &\leq 42 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
célfüggvény: $[(x_1-4)^2 + (x_2-3)^2]$

166.
$$\begin{aligned} 9x_1 - 10x_2 &\leq 9 \\ 9x_1 + 4x_2 &\leq 72 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
a célfüggvény: $(x_1^2 + 2x_2)$

Határozzuk meg grafikusan, hogy a következő nemlineáris egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott L halmazon hol veszi fel a maximumát, illetve a minimumát az adott lineáris függvény!

167.
$$\begin{aligned} (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 &\leq 25 \\ x_1^2 + x_2^2 &\geq 4 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
a célfüggvény: $x_1 + x_2$

168.
$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2^2 &\geq 0 \\ -x_1^2 + 8x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
a célfüggvény: $-3x_1 + 2x_2$

21. fejezet

Tenzor

A lineáris leképezés és a tenzor fogalma

D 21.1 Legyen H_1 és H_2 két olyan halmaz, amelyekben bármely két $a, b \in H_i$ $(i = 1, 2)$ elemre értelmezve van egy $a + b \in H_i$ összeg, és bármely $a \in H_i$ elemhez és c valós (vagy komplex) számhoz hozzá van rendelve egy $ca \in H_i$ szorzat. Ha valamely $f : H_1 \to H_2$ függvény olyan, hogy tetszőleges c számra, és teszőleges $x, x_1, x_2 \in H_1$ elemekre érvényesek az

1. $f(cx) = cf(x)$,
2. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$,

egyenlőségek, akkor f-et **lineáris leképezésnek**, vagy **lineáris függvény**nek nevezzük.

T 21.2 Az előző definícióval ekvivalens az alábbi: az $f : H_1 \to H_2$ függvény lineáris, ha tetszőleges c_1, c_2 számokra, és $x_1, x_2 \in H_1$ elemekre az

3. $f(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1f(x_1) + c_2f(x_2)$,

egyenlőség érvényes.

D 21.3 Az $A : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(n)}$ függvényt n-dimenziós, másodrendű **tenzornak** nevezzük, ha A lineáris, azaz ha

1. $\forall c \in \mathbf{R},\ \forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)} : A(c\mathbf{r}) = cA(\mathbf{r})$,
2. $\forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^{(n)} : A(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = A(\mathbf{r}_1) + A(\mathbf{r}_2)$.

Az 1. és 2. feltétel helyettesíthető az alábbival:

3. $\forall c_1, c_2 \in \mathbf{R},\ \forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^{(n)} : A(c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2) = c_1A(\mathbf{r}_1) + c_2A(\mathbf{r}_2)$.

Az $A(\mathbf{r})$ jelölés helyett tenzorok esetén gyakran csak az $A\mathbf{r}$ jelölést használjuk.

P 21.4 Példák tenzorokra:

a) Az O **zérustenzor** minden vektorhoz a zérusvektort rendeli, azaz $O\mathbf{r} := \mathbf{0}$ $(\mathbf{r}, \mathbf{0} \in \mathbf{R}^{(n)})$. (Hogy ne keverjük össze a jelöléseket: O a zérustenzor, O a zérusmátrix, $\mathbf{0}$ a zérusvektor, 0 a zérus, O a nagy o.)

b) Az I **identikus**, vagy **egységtenzor** minden vektorhoz önmagát rendeli, azaz $I\mathbf{r} := \mathbf{r}$ $(\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)})$.

c) Az **egységvektorra való vetítés tenzora**: $P\mathbf{r} := \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{r})$, ahol $\mathbf{e}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}$ és $\mathbf{e}$ egységvektor.

d) A **vektori szorzás tenzora** minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(3)}$ vektorhoz az $A\mathbf{r} := \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ vektort rendeli, ahol $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{(3)}$ egy adott, rögzített vektor

T 21.5 Bármely A tenzorra $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, továbbá ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok az A értékkészletébe tartoznak, akkor bármely lineáris kombinációjuk is beletartozik az A értékkészletébe. Speciálisan egy háromdimenziós tenzor értékkészlete lehet a zérusvektor, egy nem-zérusvektorral párhuzamos összes vektor, egy síkkal párhuzamos összes vektor, a tér összes vektora. Az ilyen tenzorok neve rendre: zérustenzor (ilyen csak egy van), lineáris tenzor, planáris tenzor és teljes tenzor. (Ha vektorokon csak a kötött helyvektorokat értjük, akkor a zérustenzor értékkészlete a zérusvektor, lineáris tenzor értékkészlete egy origón áthaladó egyenes összes pontjába mutató vektor, planáris tenzor értékkészlete egy origón áthaladó sík összes pontjába mutató vektor, teljes tenzor értékkészlete a tér összes helyvektora.)

Feladatok

Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektor-vektorfüggvények közül melyik lineáris, és a lineárisak közül melyik tenzor. A vektorokat vagy a szokásos vektorjelöléssel $[a_1, \ldots, a_n]$ alakban, vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakban adjuk meg. Az $f([x,y])$ ill. az $f(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right])$ jelölések helyett az $f(x,y)$ ill. az $f\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ alakokat használjuk.

1.ᐅ $f(x,y) = [2x - y, -2x]$, **2.**ᐅ $f(x,y) = [x^2 + y^2, 0]$,

3.ᐅ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1, 2x_2, \ldots, nx_n]$,

4. $f(x,y,z) = [0,0,0]$, **5.** $f(x,y) = [x,y]$,

6. $f(x,y,z) = [x+y, y+z]$, **7.** $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x - 3y \end{bmatrix}$,

8. $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y - 1 \\ x - 3y + 1 \end{bmatrix}$, **9.** $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Az alábbiakban megadjuk a 3-dimenziós vektortér néhány G transzformációját. Döntsük el, hogy közülük melyik tenzor, és hogy a tenzorok közül melyik teljes, planáris illetve lineáris:

10.ᐅ Legyen $\mathbf{a}$ egy adott, rögzített vektor. A G transzformáció rendelje az $\mathbf{r}$ vektorhoz annak $\mathbf{a}$-val párhuzamos összetevőjét (más szóval $\mathbf{r}$-nek $\mathbf{a}$-ra eső merőleges vetületét).

11. Legyen S egy adott, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík. A G transzformáció rendelje az $\mathbf{r}$ vektorhoz annak S-re eső merőleges vetületét.

12. Legyen S egy adott, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík. A G transzformáció rendelje az $\mathbf{r}$ vektorhoz annak S-re való tükörképét.

13. A G transzformáció rendelje minden $\mathbf{r}$ vektorhoz az $\mathbf{a} + \mathbf{r}$ vektort, ahol $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ adott rögzített vektor.

Az alábbiakban megadjuk a 3-dimenziós tér pontjainak néhány G transzformációját. Ha a $P(x,y,z)$ pontot azonosítjuk az $\mathbf{r} = [x,y,z]$ vektorral, akkor e leképezés egyúttal egy vektor-vektorfüggvény is lesz, mely tekinthetünk úgy, hogy az az origóból kiinduló kötött vektorok terén hat. Döntsük el, hogy a G függvény tenzor-e, ha a G leképezés a P ponthoz

14. annak egy a irányvektorú, origón áthaladó egyenesre eső merőleges vetületét rendeli;

15. annak egy $\mathbf{n}$ normálvektorú, origón áthaladó síkra eső merőleges vetületét rendeli;

16. annak egy $\mathbf{n}$ normálvektorú, origón áthaladó síkra vonatkozó tükörképét rendeli.

17. Mutassuk meg, hogy ha az előző három feladat bármelyikében kicseréljük az egyenest illetve a síkot olyanra, amely nem megy át az origón, akkor G nem lesz tenzor.

Igazoljuk, hogy az alábbi feladatokban megadott H_1 és H_2 is olyan halmaz, hogy bármely két elem összege, és bármelyik konstansszorosa is a halmazba tartozik. Mutassuk meg, hogy a $H_1 \to H_2$ leképezések lineárisak:

18. H_1 az $\mathbf{R}$-en differenciálható függvények halmaza,
H_2 az $\mathbf{R}$-en értelmezett függvények halmaza,
$D : H_1 \to H_2; f \mapsto D(f) = f'$, ($D$ a deriválás-operátor),

19. H_1 az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények halmaza,
H_2 a valós számok halmaza ($H_2 = \mathbf{R}$),
$I : H_1 \to H_2; f \mapsto I(f) = \int_a^b f$,

20. H_1 a G rektifikálható görbén integrálható vektor-vektorfüggvények halmaza,
$H_2 = \mathbf{R}$,
$I : H_1 \to H_2; f \mapsto I(f) = \int_G f$,

21. $H_1 = \mathbf{R}^{(n)}$, $H_2 = \mathbf{R}^{(m)}$, $\mathbf{A}$ egy rögzített $m \times n$-es mátrix,
$A : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(m)}; \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$,

22. H_1 a 0-ban értelmezett valós függvények halmaza, $H_2 = \mathbf{R}$, és δ legyen az a leképezés, mely minden f függvényhez az $f(0)$ számot rendeli (ezt a leképezést nevezik **Dirac-delta függvénynek**), azaz $\delta : H_1 \to H_2; f \mapsto \delta(f) = f(0)$,

23. H_1 a $(0, \infty)$ intervallumon integrálható függvények halmaza, $H_2 = \mathbf{R}$, és legyen e az a leképezés (ezt nevezik **Heaviside-függvénynek**), amelyre
$e : H_1 \to H_2; f \mapsto e(f) = \int_0^\infty f$.

24. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto mx + b$, ($m, b$ valós konstansok) függvény pontosan akkor lineáris leképezés, ha $b = 0$.

25. Mutassuk meg, hogy ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre minden c és x valós szám esetén igaz, hogy

$$f(cx) = cf(x),$$

akkor igaz bármely x és y számra, hogy $f(x+y) = f(x)+f(y)$. (Más szavakkal egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény már akkor is lineáris leképezés lesz, ha csak az 1. feltételt teljesülését követeljük meg.)

26.* Mutassuk meg, hogy ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény minden x és y valós számra teljesíti az

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

feltételt, akkor az $f(cx) = cf(x)$ egyenlőség teljesül bármely valós x és racionális c szám esetén.

27.* Mutassuk meg, hogy ha a *folytonos* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény minden x és y valós számra teljesíti az

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

feltételt, akkor az $f(cx) = cf(x)$ egyenlőség is teljesül bármely valós x és c szám esetén. (Más szavakkal egy folytonos $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény már akkor is lineáris leképezés lesz, ha csak az 2. feltétel teljesülését követeljük meg. Nem folytonos függvényekre az állítás nem igaz.)

Állapítsuk meg, hogy az alábbi 3-dimenziós tenzorok közül melyik lineáris, melyik planáris és melyik teljes tenzor:

28.$^{\triangleright}$ $f(x,y,z) = [x+y, y+z, z+x]$,
29.$^{\triangleright}$ $f(x,y,z) = [x-y, 2x+z, 2y+z]$,
30. $f(x,y,z) = [x, x+y, x+y+z]$,
31. $f(x,y,z) = [x+2y-3z, 2x-y+z, -5y+7z]$,
32.$^{\triangleright}$ $f(x,y,z) = [x-2y, -x+2y, 2x-4y]$,
33. $f(x,y,z) = [\pi y, \frac{1}{\pi}y, y]$.

Tenzor koordinátái, mátrixa

D 21.6 Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ az $\mathbf{R}^{(n)}$ egy alapvektor-rendszere, A egy n-dimenziós tenzor. Az A **tenzor mátrixa** $\mathbf{A}$, ha minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}$ esetén $A\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{r}$. Az $A\mathbf{e}_i$ vektorokat az A tenzor **vektorkoordinátáinak**, az $\mathbf{A}$ mátrix elemeit az A tenzor **skaláris koordinátáinak** nevezzük. Megkülönböztetésül az A tenzor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, illetve $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ alapvektor-rendszerre vonatkozó mátrixát $\mathbf{A}_\mathbf{e}$ illetve $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ jelöli.

T 21.7 Minden n-dimenziós A tenzornak minden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan van mátrixa. E mátrix oszlopvektorai az A vektorkoordinátái, vagyis, ezt a mátrixot $\mathbf{A}$-val jelölve

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ahol

$$A\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}.$$

P 21.8 Kiszámítjuk a **P 21.4** d) pontjában leírt vektori szorzás tenzorának mátrixát. Legyen $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ egy adott vektor. Annak az A tenzornak, mely minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(3)}$ vektorhoz az $A\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ vektort rendeli, a vektorkoordinátái a következők:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\a_3\\-a_2\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_3\\0\\a_1\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_2\\-a_1\\0\end{bmatrix}.$$

Tehát A mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy valóban, minden $\mathbf{r}$ vektorra $\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$.

D 21.9 Az A tenzor **skaláris invariánsai** azok a mennyiségek, amelyek függetlenek az alapvektor-rendszer megválasztásától. Ilyenek például:

a) $\operatorname{rang}\mathbf{A}$, ami megegyezik az értékkészlet dimenziószámával,

b) $\det\mathbf{A}$,

c) az $\mathbf{A}$ főátlójában álló elemek összege,

d) a főátló elemeihez tartozó aldeterminánsok összege.

T 21.10 Egy 3-dimenziós, $\mathbf{A}$ mátrixú tenzor pontosan akkor

a) teljes tenzor, ha $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$,

b) planáris tenzor, ha $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$,

c) lineáris tenzor, ha $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 1$,

d) zérustenzor, ha $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 0$.

Feladatok

Adjuk meg az alábbi A tenzorok vektorkoordinátáit és mátrixát az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, majd adjuk meg az adott $\mathbf{r}$ vektor $A\mathbf{r}$ képét:

34.$^{\triangleright}$ $A[1,0,0] = [2,1,3]$, $A[0,1,0] = [5,5,5]$, $A[0,0,1] = [0,0,-1]$, $\mathbf{r} = [1,1,1]$,

35.$^{\triangleright}$ $A[1,0,0] = [1,0,0]$, $A[0,1,0] = [0,1,0]$, $A[0,0,1] = [0,0,1]$, $\mathbf{r} = [3,9,4]$.

Adjuk meg az összes olyan T tenzor mátrixát az $[1,0]$, $[0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, amely teljesíti a megadott feltételeket:

36.$^{\triangleright}$ $T\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,

37. $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$,

38. $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$,

39.$^{\triangleright}$ $T\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$,

40.$^{\triangleright}$ $T\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$,

41. $T\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

Az alábbi feladatokban megadjuk egy T tenzor hatását az $\mathbf{R}^{(3)}$ tér 3 vektorára. Írjuk fel T mátrixát az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, és határozzuk meg T értékkészletének dimenziószámát, vagyis azt, hogy T lineáris, planáris vagy teljes:

42. $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$

43.$^{\triangleright}$ $T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$

44. $T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\4\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},$

45. $T\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\0\\-11\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\0\\-7\end{bmatrix}.$

46.$^{\triangleright}$ $T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$

Mutassuk meg, hogy az alábbi transzformációk mindegyike kétdimenziós tenzort definiál. Adjuk meg e transzformációk mátrixát úgy, hogy meghatározzuk az $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ és a $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ vektorok képét. A transzformációkat szemléltessük az $\mathbf{R}^{(3)}$ vektortér mellett az $\mathbf{R}^3$ ponttéren is úgy, hogy minden $[x,y]$ vektornak az (x,y) pontot feleltetjük meg:

47.$^{\triangleright}$ tükrözés az x-tengelyen,

48. tükrözés az y-tengelyen,

49. tükrözés az $y=x$ egyenletű egyenesen,

50. x-tengely irányú nyírás, azaz az $[x,y]\mapsto[x+ky,y]$ leképezés, ahol $k\in\mathbf{R}$,

51. y-tengely irányú nyírás, azaz az $[x,y]\mapsto[x,kx+y]$ leképezés, ahol $k\in\mathbf{R}$,

52. k-szoros nyújtás, (nagyítás, ha $k>1$, kicsinyítés, ha $0\le k<1$),

53. tükrözés az origón,

54. α-szögű, origó körüli elforgatás,

55. vetítés az x-tengelyre, (ill. y-tengelyre),

56. x-tengely irányú (ill. y-tengely irányú) k-szoros nyújtás.

Az előbbi feladatokhoz hasonlóan írjuk fel annak a 3-dimenziós tenzornak a mátrixát, amely minden vektorhoz annak

57. x- /y- /z-tengelyre eső merőleges vetületét rendeli,

58. xy- /yz- /xz-síkra eső merőleges vetületét rendeli,

59.$^{\triangleright}$ x- /y- /z-tengely körüli α szöggel való elforgatottját rendeli,

60. xy- /yz- /xz-síkra vonatkozó tükörképét rendeli.

61.$^{\bullet}$ Mutassuk meg, hogy minden $A:\mathbf{R}^{(n)}\to\mathbf{R}^{(m)}$ lineáris leképezéshez egyértelműen létezik egy olyan $m\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, amellyel minden $\mathbf{x}$ vektorra

$$A\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x},$$

és mutassuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik oszlopa az $A\mathbf{e}_i$ vektor, ahol az $\mathbf{e}_i$ vektor i-edik koordinátája 1, a többi 0. (A bizonyítást esetleg először egy $A : \mathbf{R}^{(2)} \to \mathbf{R}^{(3)}$ lineáris leképezéssel végezzük el.)

Az előző feladat felhasználásával igazoljuk az alábbi állításokat:

62. Minden $f : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}$ lineáris skalár-vektorfüggvényhez létezik egy olyan $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektor, hogy minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektorra $f(\mathbf{r}) = \mathbf{ar}$.

63. Minden $\mathbf{v} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{(n)}$ lineáris vektor-skalárfüggvényhez létezik egy olyan $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektor, hogy minden $t \in \mathbf{R}$ számra $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}t$.

Állapítsuk meg, hogy az L leképezés lineáris-e, és ha igen, írjuk fel a leképezés $\mathbf{L}$ mátrixát:

64. $L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$, 65. $L\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix}$,

66. L minden $\mathbf{R}^{(n)}$-beli vektorhoz annak első koordinátáját rendeli, ($L : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(1)}$),

67. L minden $\mathbf{R}^{(n)}$-beli vektorhoz koordinátáinak összegét rendeli,

68. L minden $\mathbf{R}^{(n)}$-beli vektorhoz koordinátáinak szorzatát rendeli.

69.ᐅ Legyen a T tenzor mátrixa az $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ illetve az $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan $\mathbf{T}_\mathbf{e}$ illetve $\mathbf{T}_\mathbf{f}$, míg egy $\mathbf{u}$ vektor koordinátás alakja $\mathbf{u}_\mathbf{e}$ illetve $\mathbf{u}_\mathbf{f}$. Legyen az $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ alapvektor-rendszerről az $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ alapvektor-rendszerre való áttérés mátrixa $\mathbf{C}$, azaz legyen $\mathbf{u}_\mathbf{e} = \mathbf{C}\mathbf{u}_\mathbf{f}$, és így $\mathbf{u}_\mathbf{f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}_\mathbf{e}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{T}_\mathbf{f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}_\mathbf{e}\mathbf{C}.$$

Írjuk fel a T tenzornak a megadott $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ illetve $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ vektorrendszerre vonatkozó $\mathbf{T}_\mathbf{f}$ mátrixát:

70.ᐅ T a sík vektorainak az $y = x$ egyenesen való tükrözése, $\mathbf{f}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{f}_2 = [2, 2]$,

71. $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-2y \\ 6x-3y \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

72. T az x-tengelyre vonatkozó tükrözés, $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

73. $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-2y \\ x+y \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

74. $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ y \\ y-z \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

75.ᐅ Felhasználva a $\mathbf{T}_\mathbf{f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}_\mathbf{e}\mathbf{C}$ összefüggést, írjuk fel az $y = 2x$ egyenesre való merőleges vetítés mátrixát!

Műveletek tenzorokkal

D 21.11 Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ n-dimenziós tenzorok. Tenzorok egyenlőségének, összegének, számszorosának, szorzatának, inverzének, transzponáltjának definíciója képletekkel felírva:

$$A = B \quad :\Leftrightarrow \quad A\mathbf{r} = B\mathbf{r} \quad (\forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)})$$

$$(A+B)\mathbf{r} := A\mathbf{r} + B\mathbf{r} \quad (\forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)})$$

$$(cA)\mathbf{r} := c(A\mathbf{r}) \quad (\forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)})$$

$$(AB)\mathbf{r} := A(B\mathbf{r}) \quad (\forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)})$$

$$A^{-1}\mathbf{r} := \mathbf{p}, \quad \text{ha} \quad A\mathbf{p} = \mathbf{r} \quad (\forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)})$$

$$A = B^T \quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{p}A\mathbf{r} = \mathbf{r}B\mathbf{p} \quad (\forall \mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}).$$

P 21.12 Például, legyen az A tenzor a sík vektorainak $90°$-os elforgatása, B az x-tengelyre való merőleges vetítés és $\mathbf{r} = [3,5]$. Ekkor $A[3,5] = [-5,3]$, $B[3,5] = [3,0]$, tehát $(A+B)[3,5] = [-5,3] + [3,0] = [-2,3]$, vagyis az $A+B$ tenzor a $[3,5]$ vektorhoz a $[-2,3]$ vektort rendeli. Vagy a tenzorok szorzatát tekintve: $B[3,5] = [3,0]$, $A[3,0] = [0,3]$, tehát $(AB)[3,5] = A(B[3,5]) = A[3,0] = [0,3]$, vagyis az AB tenzor a $[3,5]$ vektorhoz a $[0,3]$ vektort rendeli. Az is látható, hogy A és B egymásnak nem transzponáltja, ugyanis $[3,0]B[3,5] = [3,0][3,0] = 9$, $[3,5]A[3,0] = [3,5][0,3] = 15$, tehát $[3,0]B[3,5] \neq [3,5]A[3,0]$.

T 21.13 Ha az A és B tenzorok mátrixai egy közös alapvektor-rendszerben $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$, akkor $A = B$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, míg $A+B$, cA, AB, A^{-1}, B^T mátrixai $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $c\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^T$.

D 21.14 Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektorok **diadikus szorzatán** azt az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$-vel jelölt $\mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(n)}$ leképezést értjük, mely minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektorhoz az

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{br})$$

vektort rendeli. Belátható, hogy e leképezés tenzor (**77.** feladat).

T 21.15 Az $\mathbf{a} = [a_i]_{i=1}^n$, $\mathbf{b} = [b_i]_{i=1}^n$ vektorok diadikus szorzatának mátrixa

$$\mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

P 21.16 Számítsuk ki az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ tenzor hatását az $\mathbf{r}$ vektorra, ha $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$. Először a definíció alapján számolva:

$$\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\left([1 \quad -1]\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}[3] = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixa:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}[1 \quad -1] = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix}.$$

Természetesen ezzel számolva is azt kapjuk, hogy a tenzor az $\mathbf{r}$ vektorhoz a $\left[\begin{smallmatrix}3\\6\end{smallmatrix}\right]$ vektort rendeli, ugyanis $\left[\begin{smallmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}3\\6\end{smallmatrix}\right]$.

D 21.17 A háromdimenziós valós vektortérben az **a vektor** és B **tenzor szorzatán** azt az $\mathbf{a} \times B$ tenzort értjük, melyre $(\mathbf{a} \times B)\mathbf{r} := \mathbf{a} \times B\mathbf{r}$.

T 21.18 Ha a B tenzor vektorkoordinátái $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$, akkor az $\mathbf{a} \times B$ tenzor mátrixában az i-edik sor j-edik eleme a $\mathbf{e}_i\mathbf{a}\mathbf{b}_j$ vegyes szorzat $(i, j = 1, 2, 3)$.

D 21.19 Az A tenzort **szimmetrikusnak** nevezzük, ha $A^T = A$ és **ferdén szimmetrikusnak**, ha $A^T = -A$.

T 21.20 Minden $\mathbf{T}$ tenzor előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegeként, nevezetesen

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T).$$

D 21.21 A 3-dimenziós $\mathbf{T}$ tenzor **vektorinvariánsa** az a $\mathbf{w}$ vektor, amellyel való vektori szorzás a $\mathbf{T}$ tenzor ferdén szimmetrikus részével megegyezik, azaz minden $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{(3)}$ vektorra

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)\mathbf{v}.$$

P 21.22 A ferdén szimmetrikus $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ mátrixú tenzor vektorinvariánsa $[-c, b, -a]$, ugyanis

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \\ -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

T 21.23 Ha az A tenzor vektorkoordinátái $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$, az alapvektor-rendszer vektorai $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$, akkor A kifejezhető diadikus szorzatok összegeként:

$$A = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{e}_i).$$

Az $\mathbf{a}_i \circ \mathbf{e}_i$ diadikus szorzatokat az A tenzor **tenzorkomponenseinek** nevezzük.

Feladatok

76. Döntsük el, hogy mely állítások igazak az alábbiak közül, és melyek hamisak:
- a) két tenzor összegét úgy kapjuk meg, hogy őket mint függvényeket összeadjuk;
- b) két tenzor szorzatát úgy kapjuk meg, hogy őket mint függvényeket összeszorozzuk;
- c) két tenzor szorzatát úgy kapjuk meg, hogy vesszük a nekik megfelelő függvények összetételét.

77. Legyen $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{(n)}$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{(m)}$ két vektor. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$-vel jelölt leképezés, mely minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(m)}$ vektorhoz az $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} := \mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{r})$ vektort rendeli, lineáris leképezés.

Végezzük el az alább megadott A és B tenzorokkal a megadott műveleteket, először a tenzorok geometriai jelentésének segítségével, majd úgy, hogy kiszámítjuk A és B mátrixát, és mátrixműveletek segítségével ellenőrizzük a kapott eredményt:

78. A a sík vektorainak $45°$-os szöggel való, B a $-45°$-os szöggel való elforgatása; $A + B = ?$;

79. A a sík vektorainak α szöggel való, B a $-\alpha$ szöggel való elforgatása; $AB = ?$; $BA = ?$;

80. A a sík vektorainak α szöggel való elforgatása; $A^{-1} = ?$; $A^2 = ?$;

81. A a sík vektorainak az x-tengelyen való tükrözése; $A^{-1} = ?$; $A^2 = ?$.

Írjuk fel annak a 2-dimenziós A tenzornak az $\mathbf{A}$ mátrixát, amely az alábbi geometriai transzformációt valósítja meg, és határozzuk meg, hogy e transzformáció hatására az $[1, 1]$ vektor a sík melyik vektorába megy át:

82.▷ A az O körül α szöggel elforgatja, majd az x-tengely irányában 2-szeresére nyújtja a síkot,

83. A az x-tengelyen, majd az y-tengelyen tükrözi a síkot,

84.▷ A az x-tengellyel α szöget bezáró, origón áthaladó egyenesen tükrözi a síkot,

85. A az x-tengellyel α szöget bezáró, origón áthaladó egyenesre merőlegesen vetíti a síkot.

Írjuk fel a 3-dimenziós A tenzor $\mathbf{A}$ mátrixát, valamint az A hatását a zárójelben megadott $\mathbf{r}$ vektorra, ha

86. A elforgatja a teret a z-tengely körül α szöggel, majd tükrözi a teret az xy-síkon, ($\mathbf{r} = [1, 0, 1]$),

87. A először elforgatja a teret a x-tengely, majd az y-tengely körül α szöggel, ($\mathbf{r} = [1, 1, 0]$ és $\alpha = \frac{\pi}{6}$),

88. A először elforgatja a teret a y-tengely, majd az x-tengely körül α szöggel, ($\mathbf{r} = [1, 1, 0]$ és $\alpha = \frac{\pi}{6}$),

89.▷ A elforgatja a teret az $y = x$, $z = 0$ egyenletrendszerű egyenes körül $\pi/2$ szöggel, ($\mathbf{r} = [1, 1, \sqrt{2}]$).

Legyen $\mathbf{e}$ az $\mathbf{R}^{(3)}$ tér egy egységvektora. Fejezzük ki az alábbi T tenzorokat az $\mathbf{e}$ egységvektor segítségével (koordináták felhasználása nélkül):

90.▷ T a tér helyvektorait az $\mathbf{e}$ irányú, origón áthaladó egyenesre merőlegesen vetíti,

91.▷ T a tér minden $\mathbf{r}$ helyvektorához az $\mathbf{e}$ normálvektorú, origón áthaladó síkra eső merőleges vetületét rendeli,

92. T a tér minden $\mathbf{r}$ helyvektorát tükrözi az $\mathbf{e}$ normálvektorú, origón áthaladó síkon,

93. T a tér minden $\mathbf{r}$ helyvektorát tükrözi az $\mathbf{e}$ irányvektorú, origón áthaladó egyenesen.

Felhasználva az előző feladatok eredményeit, írjuk fel annak a T tenzornak a mátrixát, mely a 3-dimenziós tér pontjait (ill. helyvektorait)

94. merőlegesen vetíti az $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{-z}{12}$ egyenletű egyenesre,

95. merőlegesen vetíti az $x + y + \sqrt{2}z = 0$ egyenletű síkra,

96. tükrözi a $3x + 4y - 12z = 0$ egyenletű síkra,

97. tükrözi az $\frac{x}{6} = \frac{-y}{7} = \frac{z}{6}$ egyenletű egyenesre.

98.* Legyen P az a tenzor, mely az $\mathbf{R}^{(3)}$ tér minden $\mathbf{r}$ vektorához az adott $\mathbf{e}$ egységvektorral párhuzamos összetevőjét rendeli, és M az a tenzor, mely az $\mathbf{e}$-re merőleges vetületét rendeli. Legyen továbbá A az $\mathbf{e}$ vektorral való vektori szorzás tenzora, azaz $A\mathbf{r} = \mathbf{e}\times\mathbf{r}$ $(\forall\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(3)})$. Mutassuk meg, hogy $P = I + A^2$ és $M = -A^2$.

99. Legyen az $\mathbf{e}$ egységvektorral való vektori szorzás tenzora A. Az előző feladat eredményét felhasználva, fejezzük ki az A tenzorral azt a tenzort, mely a tér minden vektorát az $\mathbf{er} = 0$ egyenletű síkra mer[legesen vetíti, valamint annak a tenzornak a mátrixát, mely a tér minden vektorát az $\mathbf{r} = \mathbf{e}t$ egyenletű egyenesre vetíti.

100. Legyen az $\mathbf{a}$ vektorral való vektori szorzás tenzora A. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a} \times I = A$ és $\mathbf{a} \times A = \mathbf{a} \circ \mathbf{a} - \mathbf{a}^2 I$. (L. 21.17)

101. Legyen az $\mathbf{a}$ vektorral való vektori szorzás tenzora A. Mutassuk meg, hogy A mátrixában az i-edik sor j-edik eleme az $\mathbf{e}_i\mathbf{a}\mathbf{e}_j$ vegyes szorzat $(i, j = 1, 2, 3)$.

Bontsuk fel az alábbi háromdimenziós T tenzorokat szimmetrikus és ferdén szimmetrikus tenzorok összegére, és írjuk fel a vektorinvariánsukat:

102. T a z-tengely körüli 60°-os elforgatás,

103. $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, **104.** T mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^2$.

105.* Legyen a háromdimenziós T tenzor mátrixa $\mathbf{T} = [a_{ij}]_{3\times3}$. Írjuk fel a T tenzor vektorinvariánsának koordinátáit.

106.* Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{w}$ az F ferdén szimmetrikus tenzor vektorinvariánsa, akkor

a) $F\mathbf{w} = \mathbf{0}$, b) $F^T F = (\mathbf{ww})I - \mathbf{w} \circ \mathbf{w}$.

107.* Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} - \mathbf{b}\circ\mathbf{a}$ tenzor vektorinvariánsa $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{(3)})$.

108.* Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ tenzor vektorinvariánsa a $-\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ vektor, skaláris invariánsa pedig az $\mathbf{ab}$ szám.

Bontsuk fel az alábbi háromdimenziós A tenzorokat tenzorkomponenseik összegére, és írjuk fel ezek mátrixait az $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ alapvektorrendszerre vonatkozóar

109. A a tér y-tengely körüli 60°-os elforgatása,

110. A a $\mathbf{v} = [a, b, c]$ vektorral való vektori szorzás tenzora.

Bontsuk fel az alábbi háromdimenziós A tenzorokat **tenzorkomponenseik** összegére az $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}[1,2,2]$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}[2,1,-2]$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}[2,-2,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, és írjuk fel ezek mátrixait mind az $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, mind az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan:

111. A az $A\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{f}_2$, $A\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$, $A\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_3$ feltételek által meghatározott tenzor,
112. A a tér tükrözése az $\mathbf{f}_1$ és $\mathbf{f}_2$ által meghatározott síkon.

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága

D 21.24 A $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(m)}$ vektor-vektorfüggvényt az $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^{(n)}$ helyen **differenciálhatónak** mondjuk, ha megadható olyan $D : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(m)}$ lineáris leképezés, és $\mathbf{r}_0$-nak olyan K teljes környezete, hogy ha $\mathbf{r} \in K$, akkor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ értelmezve van, és

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + E_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{1}$$

ahol $E_{\mathbf{r}}$ az $\mathbf{r}$-től függő olyan lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} E_{\mathbf{r}} = O. \tag{2}$$

(Az, hogy az $E_{\mathbf{r}}$ leképezéssorozat tart a zérusleképezéshez, azt jelenti, hogy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra az $E_{\mathbf{r}}\mathbf{x}$ vektor tart a zérusvektorhoz, ha $\mathbf{r}$ tart az $\mathbf{r}_0$ vektorhoz.) A D leképezést az $n = m$ esetben a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény $\mathbf{r}_0$ helyhez tartozó **deriválttenzorának** nevezzük, és $\mathit{Grad}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$-lal jelöljük.

T 21.25 Ha a $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(m)}$ vektor-vektorfüggvény az $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^{(n)}$ helyen differenciálható, és $\mathbf{v}$ illetve $\mathbf{r}$ koordinátás alakjai $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$, $\mathbf{r} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, akkor a D derivált $\mathbf{D}$ mátrixának i-edik sorában és k-adik oszlopában álló elem a v_i függvény k-adik koordinátája szerinti parciális deriváltja az $\mathbf{r}_0$ helyen, azaz

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \qquad (i = 1,2,\ldots,m,\ k = 1,2,\ldots,n).$$

A deriváltleképezés $\mathbf{D}$ mátrixát szokás **Jacobi-mátrixnak** is nevezni, melynek determinánsa a már ismert Jacobi-determináns.

P 21.26 Abból, hogy a definícióbeli $E_{\mathbf{r}}$ leképezésre (2) teljesül, az következik, hogy

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \approx D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{3}$$

ha $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0$, amit úgy is kifejezhetünk, hogy a $\mathbf{v}$ függvény az $\mathbf{r}_0$ elég kis környezetében közelítőleg úgy viselkedik, mint a D leképezés az origó megfelelően választott környezetében. A (3)-at átrendezve azt kapjuk, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ vektor és az $\mathbf{r}_0$-beli D derivált ismeretében $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ közelíthető az alábbi képlet szerint:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Legyen például $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x,y) = [x^3 + y^3, x^2y^2]$, $\mathbf{r}_0 = [1,1]$, $\mathbf{r} = [1.01, 1.02]$. Deriválttenzorának mátrixa az $[x,y]$ helyen $\left[\begin{smallmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{smallmatrix}\right]$, azaz $\mathbf{r}_0$-ban $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Így

$$\mathbf{v}(1.01, 1.02) \approx \mathbf{v}(1,1) + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.01 \\ 1.02 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.09 \\ 1.06 \end{bmatrix}.$$

(A pontos érték $\mathbf{v}(1.01, 1.02) = [2.091509, 1.06131204]$.)

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi vektor-vektorfüggvények megadott $\mathbf{r}_0$-hoz tartozó deriváltjának mátrixát, és ennek segítségével közelítsük a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor értékét:

113. $\mathbf{v}(x,y) = [\sin x + \cos y, e^{xy}]$, $\mathbf{r}_0 = [0,0]$, $\mathbf{r} = [0.1, 0.2]$,

114. $\mathbf{v}(x,y) = [x^2, y^2, x+y]$, $\mathbf{r}_0 = [1,3]$, $\mathbf{r} = [1.1, 2.9]$,

115. $\mathbf{v}(x,y,z) = [x+y, y+z]$, $\mathbf{r}_0 = [1,2,3]$, $\mathbf{r} = [1.1, 2.01, 2.98]$.

116.* Mutassuk meg, hogy bármely T tenzor deriváltja minden $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^{(n)}$ pontban önmaga, azaz T.

117. Mutassuk meg, hogy bármely $L : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(m)}$ lineáris leképezés deriváltja minden $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^{(n)}$ pontban létezik, és éppen L.

118. Határozzuk meg az $[x,y,z] \mapsto [2x-y, y-z, x]$ vektor-vektor függvény deriválttenzorát és annak mátrixát.

119. Legyen a $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(n)}$ függvény egy $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektorral való eltolás, azaz $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ ($\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}$). Mutassuk meg, hogy e függvény deriválttenzora minden $\mathbf{r}_0$ helyen az egységtenzor.

120. Határozzuk meg az $[x,y,z] \mapsto [x+1, y-1, z+2]$ vektor-vektorfüggvény deriválttenzorát.

121. Határozzuk meg az $[x,y] \mapsto [1,2,1]$ és az $[x,y,z] \mapsto [1,2,1]$ függvények deriváltjának mátrixát.

122. Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ az a leképezés, mely minden $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{(n)}$ vektorhoz a rögzített $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{(m)}$ vektort rendeli. Mutassuk meg, hogy e függvény deriváltja a zérusleképezés ($n = m$ esetén a zérustenzor).

123.ᐅ Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}^{(3)}$ függvény deriválttenzora akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

124. Legyen $f(x,y,z) = x^2yz$. Írjuk fel a *Grad* **grad** f tenzor mátrixát.

125.ᐅ Legyenek $\mathbf{p} : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(n)}$ és $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(m)} \to \mathbf{R}^{(k)}$ vektor-vektorfüggvények. Legyen $\mathbf{p}$ az $\mathbf{r}_0$-ban, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)$-ban differenciálható, és jelölje a derivált leképezéseket P illetve V. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{r}))$ függvény differenciálható az $\mathbf{r}_0$ helyen, és deriváltja a VP lineáris leképezés.

126. Mutassuk meg, hogy ha a $\mathbf{p} : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(n)}$ vektor-vektorfüggvény $\mathbf{r}_0$-beli deriváltjának mátrixa $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(m)} \to \mathbf{R}^{(k)}$ vektor-vektorfüggvény $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)$-beli deriváltjának mátrixa $\mathbf{V}$, akkor az $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{r}))$ függvény $\mathbf{r}_0$-beli deriváltjának mátrixa $\mathbf{VP}$.

127.ᐅ Legyen a $\mathbf{p} : [x,y] \mapsto [u,w]$ függvény differenciálható $[x_0,y_0]$-ban, deriváltjának mátrixa legyen $\mathbf{P}$, legyen a $\mathbf{v} : [u,w] \mapsto [s,t]$ függvény differenciálható az $[u_0,w_0] = \mathbf{p}(x_0,y_0)$ helyen, deriváltjának mátrixa legyen $\mathbf{V}$. Írjuk fel a $\mathbf{v} \circ \mathbf{p} : [x,y] \mapsto [s,t]$ függvény deriválttenzorának $\mathbf{A}$ mátrixát!

128.▷ Számítsuk ki az $\mathbf{v} : \mathbf{r} = [\rho, \phi] \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}) = [\rho\cos\phi, \rho\sin\phi]$, illetve a $\mathbf{w} : \mathbf{p} = [x, y] \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{p}) = [\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}]$ függvények, valamint a $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$ illetve a $\mathbf{v} \circ \mathbf{w}$ deriválttenzorait az $\mathbf{r}_0 = [1, \pi/4]$, illetve a $\mathbf{p}_0 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ helyeken.

Legyenek az $u : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{v} : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}^{(3)}$, $\mathbf{w} : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}^{(3)}$ függvények differenciálhatóak egy adott $[x_1, x_2, x_3]$ helyen. ($\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ koordinátafüggvényeit jelölje v_i illetve w_i $(i = 1, 2, 3)$). A deriváltak mátrixait felhasználva igazoljuk az alábbi összefüggéseket:

129. $Grad(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = Grad\,\mathbf{v} + Grad\,\mathbf{w}$,

130. $Grad\,u\mathbf{v} = u\,Grad\,\mathbf{v} + \mathbf{v} \circ \operatorname{\mathbf{grad}} u$,

131. $Grad(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times Grad\,\mathbf{w} - \mathbf{w} \times Grad\,\mathbf{v}$.

Tenzor sajátértékei és sajátvektorai

D 21.27 Az A tenzor **sajátértékének** nevezzük a λ valós számot, ha az A értelmezési tartományában van olyan $\mathbf{v}$ vektor, hogy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Az ilyen $\mathbf{v}$ vektort az A tenzor λ sajátértékhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük. (Tehát A sajátértékei megegyeznek az A mátrixának valós sajátértékeivel.)

D 21.28 A **T 20.13** tételből következik, hogy bármely szimmetrikus n-dimenziós A tenzorhoz megadható n darab, egymásra páronként merőleges sajátvektor. Jelölje ezeket $\mathbf{s}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, az $\mathbf{s}_i$-hez tartozó sajátértéket λ_i. Ekkor a tenzorkoordináták felírhatók $\mathbf{a}_i = A\mathbf{s}_i = \lambda_i\mathbf{s}_i$ alakban, így az $(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{s}_i)$ tenzorkomponens $\lambda_i(\mathbf{s}_i \circ \mathbf{s}_i)$ alakú, tehát

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{s}_i \circ \mathbf{s}_i).$$

E felbontást a szimmetrikus A tenzor **spektrál-előállításának**, a sajátértékek halmazát a tenzor **spektrumának** nevezzük.

Feladatok

Az alábbi feladatokban a T háromdimenziós tenzor mátrixának felírása nélkül állapítsuk meg T sajátértékeit és sajátvektorait, majd az eredményt a T-hez tartozó $\mathbf{T}$ mátrix sajátértékeinek kiszámításával ellenőrizzük:

132.▷ T a háromdimenziós vektortér helyvektorainak a z-tengely körüli 45°-os elforgatása,

133.▷ T a háromdimenziós vektortér helyvektorainak az xy síkra való merőleges vetítése,

134. T a tér helyvektorainak az xy-síkon való tükrözése,

135. T a tér minden helyvektorához az $[1, 2, 3]$ vektorral párhuzamos összetevőjét rendeli,

136. T az identikus tenzor,

137. T az zérustenzor,

138.[▷] Írjuk fel a T tenzor mátrixát, ha T sajátvektorai $\mathbf{a} = [1,1,1]$, $\mathbf{b} = [1,2,3]$, $\mathbf{c} = [0,0,1]$, és mindegyikük sajátértéke 1.

139.[▷] Írjuk fel a T tenzor mátrixát, ha T sajátvektorai $\mathbf{a} = [1,2,3]$, $\mathbf{b} = [1,1,1]$, $\mathbf{c} = [-1,0,1]$, és mindegyikük sajátértéke 1.

140.[▷] Írjuk fel a T tenzor mátrixát, ha T-nek sajátvektorai a z-tengellyel párhuzamos vektorok $\lambda = 2$ sajátértékkel, és az $x + y - z = 0$ egyenletű síkkal párhuzamos vektorok $\lambda = 3$ sajátértékkel.

141.[▷] Tegyük fel, hogy a valós n-dimenziós A tenzornak van n lineárisan független sajátvektora, jelölje ezeket $\mathbf{s}_i$ ($i = 1,2,\dots,n$). Legyen egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak a sajátvektorok lineáris kombinációjaként való előállítása: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n$. Állítsuk elő az $A\mathbf{x}$ vektort a sajátvektorok lineáris kombinációjaként.

142.[▷] Tegyük fel, hogy a valós n-dimenziós A tenzornak van n lineárisan független sajátvektora. Jelölje őket $\mathbf{s}_i$, a hozzájuk tartozó sajátértékeket λ_i ($i = 1,2,\dots,n$), közülük a legkisebb illetve legnagyobb sajátértéket pedig jelölje λ_1 illetve λ_n. Bizonyítsuk be (az előző feladatbeli felbontás segítségével), hogy

$$\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{s}_1\cdot A\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_1^2} = \lambda_1, \qquad \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{s}_n\cdot A\mathbf{s}_n}{\mathbf{s}_n^2} = \lambda_n.$$

143.[▷] Legyen A egy n-dimenziós, szimmetrikus tenzor. A **T 20.13** tétel szerint az A tenzorhoz megadható n darab, egymásra páronként merőleges egységnyi hosszúságú sajátvektor. Jelölje ezeket $\mathbf{s}_i$ ($i = 1,2,\dots,n$), az $\mathbf{s}_i$-hez tartozó sajátértéket λ_i, közülük a legkisebb illetve legnagyobb abszolút értékű sajátérték legyen λ_1 illetve λ_n. Bizonyítsuk be, hogy az $|A\mathbf{x}|$ függvénynek az egységnyi abszolút értékű vektorok halmazán van minimuma és maximuma és a minimális érték $|\lambda_1|$, míg a maximális $|\lambda_n|$. Képlettel kifejezve:

$$\min_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}| = |A\mathbf{s}_1| = |\lambda_1|, \qquad \max_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}| = |A\mathbf{s}_n| = |\lambda_n|.$$

144.[▷] Számítsuk ki az $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ és $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$ vektorok diadikus szorzatának sajátértékeit és sajátvektorait!

14. Többváltozós valós függvények differenciálása (megoldások)

1. Mivel x, $y > 0$ esetén

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x}{y}-1+\dfrac{y}{x}}$$

és a jobb oldali tört nevezőjének alsó korlátja 1 (hisz bármely pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, lásd **1.53** feladat), ezért

$$0 < \frac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x}{y}-1+\dfrac{y}{x}} \le \frac{1}{y}+\frac{1}{x},$$

így a határérték 0.

2. Mivel $|\cos y| \le 1$, a határérték 0.

3. $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right) = 4.$$

4. $1/2$.

5. $\ln 2$.

6. $$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \frac{2xy-1}{y+1} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \frac{2x-\dfrac{1}{y}}{1+\dfrac{1}{y}} = 6.$$

7. Mivel $2xy \le x^2+y^2$, ezért $0 < \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0$, ha $x \to \infty$; ezért a határérték 0.

8. Az $f(x,y) = e^{\ln f(x,y)}$ (ha $f(x,y) > 0$) egyenlőség és

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

alapján

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\dfrac{x^2}{x+y}} = e.$$

9. Ha az x tengely mentén tartunk az origóba ($y=0$), akkor $f(x,y) = \frac{x}{x} \to 1$; ha viszont az y tengely mentén, akkor $f(x,y) = \frac{-y}{y} \to -1$, tehát a **D 14.1**-beli

Heine-féle definíció értelmében az L határérték nem létezik. A c) esetben a határérték $\frac{1-m}{1+m}$ $(m \neq -1)$, ugyanis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x-mx}{x+mx} = \frac{1-m}{1+m}.$$

A d) esetben a határérték 1.

10. a) -1, b) 1, c) $\frac{m-1}{m+1}$ $(m \neq -1)$, d) -1. Az L határérték nem létezik.

11. a) 0, b) 0, c) $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \dfrac{mx}{x^2+m^2} \to 0$,

d) $f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^4+x^4} \to \dfrac{1}{2}$. Az L határérték nem létezik.

12. L nem létezik. (A négy eset szerinti határértékek: 1, -1, $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, 1.)

13. Ha az x tengely mentén tartunk az origóba ($y=0$), akkor

$$f(x,y) = \frac{0}{x^3+0} \to 0;$$

ugyanígy, az y tengely mentén is 0 a határérték. Ha viszont az $y = mx$ egyenes mentén tartunk az origóba, akkor

$$f(x,y) = \frac{m^2x^3}{x^3+m^3x^3} \to \frac{m^2}{1+m^3}, \quad (m \neq -1);$$

tehát az L határérték nem létezik. A d) esetben: 0.

14. a) 0, b) 0, c) 0, d) 0. Abból azonban, hogy mind a négy határérték 0, nem vonható le az a következtetés, hogy az L határérték létezik. Ennek a függvénynek a $(0,0)$ pontban nem is létezik határértéke, mivel az $y = x^3$ egyenletű görbén tartva a $(0,0)$ pontba a határérték $\frac{1}{2}$.

15. Az L határérték nem létezik. **16.** Az L határérték nem létezik.

17. Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor vagy

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{\dfrac{x^2}{y^2}+1} \leq x^2 \quad \text{vagy} \quad \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{\dfrac{y^2}{x^2}+1} \leq y^2.$$

$(x,y) \to (0,0)$ esetén $x^2 \to 0$ illetve $y^2 \to 0$, ezért az L határérték 0, ami megegyezik a helyettesítési értékkel, tehát a függvény folytonos.

18. Mivel $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = -1$, ha $x \neq 0$, ezért $L_{12} = \lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)] = -1$. Hasonlóan $L_{21} = \lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)] = 1$. Mivel más határértéket kapunk, ha az x, ill. y tengely mentén tartunk az origóhoz (1, ill. -1), az L határérték nem létezik.

19. Mivel $\lim\limits_{y\to\infty}(x\cos y)$ nem létezik, ha $x \neq 0$, ezért L_{12} nem létezik. Viszont $L_{21} = \lim\limits_{y\to\infty}[\lim\limits_{x\to 0}(x\cos y)] = \lim\limits_{y\to\infty} 0 = 0$. Végül $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}(x\cos y) = 0$, mert $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, és $|\cos y| \leq 1$ (korlátos).

20. $L_{12} = L_{21} = 0$. Viszont L nem létezik, mert ha különböző m meredekségű $y = mx$ egyenletű egyenesek mentén tartunk az origóhoz, akkor különböző $\frac{2m}{1+m^2}$ értékeket kapunk.

21. $L_{12} = 1$, $L_{21} = 0$, L nem létezik.

22. L_{12} és L_{21} egyike sem létezik. $L = 0$.

23. $L_{12} = 1/2$, $L_{21} = 1$, L nem létezik.

24. -20. 25. $[7, 0, 7, 0, 7]$. 26. $4i$.

27. 4. 28. $\frac{3}{2}$. 29. $-\frac{1}{2}$.

30. $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$. Az előző feladat szerint $\frac{\mathbf{ac}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} = -\frac{1}{2}$, tehát $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ hajlásszöge $\frac{2\pi}{3}$.

31. Az, hogy az $[x, y, z, 1]$ vektor merőleges az adott vektorokra, azt jelenti, hogy velük való skaláris szorzata 0. Ebből három egyenletet kapunk az ismeretlen koordinátákra: $x - 2 = 0$, $y + z = 0$, $x + y - z = 0$, ahonnan a keresett vektor $[2, -1, 1, 1]$.

32. Ha $\mathbf{a}$ valós vektor, akkor $\mathbf{a}^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$, ha $\mathbf{a}$ komplex vektor, akkor $\mathbf{a}^2 = a_1\overline{a_1} + \cdots + a_n\overline{a_n} = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2$, és ezek nemnegatív valós számok.

33. Ez azonnal következik a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből, mely szerint $(\mathbf{ab})^2 \le \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$ (lásd **1.85** feladat).

34. Az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}_i$ vektorrendszerre vonatkozó koordinátáit az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4$ egyenletből kaphatjuk meg. Átírva koordinátás alakba: $[0, 1, 0, 1] = a_1[1, 1, 1, 1] + a_2[0, 1, 1, 1] + a_3[0, 0, 1, 1] + a_4[0, 0, 0, 1]$.
Ez a következő egyenletrendszerre vezet:
$0 = a_1$, $1 = a_1 + a_2$, $0 = a_1 + a_2 + a_3$, $1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$,
aminek megoldása: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$. Eszerint az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}_i$ vektorokra vonatkozó koordinátás alakja $\mathbf{a} = [0, 1, -1, 1]_{\mathbf{e}}$. Hasonlóan számolva: $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0]_{\mathbf{e}}$, $\mathbf{c} = [0, 3, -2, 1]_{\mathbf{e}}$. Az $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) vektorok lineáris függetlenségének bizonyításához be kell látni, hogy a
$[0, 0, 0, 0] = x_1[1, 1, 1, 1] + x_2[0, 1, 1, 1] + x_3[0, 0, 1, 1] + x_4[0, 0, 0, 1]$
egyenlőség csak az $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ értékekre áll fenn. Ezt az előzőkhöz hasonlóan láthatjuk be.

35. Igen, mert páronként merőleges egységvektorok, azaz $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ értéke 0, ha $i \ne j$, és 1, ha $i = j$.

36. Az összefüggések mindegyike következik az $\mathbf{R}$ számtest műveleti tulajdonságaiból és a vektorműveletek definícióiból.

38. (1) igazolása: Ha $[x, y, z, w], [x', y', z', w'] \in V$, akkor $x + 2y - z + 3w = 0$ és $x' + 2y' - z' + 3w' = 0$. Ezek összeadásával kapjuk, hogy $(x + x') + 2(y + y') - (z + z') + 3(w + w') = 0$, azaz $[x + x', y + y', z + z', w + w'] \in V$.
(6) igazolása: Ha $[x, y, z, w] \in V$, akkor $x + 2y - z + 3w = 0$. Ezt beszorozva k-val kapjuk, hogy $kx + 2ky - kz + 3kw = 0$, azaz $[kx, ky, kz, kw] \in V$.
A többi összefüggés helyessége a 4-dimenziós vektortér tulajdonságaiból következik.

39. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 40. $f(x, y) = 5x + 3y$.

41. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+z^2-2xz}$. **42.** $f(x,y,z,w)=(x+y+z+w)^2$.

43. $u(\mathbf{r})=[a,b]\cdot\mathbf{r}$. **44.** $u(\mathbf{r})=|\mathbf{r}-[1,-3]|$.

45. $u(\mathbf{r})=([1,0]\cdot\mathbf{r})([0,1]\cdot\mathbf{r})$, vagy $u(\mathbf{r})=\frac{1}{2}(([1,1]\cdot\mathbf{r})^2-\mathbf{r}^2)$.

46. $u(\mathbf{r})=[0,0,0,1]\cdot\mathbf{r}+1$.

47. $\mathbf{grad}f(-2,3)=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$. **48.** $\mathbf{grad}f(1,2)=-\dfrac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\mathbf{j}}{2\sqrt{3}}$.

49. $\mathbf{grad}f(3,-4,7)=-\dfrac{3}{5}\mathbf{i}+\dfrac{4}{5}\mathbf{j}+\mathbf{k}$. **50.** $\mathbf{grad}f(1,-2)=-4\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

51. $\mathbf{grad}f(0,\pi,-2)=-2\mathbf{j}$.

52. Legyen $f(x)=x^{3/2}$, $x=3{,}97$, $x_0=4$, ekkor $x-x_0=-0{,}03$, $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $f(x_0)=8$, $f'(x_0)=3$, $f(x)\approx 8+3(-0{,}03)=7{,}91$. (A pontos érték 8 tizedes pontossággal: 7,91016896.)

53. Legyen $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $P_0(1,2,3)$, $\overrightarrow{P_0P}=[0{,}002;\ 0{,}003;\ 0{,}004]$.
$f'_x=y^2z^3$, $f'_y=2xyz^3$, $f'_z=3xy^2z^2$;
$f(P_0)=108$, $f'_x(P_0)=2^2\cdot 3^3=108$, $f'_y(P_0)=108$, $f'_z(P_0)=108$.
$f(P)\approx 108(1+0{,}002+0{,}003+0{,}004)=108\cdot 1{,}009=108{,}972$.

54. Legyen $f(x,y.z)=x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}$, $P_0(1,1,1)$, $\overrightarrow{P_0P}=[0{,}03;\ -0{,}02;\ 0{,}05]$. $f(P)\approx 1{,}054$.

55. 2,951.

56. $f(x,y)=\sin x\cdot\operatorname{tg}y$, $P_0(\pi/6,\pi/4)$, $\overrightarrow{P_0P}=\left[-\dfrac{\pi}{180},\dfrac{\pi}{180}\right]$. $f(P)\approx 0{,}502$.

57. 0,969.

58. A gradiens nullvektor, ha a koordinátái nullák, azaz, ha f'_x, $f'_y=0$. Egy ilyen pont van, az $(1,2)$ pont.

59. A $P(3,-1)$ pontban.

60. A $P(\dfrac{5}{2},-\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2})$ pontban.

61. Az $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ egyenletű kör pontjaiban.

62. Az $y=-x+\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ és $y=-x+\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ egyenletű egyenesek mentén, $k\in\mathbf{Z}$.

63. Az origót kivéve a tér minden pontjában.

64. A gradiens abszolút értéke 5 egység, ha $\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}=5$. Mivel $f'_x=x$, $f'_y=-y$, ezért $x^2+y^2=25$. Másrészt a gradiens merőleges az a vektorra, ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{grad}f=0$, azaz $3x-4y=0$. Ezekből kapjuk, hogy a keresett helyek a $P_1(4,3)$ és $P_2(-4,-3)$ pontok.

65. A $P_1\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$ és a $P_2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$ pontokban.

66. A $P(5,-4)$ pontban; itt a $\mathbf{grad}f(5,-4)=-6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

67. A $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ és a $P_2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ pontokban.

68. A gradiens nullvektor a $\left(-\frac{30}{7}, \frac{25}{7}\right)$ pontban; 26 egység abszolút értékű és egyirányú a $[12, 5]$ vektorral a $(8, 3)$ pontban.

69. A $(0, \frac{1}{2})$ pontban, ahol $\mathbf{grad} f(0, \frac{1}{2}) = \mathbf{j}$, valamint az $(\frac{1}{2}, 0)$ pontban, ahol $\mathbf{grad} f(\frac{1}{2}, 0) = \mathbf{i}$.

70. Az $y = \sqrt{3}x$ és az $y = -\sqrt{3}x$ egyenletű egyenesek pontjaiban.

71. a) $\mathbf{grad} f(0,0) = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}$.
b) Tartsunk az origóba $y = mx$ egyenletű egyenesek mentén.
Ekkor $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^3+y^3} = \dfrac{m^2x^3}{x^3+m^3x^3} \to \dfrac{m^2}{1+m^3}$, (nem állandó), vagyis az origóban f-nek nem létezik határértéke. Így definíció szerint az origóban f nem folytonos (**D 14.2**), tehát **T 14.10** miatt f ugyanitt nem is differenciálható.

72. a) $\mathbf{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$.
b) Ha az $y = x^2$ egyenletű görbe mentén tartunk az origóba, akkor $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+x^4} = \dfrac{x}{1+x^2} \to 0$, az $y = x$ egyenletű egyenes mentén $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2x^2} \to \dfrac{1}{2}$.

73. a) $\mathbf{grad} f(0,0) = \mathbf{0}$.
b) Különböző m együtthatós $y = mx^2$ egyenletű parabolák mentén tartva az origóhoz $f(x,y) = \dfrac{mx^4}{x^4+m^2x^4} \to \dfrac{m}{1+m^2}$; különböző értékeket kapunk.

74. a) $\mathbf{grad} f(0,0,0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$.
b) Különböző $\mathbf{v}(a,b,c)$ irányvektorú $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ egyenletű egyenesek mentén tartva az origóhoz, $\dfrac{abct^3}{a^3t^3+b^3t^3+c^3t^3} \to \dfrac{abc}{a^3+b^3+c^3}$; különböző értékeket kapunk.

75. Az f függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, sőt léteznek az f_x és f_y parciális deriváltak is, de az f_x függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban (lásd **9.99**), így a **T 14.9** tétel nem alkalmazható a differenciálhatóság bizonyítására. A differenciálhatóság definíciója szerint olyan ε_1, ε_2 függvényeket kell találnunk, melyekre fennáll az $x \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot x + 0 \cdot y + \varepsilon_1(x,y) \cdot x + \varepsilon_2(x,y) \cdot y$ összefüggés. Ennek egyetlen megoldása $\varepsilon_1(x,y) = \sin \frac{1}{x}$, $\varepsilon_2(x,y) = 0$, azonban az ε_1 függvény nem tart 0-hoz, ha $(x,y) \to (0,0)$, így f nem differenciálható.

76. $f'_{\mathbf{a}}(1,-1,1) = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

77. $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 0$.

78. $f'_{\mathbf{a}}(3,40) = \dfrac{96+72\sqrt{3}}{625}$.

79. $f'_{\mathbf{a}}(2,1,0) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$.

80. A feltételekből, $P = (1,2)$ helyettesítéssel $\frac{1}{\sqrt{2}} f'_x(P) - \frac{1}{\sqrt{2}} f'_y(P) = 6\sqrt{2}$, illetve $\frac{1}{\sqrt{2}} f'_x(P) + \frac{1}{\sqrt{2}} f'_y(P) = -2\sqrt{2}$. Ezekből $f'_x(P) = 4$, $f'_y(P) = 8$.

81. $(\nabla f(x,y))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$, másrészt $(f_{\mathbf{a}}(x,y))^2$ a $\nabla f(x,y)$ vektor a egyenesére eső merőleges vetületének négyzete, míg $(f_{\mathbf{b}}(x,y))^2$ a $\nabla f(x,y)$

vektor $\mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületének négyzete, így a Pitagorasz-tételből következik a feladat állítása.

82. $f'_\alpha(\sqrt{3},-1)=0$. 83. $f'_\alpha(-5,5)=1$. 84. $f'_\alpha(\pi/6,\pi/3)=2\sqrt{2}$.

85. Ha $\mathbf{e}$ irányszögei α, β és γ, akkor $1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+\cos^2\gamma$, tehát $\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Így $f'_{\mathbf{e}}(-1,1,0)=\pm 1$.

86. A maximális iránymenti differenciálhányadost adó irányvektor a gradiens, a minimálist adó a gradiens ellentettje. $\mathbf{g}=\mathbf{grad}f(-1,1)=12\mathbf{i}-8\mathbf{j}$, $|\mathbf{g}|=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$. $f'_{\mathbf{g}}(-1,1)=\mathbf{g}\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}=|\mathbf{g}|=4\sqrt{13}$, és $f'_{-\mathbf{g}}(-1,1)=-4\sqrt{13}$.

87. $f'_{\mathbf{g}}(4,-3)=1$, $f'_{-\mathbf{g}}(4,-3)=-1$.

88. $f'_{\mathbf{g}}(-1,1,2)=3\sqrt{53}$. $f'_{-\mathbf{g}}(-1,1,2)=-3\sqrt{53}$.

89. $f'_{\mathbf{g}}(2,1,0)=e\sqrt{e^2+1}$, $f'_{-\mathbf{g}}(2,1,0)=-e\sqrt{e^2+1}$.

90. $z''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{xy}=z''_{yx}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $z''_{yy}=x^y\ln^2 x$.

91. A szokásos megállapodás szerint $x^{y^z}=x^{(y^z)}$, így

$$u''_{xx}=\frac{y^z u}{x^2},\quad u''_{yy}=zy^{z-2}(z-1+zy^z\ln x)\ln x,\quad u''_{zz}=y^z u(1+y^z\ln x)\ln x\ln^2 y,$$

$$u''_{xy}=\frac{zy^{z-1}u(1+y^z\ln x)}{x},\quad u''_{xz}=\frac{y^z u\ln y(1+y^z\ln x)}{x},$$

$$u''_{yz}=y^{z-1}u\ln x[1+z\ln y(1+y^z\ln x)].$$

92. $$u''_{xx}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},\quad u''_{yy}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},\quad u''_{zz}=\frac{yu\ln x(2z+y\ln x)}{z^4},$$

$$u''_{xy}=\frac{u}{xz^2}(z+y\ln x),\quad u''_{xz}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3},\quad u''_{yz}=-\frac{u\ln x}{z^3}(z+y\ln x).$$

93. $$f'_x=\frac{(y^2-2xy)(x+y)-(xy^2-x^2y)}{(x+y)^2}=\frac{y^3-x^2y-2xy^2}{(x+y)^2},$$

$$f'_y=\frac{-x^3+2x^2y+xy^2}{(x+y)^2};$$

$f'_x(0,y)=\dfrac{y^3}{y^2}=y$, ha $y\neq 0$, $f'_y(x,0)=\dfrac{-x^3}{x^2}=-x$, ha $x\neq 0$. Mivel $f(h,0)=0$, ill. $f(0,h)=0$ minden h-ra, ezért $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$, hasonlóan $f'_y(0,0)=0$. A fentiek alapján

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1.$$

94. $$f'_x=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},\quad f'_y=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1,$$

$f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h-0}{h} = 1.$ A feladat megoldása hasonló az előzőéhez.

95. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -a^2 e^{-ay} \cos ax = a(-ae^{-ay} \cos ax) = a\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

96. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = be^{ax+by} = \dfrac{b}{a^2}(a^2 e^{ax+by}) = \dfrac{b}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

97. $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} = (x+4)e^x \cos y - 2(x+2)e^x \cos y + xe^x \cos y = 0.$

98. Vegyük figyelembe, hogy $e^w = e^x + e^y + e^z + e^t$.

99. $f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} + f''_{tt} = -\dfrac{2xyzt}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{2xyzt}{(x^2+y^2)^2} + 0 + 0 = 0.$

100. $p = \dfrac{2-n}{2}.$

101. Ha f gradiense $[P, Q]$, akkor $f_x = P$, $f_y = Q$, és így $f_{xy} = P_y$, $f_{yx} = Q_x$. Mivel az f függvényre a **T 14.15** tétel feltételei fennállnak, ezért $f_{xy} = f_{yx}$, azaz $P_y = Q_x$. Hasonlóan bizonyítható a háromváltozós függvény esete is.

102. Mivel a $P = y^2$ és a $Q = 2xy - 1$ függvények, valamint a $P'_y = 2y$ és $P'_y = Q'_x$, a feladat megoldható. A $P(x,y) = f'_x = y^2$ függvényt x szerint integrálva kapjuk, hogy $f(x,y) = xy^2 + G(y)$, ahol $G(y)$ független x-től (x-re nézve konstans), de függhet y-tól. Most ezt az $f(x,y)$-t y szerint differenciálva adódik, hogy $f'_y(x,y) = 2xy + G'_y(y)$. Másrészt $Q(x,y) = f'_y(x,y) = 2xy - 1$. Az f'_y-ra vonatkozó két egyenletből $G'_y(y) = -1$, s így $G(y) = -y + C$ (C: tetszőleges valós konstans). A keresett függvény: $f(x,y) = xy^2 - y + C$.

103. Mivel $P'_y = -6x$, $Q'_x = 6x$, tehát a $P'_y = Q'_x$ feltétel nem teljesül, így nem létezik olyan függvény, amelynek a megadott skalár-vektorfüggvény a gradiense.

104. $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + C.$

105. $f(x,y) = xy + C.$

106. $f(x,y) = \sin x + y\cos x + C.$

107. Nem létezik olyan függvény, amelyiknek a megadott skalár-vektorfüggvény a gradiense.

108. Mivel a $P = 2x$, a $Q = z$ és az $R = y$ függvények, valamint a $P'_y = 0$, $P'_z = 0$, $Q'_x = 0$, $Q'_z = 1$, $R'_x = 0$, $R'_z = 1$ deriváltak a tér minden pontjában folytonosak, és a $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = Q'_y$ egyenlőségek teljesülnek, létezik a keresett $f(x,y,z)$ függvény. A $P(x,y,z) = f'_x = 2x$ függvényt integráljuk x szerint:

$$(\star) \qquad f(x,y,z) = \int f'_x\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + G(y,z),$$

ahol $G(y,z)$ független x-től, de függhet y-tól vagy z-től (vagy mindkettőtől). Ezt az f függvényt y szerint differenciálva kapjuk, hogy $f'_y = G'_y(y,z)$. Másrészt $f'_y = Q = z$, azaz $G'_y(y,z) = z$. Ezt a G'_y-t y szerint integrálva kapjuk, hogy $G(y,z) = yz + H(z)$, ahol $H(z)$ független x-től és y-tól, de függhet z-től. A $G(y,z)$-nek ezt az értékét a ($\star$) egyenletbe helyettesítve

$f(x,y,z) = x^2+yz+H(z)$. Végül ezt z szerint differenciálva $f'_z = y+H'_z(z) = R = y$, azaz $H'_z = 0$, tehát $H(z) = C$ (konstans), s így a keresett függvény: $f(x,y,z) = x^2+yz+C$.

109. Mivel $P'_y = 0 = Q'_x$, $P'_z = 0 = R'_x$, de $Q'_z = y \neq R'_y = 2y$, nem létezik olyan függvény, amelyiknek a megadott skalár-vektorfüggvény a gradiense.

110. $f(x,y,z) = xyz + C$.

111. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + xy + yz + C$.

112. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C$.

113. $f(x,y,z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x - 2y^3 + 3z^3 + 3z^2 + C$.

114. Nem létezik olyan függvény, amelyiknek a megadott skalár-vektor függvény a gradiense.

115. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial y}$. A másik jelöléssel: $z_x = f'u_x$, $z_y = f'u_y$.

116. $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

117. $\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}$.

118. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial x_2}\cdot\dfrac{dx_2}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial x_3}\cdot\dfrac{dx_3}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial x_4}\cdot\dfrac{dx_4}{dt}$.

119. $\dfrac{\partial z}{\partial v_1} = \dfrac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial v_1} + \dfrac{\partial w}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial v_1} + \dfrac{\partial w}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial v_1} + \dfrac{\partial w}{\partial x_4}\cdot\dfrac{\partial x_4}{\partial v_1}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v_2} = \dfrac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial v_2} + \dfrac{\partial w}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial v_2} + \dfrac{\partial w}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial v_2} + \dfrac{\partial w}{\partial x_4}\cdot\dfrac{\partial x_4}{\partial v_2}$.

120. a) Láncszabállyal:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = (u^2v - uv^2)'_u\cdot(x\cos y)'_x + (u^2v-uv^2)'_v\cdot(x\sin y)'_x$

$= (2uv - v^2)\cos y + (u^2 - 2uv)\sin y$

$= (2x^2\cos y\sin y - x^2\sin^2 y)\cos y + (x^2\cos^2 y - 2x^2\cos y\sin y)\sin y$

$= 3x^2\cos y\sin y(\cos y - \sin y)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = (u^2v - uv^2)'_u\cdot(x\cos y)'_y + (u^2v-uv^2)'_v\cdot(x\sin y)'_y$

$= (2uv - v^2)(-x\sin y) + (u^2 - 2uv)x\cos y$

$= (2x^2\cos y\sin y - x^2\sin^2 y)(-x\sin y) + (x^2\cos^2 y - 2x^2\cos y\sin y)x\cos y$

$= x^3(\cos^3 y - 2\cos^2 y\sin y - 2\cos y\sin^2 y + \sin^3 y)$.

b) Behelyettesítéssel:

$z(x,y) = (x\cos y)^2 x\sin y - x\cos y(x\sin y)^2 = x^3\cos y\sin y(\cos y - \sin y)$, így

$z_x = 3x^2\cos y\sin y(\cos y - \sin y)$,

$z_y = x^3(\cos^3 y - 2\cos^2 y\sin y - 2\cos y\sin^2 y + \sin^3 y)$.

Az utóbbi formula szorzattá alakítható $(\cos y + \sin y)$ kiemelésével, így:

$z_y = x^3(\cos y + \sin y)(1 - 3\cos y\sin y)$.

121. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{xe^{2y} + 2x^3 - 6xy}{\sqrt{x^2e^{2y} + (x^2-3y)^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2e^{2y} - 3x^2 + 9y}{\sqrt{x^2e^{2y} + (x^2-3y)^2}}$.

122. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\dfrac{3x^2}{y^2(3x-2y)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\dfrac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$.

123. $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{2+5(2u+v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot u-\dfrac{3v}{u^2+v^2}+10\sqrt{u^2+v^2}$,

$\dfrac{\partial w}{\partial v}=\dfrac{2+5(2u+v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot v+\dfrac{3u}{u^2+v^2}+5\sqrt{u^2+v^2}$.

($z=w$, $u_1=x$, $u_2=y$, $u_3=z$, $x_1=u$, $x_2=v$ jelölésekkel alkalmazhatjuk a **117**. feladat eredményét.)

124. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{e^{uv}(2uvw-3v^2w^2+2w)}{\sqrt{1-w^2e^{2uv}(2u-3vw)^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{e^{uv}(2u^2w-3uvw^2-3w^2)}{\sqrt{1-w^2e^{2uv}(2u-3vw)^2}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial w}=\dfrac{e^{uv}(2u-6vw)}{\sqrt{1-w^2e^{2uv}(2u-3vw)^2}}$.

125. $\dfrac{dz}{dt}=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

126. $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

127. $\dfrac{dw}{dt}=1+\dfrac{1}{\sin t}+\dfrac{1}{\sin t\cos^2 t}$.

128. $\dfrac{dw}{dt}=\dfrac{2\operatorname{sh}2t+4t}{\sqrt{2\operatorname{ch}t+4t^2}}$.

129. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial t}\right|_{s=1,t=-2}=72$.

130. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial s}\right|_{r=1,s=-1,t=2}=5$.

131. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial v}\right|_{u=0,v=0}=99$.

132. $\left.\dfrac{\partial t}{\partial v}\right|_{u=2,v=\pi,w=\pi/2}=-8$.

133. $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=\pi}=\dfrac{1}{1+\pi}$.

134. $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=1/4}=-\dfrac{1+\pi}{2}$.

135. $\dfrac{\partial w}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}e^s\cos t+\dfrac{\partial f}{\partial y}e^s\sin t$, $\dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}e^s\sin t+\dfrac{\partial f}{\partial y}e^s\cos t$.

$\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^s\cos t+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}e^s\sin t$. Hasonlóan kapható meg $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\right)$ és $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\right)$, amiből

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{2s}\cos^2 t+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}e^{2s}\sin^2 t$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{2s}\sin^2 t+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}e^{2s}\cos^2 t$.

136. A **T 14.18** szerint $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial z}{\partial x}r\sin\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial y}r\cos\varphi$.

A $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ismeretlenekre nézve lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódnak az a) rész egyenletei; ezek megfelelő oldalait négyzetre emelve és összeadva kapjuk a b) rész egyenletét.

137. $(x,y)\neq(0,0)$, illetve $r\neq 0$ esetén: $z''_{rr}+\dfrac{1}{r^2}z''_{\varphi\varphi}+\dfrac{1}{r}z'_r=0$.

138. $(x,y)\neq(0,0)$, illetve $r\neq 0$ esetén: $f'_r=\dfrac{1}{r}g'_\varphi$, $g'_r=-\dfrac{1}{r}f'_\varphi$.

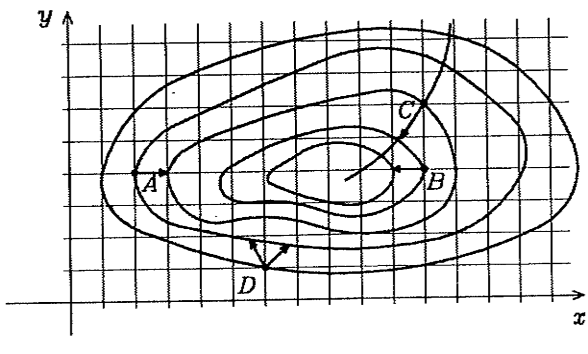
139. Differenciáljuk az $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ egyenlet mindkét oldalát t szerint. Akkor a bal oldal: $\frac{d}{dt} f(tx, ty) = f'_x(tx, ty) \cdot x + f'_y(tx, ty) \cdot y$, a jobb oldal: $nt^{n-1} f(x, y)$. Ezekből $t = 1$ helyettesítéssel adódik a bizonyítandó egyenlőség. Látható, hogy n tetszőleges valós szám lehet.

140. Az egyenlőség bizonyítható közvetlen számolással, vagy az előző feladat alapján: mivel $\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(tx)(ty)} = t^0 \frac{x^2 + y^2}{xy}$, ezért most $nf(x, y) = 0 \cdot f(x, y) = 0$.

141. $y'_t(x, t) = \frac{1}{2}[-cf'(x-ct)+cf'(x+ct)]$, $y''_{tt}(x, t) = \frac{1}{2}[c^2 f''(x-ct)+c^2 f''(x+ct)]$. $y'_x(x, t) = \frac{1}{2}[f'(x - ct) + f'(x + ct)]$, $y''_{xx}(x, t) = \frac{1}{2}[f''(x - ct) + f''(x + ct)]$.

142. Tegyük fel, hogy az implicit $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ függvényből x_0 valamely környezetében y kifejezhető x függvényeként, azaz $y = g(x)$. Visszahelyettesítve e függvényt y helyébe, egy összetett függvényt kapunk, mely x_0 e környezetébe eső minden x helyen ugyanazt az értéket veszi fel: $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$. Differenciáljuk az egyenlőség mindkét oldalát, a bal oldalt a láncszabály alkalmazásával: $f_x \frac{dx}{dx} + f_y \frac{dg}{dx} = 0$, azaz $[f_x, f_y] \cdot [1, g'] = 0$, ami épp azt jelenti, hogy a nívóvonal érintője merőleges a gradiensvektorra. Ha a nívóvonal érintője az (x_0, y_0) pontban párhuzamos az y-tengellyel, akkor az x-et fejezzük ki y függvényeként, és hasonló lépések után ugyanezt az eredményt kapjuk. Az állítás általánosítható többváltozós függvényekre is: ha f differenciálható egy P_0 helyen, akkor a P_0 ponton áthaladó nívófelület (szintfelület) merőleges a P_0-hoz tartozó gradiensvektorra.

143. Fel kell tételeznünk, hogy f-nek nincsenek az ábráról le nem olvasható változásai, azaz szemléletesen kifejezve a grafikon "egyenletesen változva és simán" köti össze a nívóvonalakat. Az iránymenti deriváltak értéke hozzávetőlegesen leolvasható a függvény adott irányban vett megváltozásából, így $f_x(A) \approx 1$, $f_y(B) \approx 0$, $f_{\mathbf{a}}(C) \approx \sqrt{2}/2$. A gradiensvektor merőleges a nívóvonalra (lásd előző feladat), és hossza a gradiensvektor irányában vett iránymenti deriválttal egyenlő (lásd **T 14.14**). Az esőcsepp olyan úton halad, mely minden pontban a lehető legmeredekebben lejt, azaz az esőcsepp mozgásirányának xy síkra való vetülete egyirányú a gradiensvektor -1-szeresével. A válaszokat lásd a mellékelt ábrán.



15. A többváltozós Taylor-formula és alkalmazásai (megoldások)

1. Mivel $f_x(x,y) = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = y/\sqrt{x^2+y^2}$, $f_x(3,4) = \frac{3}{5}$, $f_y(3,4) = \frac{4}{5}$, ezért a P illetve Q pontokhoz tartozó teljes differenciál
$$df(3,4;dx,dy) = df(3,4) = \frac{3}{5}dx + \frac{4}{5}dy, \quad \text{illetve}$$
$$df(x,y;dx,dy) = df(x,y) = df = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$
Mindkét differenciálnál felírtuk df egyszerűbb alakjait is.

2. $df = df(x,y,z) = \dfrac{2xy}{4-z^2}dx + \dfrac{x^2}{4-z^2}dy + \dfrac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}dz$, $df(1,0,1) = \frac{1}{3}dy$.

3. A parciális deriváltak konstansok, így a sík bármely pontjához tartozó differenciál ugyanaz a függvény: $df(x,y;dx,dy) = df(1,1;dx,dy) = 7dx - 2dy$. Az argumentumok nélküli jelöléssel $df = 7dx - 2dy$.

4. $df = dx$ (lásd a **D 15.2** végén zárójelbe tett megjegyzést). Hasonlóképpen az $f(x,y,z) = y$ függvény teljes differenciálja dy, az $f(x,y,z) = z$ függvény teljes differenciálja pedig dz.

5. $df(x,y) = [y\cos x - \sin(x-y)]dx + [\sin x + \sin(x-y)]dy$, $df(\pi,0) = 0$.

6. $ds = \dfrac{w}{u\sqrt{u^2v^2-w^2}}du + \dfrac{w}{v\sqrt{u^2v^2-w^2}}dv - \dfrac{1}{\sqrt{u^2v^2-w^2}}dw$.

7. $df = df(x_0,y_0) = \dfrac{y_0}{1+x_0^2y_0^2}dx + \dfrac{x_0}{1+x_0^2y_0^2}dy$.

8. $df = df(x,y,z) = \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$, $df(a,b,c) = \dfrac{dx+dy+dz}{a+b+c}$.

9. $dz = dz(p,q,r;dp,dq,dr) = qre^{pqr}dp + pre^{pqr}dq + pqe^{pqr}dr$,
$dz(1,0,1) = dz(1,0,1;dp,dq,dr) = dq$.

10. $df = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$, $df(1,1;dx,dy) = dx$.

11. $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(a) = 11$, $df(a;dx) = 11\cdot(-0.1) = -1.1$.

12. $df(a;dx) = -0.01$.

13. $f_x(x,y) = 2x - y$, $f_x(A) = 5$, $f_y(x,y) = -x + 4y$, $f_y(A) = -6$.
$df(A;dx,dy) = 5\cdot(-0.01) + (-6)\cdot 0.02 = -0.17$.

14. $df(A;\mathbf{dx}) = -0.45$.

15. $df(A;dx,dy,dz) = -0.08$.

16. $df(A;\mathbf{dx}) = 0.96$.

17. $df(A;dx,dy) = -\frac{1}{90}$.

18. $df(A;dx,dy) = 0.03$.

19. $df(A;dp,dq) = 0$.

20. $df(A;d\alpha,d\beta) = \pi(\pi-5)/2$.

21. $df(A;dx,dy) = -0.04$.

22. $df(A;du,dv) = -0.1$.

23. $df(A;dx,dy) = -0.025\pi$.

24. A közelítő érték kiszámításához felhasználjuk az $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ függvény $P_0(25,1000)$ ponthoz tartozó differenciálját a $dx = 2$, $dy = 21$ helyen. (Azért

választottuk ezt a P_0 helyet, mert a 25 a 27-hez legközelebbi olyan szám, melynek négyzetgyökét ismerjük, 1000 pedig az, amelyiknek a köbgyökét ismerjük.)
$f_x(25,1000) = 1$, $f_y(25,1000) = \frac{1}{60}$. $df(25,1000;2,21) = 1\cdot 2 + \frac{21}{60} = 141/60 = 2.35$, így $\sqrt{27}\sqrt[3]{1021} \approx \sqrt{25}\sqrt[3]{1000} + 2.35 = 52.35$.

25. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(5,12)$, $dx = 0.02$, $dy = -0.03$,
$df(5,12;0.02,-0.03) = -0.02$, $\sqrt{5.02^2+11.97^2} \approx \sqrt{5^2+12^2} - 0.02 = 12.98$.

26. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P_0(3,2,6)$, $dx = 0.02$, $dy = -0.01$, $dz = -0.03$,
$df = -0.02$, $\sqrt{3.02^2+1.99^2+5.97^2} \approx \sqrt{3^2+2^2+6^2} - 0.02 = 6.98$.

27. $f(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y} - 1)$, $P_0(2,1)$, $dx = -0.03$, $dy = 0.02$,
$df = \frac{1}{2}(-0.03) - 0.02 = -0.035$, $\operatorname{arctg}(\frac{1.97}{1.02} - 1) \approx \frac{\pi}{4} - 0.035 \approx 0.750$.

28. Az összefüggések következnek a differenciálás szabályaiból. Például: $d(f+g) = (f'+g')dx = f'dx + g'dx = df + dg$.

29. A gömb térfogata $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. Ha r jelöli a gömb sugarának pontos értékét, r_0 a mért értéket és dr a mérés pontosságát, akkor az adatokat mm-ben mérve $r_0 = 50$, $dr = \pm 0.1$. A differenciál: $dV = dV(r_0; dr) = 4r_0^2\pi\,dr$, melynek helyettesítési értéke $dV = 4(2500)(\pm 0.01)\pi \approx \pm 314.159$, azaz a térfogat pontossága $\Delta V \approx dV \approx \pm 314.159$ mm^3.

30. A gömb sugara $r_0 = 50$ mm, a bevonattal ellátott gömbé $r = 50.1$ mm. A gömb térfogatának megváltozása $\Delta V \approx dV \approx 314.159$ mm^3. (Lásd az előző feladatot.)

31. Az, hogy a kocka a élét 1%-os relatív hibával mérjük, azt jelenti, hogy a mért és a pontos érték eltérése legfeljebb $|0.01a|$, azaz $|da/a| = 0.01$. Ha F jelöli a felszínt és V a térfogatot, akkor ezek relatív pontosságát a $|\Delta F/F|$ és a $|\Delta V/V|$ adja. Ezek becslésére a $|dF/F|$ és a $|dV/V|$ értékeket használjuk. A felszín: $F = 6a^2$, $dF = 12a\,da$, $|dF/F| = 2|da/a|$, tehát a felszín relatív hibája megközelítőleg az él relatív hibájának kétszerese, vagyis 2%. A térfogat: $V = a^3$, $dV = 3a^2\,da$, $|dV/V| = 3|da/a|$, tehát a térfogat relatív hibája megközelítőleg az él relatív hibájának háromszorosa, vagyis 3%.

32. $dy = d(cx^k) = ckx^{k-1}\,dx$, ebből $|dy/y| = k|dx/x|$, azaz $|\Delta y/y| \approx k|dx/x|$, ha $dx \approx 0$.

33. A henger térfogata $V = r^2 m\pi$, ahol r a sugarat, m a magasságot jelöli. Becslést keresünk a $|\Delta V/V|$ értékre.
$|\Delta V| \approx |dV| = \left|\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial m}dm\right| = |2\pi rm\,dr + \pi r^2\,dm|$, innen
$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{dV}{V}\right| = \left|2\frac{dr}{r} + \frac{dm}{m}\right| \le 2\left|\frac{dr}{r}\right| + \left|\frac{dm}{m}\right| = 2(0.01) + 0.02 = 0.04.$$
Tehát a térfogat lehetséges hibája közelítőleg 4%.

34. Az átfogó hibája legfeljebb 0.014 mm, a szögé legfeljebb 0.0028 radián.

35. Mivel $dR = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 dR_2$, ezért $R_1 < R_2$ esetén dR_1 együtthatója nagyobb, így R_1 megváltozására érzékenyebb az eredő ellenállás.

36. Mivel f másodfokú polinom, ezért bármely pontjához tartozó második Taylor-polinomja megegyezik f-fel, tehát $T_2 = f$. (Természetesen igaz az is, hogy $T_k = f$, ha $k \geq 2$.) Ha azonban T_2-t a definíció szerint kiszámítjuk, a polinomot $(x-1)$ és $(y+2)$ polinomjaként kapjuk meg. $f_x(x,y) = 4x - y - 6$, $f_y(x,y) = -x - 2y - 3$, $f_{xx}(x,y) = 4$, $f_{yy}(x,y) = -2$, $f_{xy}(x,y) = -1$, $f(P_0) = 5$, $f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 0$, $f_{xx}(P_0) = 4$, $f_{yy}(P_0) = -2$, $f_{xy}(P_0) = -1$. Ezeket az értékeket a **D 15.4**-beli megfelelő képletekbe behelyettesítve: $T_1(x,y) = 5$, $T_2(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2 = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$. (Mint a T_1 példája mutatja, lehetséges, hogy az n-edik Taylor-polinom fokszáma kisebb mint n.)

37. $T_1(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(x+y)$,
$T_2(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(y-\frac{\pi}{4})^2 = \frac{1}{4}(-\pi + 2 + 2x + 2y + 2xy - x^2 - y^2)$.

38. $f_x(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+(y+1)^2}$,
$f_{xx}(x,y) = -f_{yy} = -\dfrac{2x(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^2}$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{x^2-(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}$.
$T_1(x,y) = \frac{\pi}{4} + x$, $T_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + x - xy$.

39. $T_1(x,y,z) = 0$, $T_2(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (y-1)(z-1) = 4 - 4x - 3y - z + 2xy - yz + x^2 + y^2 + z^2$.

40. Keressük a polinomot $T_3(x,y) = a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + d(x-x_0)^2 + e(x-x_0)(y-y_0) + g(y-y_0)^2 + h(x-x_0)^3 + j(x-x_0)^2(y-y_0) + k(y-y_0)^2(x-x_0) + l(y-y_0)^3$ alakban. Harmadrendű parciális deriváltjait kiszámítva, majd azt az f függvény harmadrendű parciális deriváltjaival összehasonlítva azt kapjuk, hogy
$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!}[f_{xxx}(P_0)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}(P_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3f_{xyy}(P_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(P_0)(y-y_0)^3]$. Kereshetjük a polinomot $T_3(x,y) = T_2(x,y) + a(x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2(y-y_0) + c(y-y_0)^2(x-x_0) + d(y-y_0)^3$ alakban is, ugyanis erről T_2 tulajdonsága miatt látható, hogy legfeljebb másodrendű parciális deriváltjai megegyeznek az f megfelelő parciális deriváltjaival. Harmadrendű parciális deriváltjait kiszámítva, majd azt az f függvény harmadrendű parciális deriváltjaival összehasonlítva ugyanazt a polinomot kapjuk, mint az előbb.

41. $f_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f_x(P_0) = 1$, $f_y(x,y) = x^y \ln x$, $f_y(P_0) = 0$, $f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$, $f_{xx}(P_0) = 0$, $f_{xy}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$, $f_{xy}(P_0) = 1$, $f_{yy}(x,y) = x^y \ln^2 x$, $f_{yy}(P_0) = 0$, $f_{xxx}(x,y) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}$, $f_{xxx}(P_0) = 0$, $f_{xxy}(x,y) = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x$, $f_{xxy}(P_0) = 1$, $f_{xyy}(x,y) = x^{y-1}\ln x(2 + y\ln x)$, $f_{xyy}(P_0) = 0$, $f_{yyy}(x,y) = x^y \ln^3 x$, $f_{yyy}(P_0) = 0$.
$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$.

42. $T_3(x,y) = 1 + 2(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (x-1)^2(y-1)$.

43. Az összes parciális derivált e^{x+y}, így a helyettesítési értéke P_0-ban mindegyiknek 1. Tehát

$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{1}{2}[(x-1)+(y+1)]^2 + \frac{1}{6}[(x-1)+(y+1)]^3 = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{6}(x+y)^3$.

44. $T_3(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}[x^2 - (y-\frac{\pi}{2})^2] + \frac{1}{6}[x^3 - 3x(y-\frac{\pi}{2})^2]$.

45. Az f harmadfokú polinom, így bármely (x_0, y_0) ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomja megegyezik vele. Írjuk fel tehát az f függvény $P_0(1,2)$ ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomját. E polinom $x-1$ és $y-2$ polinomjaként van felírva, így épp a kívánt tulajdonságú.
$T_3(x,y) = -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 + (x-1)^3 - 2(y-2)^3$.
(Egy másik megoldás: helyettesítsünk az $x^3 - 2y^3 + 3xy$ polinomban x helyébe $x+1$-et, y helyébe $y+2$-őt, majd e polinomban bontsuk fel a zárójelet. Az így kapott polinomban helyettesítsünk x helyébe $x-1$-et, y helyébe $y-2$-őt. Ez épp a polinom keresett alakja.)

46. Hasonlóan az előző feladathoz, fel kell írnunk az f polinom $P_0(1,1)$ ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomját:
$T_3(x,y) = (x-1)^3 + (y+2)^3 + 3[(x-1)^2 + (y+2)] - 6(x-1)(y+2)$.

47. Az $f(x,y) = x^y$ függvényt közelítjük az $(1,2)$ helyhez tartozó T_2 polinom $(1+h, 2+k) = (1-0.05, 2+0.01)$ helyen vett helyettesítési értékével:
$T_2(0.95, 2.01) = 1 + 2(-0.05) + \frac{1}{2}[2 \cdot 0.05^2 + 2(-0.05)\cdot 0.01] = 0.902$.

48. Az $f(x,y) = x^y$ függvényt közelítjük az (41. feladatban már kiszámított) $(1,1)$ helyhez tartozó T_3 polinom $(1+h, 1+k) = (1+0.1, 1+0.02)$ helyen vett helyettesítési értékével:
$T_3(1.1, 1.02) = 1 + 0.1 + 0.1 \cdot 0.02 + \frac{1}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.02 = 1.1021$.

49. A $\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ függvényt közelítjük az $(1,1)$ helyhez tartozó T_2 polinom $(1+h, 1+k) = (1+0.03, 1-0.02)$ helyen vett helyettesítési értékével:
$T_2(1.03, 0.98) = 1 + \frac{1}{2}(0.03) + \frac{1}{3}(-0.02) + \frac{1}{2}[-\frac{1}{4}(0.03)^2 + 2(\frac{1}{6})(0.03)(-0.02) - \frac{2}{9}(-0.02)^2] = 1.0080763\dot{8}$.

50. $T_0(x,y) = 0$, $T_1(x,y) = y$, $T_2(x,y) = y + xy$, $T_3(x,y) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$.
$T_0(0.1, 0.2) = 0$, $T_1(0.1, 0.2) = 0.2$, $T_2(0.1, 0.2) = 0.22$, $T_3(0.1, 0.2) = 0.219\dot{6}$,
$e^{0.1}\sin 0.2 \approx 0.2195635667$.

51. A $P_0(x_0, y_0)$, $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ jelölésekkel:
$T_1(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(P_0) + f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy = f(P_0) + df(P_0)$,
$T_2(x_0+dx, y_0+dy) = T_1(x_0+dx, y_0+dy) + \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)(dx)^2 + 2f_{xy}(P_0)(dx)(dy) + f_{yy}(P_0)(dy)^2] =$
$f(P_0) + f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy + \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)\,dx^2 + 2f_{xy}(P_0)\,dx\,dy + f_{yy}(P_0)\,dy^2]$.

52. $f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$, $f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$. A $3x^2 - 3y = 0$, $3y^2 - 3x = 0$ egyenletrendszer megoldásai $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$. Tehát szélsőérték lehet a $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$ pontokban. A második deriváltak: $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = -3$, $f_{yy}(x,y) = 6y$. A P_1 pontban $D(0,0) = -9 < 0$, tehát nincs szélsőérték, e helyen nyeregpont van. A P_2 pontban $D(1,1) = 27 > 0$, $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, tehát minimum van.

53. Szélsőérték lehet a $(0,0)$ pontban. Mivel $D(0,0) = -84 < 0$, nincs szélsőérték, e helyen nyeregpont van.

54. Szélsőérték lehet a $(0,0)$ pontban. Mivel $D(0,0) = 76 > 0$ és $f_{xx}(0,0) = 8 > 0$, ezért e pontban minimum van.

55. Szélsőérték lehet a $(0,0)$ pontban. Mivel $D(0,0) = 76 > 0$ és $f_{xx}(0,0) = -8 < 0$, ezért e pontban maximum van.

56. Szélsőérték lehet a $(0,0)$ és az $(1,1)$ pontokban. Mivel $D(0,0) = -9 < 0$, ezért a $(0,0)$ helyen nyeregpont van. $D(1,1) = 27 > 0$ és $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, ezért az $(1,1)$ pontban minimum van.

57. Szélsőérték lehet a $(0,0)$ és az $(-1,-1)$ pontokban. Mivel $D(0,0) = -9 < 0$, ezért a $(0,0)$ helyen nyeregpont van. $D(-1,-1) = 27 > 0$ és $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$, ezért a $(-1,-1)$ pontban maximum van.

58. $f_x(x,y) = 8x^3 - 2x$, $f_y(x,y) = 4y^3 - 4y$, tehát szélsőérték lehet a
$P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(0,-1)$,
$P_4(-\frac{1}{2},0)$, $P_5(-\frac{1}{2},1)$, $P_6(-\frac{1}{2},-1)$,
$P_7(\frac{1}{2},0)$, $P_8(\frac{1}{2},1)$, $P_9(\frac{1}{2},-1)$ pontokban.
A második deriváltak: $f_{xx}(x,y) = 24x^2-2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2-4$.
$D(P_1) = 8 > 0$, $f_{xx}(P_1) = -2 < 0$, tehát P_1-ben maximum van.
$D(P_i) = -16 < 0$, tehát P_i-ben nincs szélsőérték, ha $i = 2,3,4,7$.
$D(P_i) = 32 > 0$, $f_{xx}(P_i) = 4 > 0$, tehát P_i-ben minimum van, ha $i = 5,6,8,9$.

59. Az $f_x(x,y) = 4x^3 - 2x - 2y = 0$, $f_y(x,y) = 4y^3 - 2x - 2y = 0$ egyenletrendszerből kivonással $x^3 - y^3 = 0$, ebből pedig $x = y$ adódik. Ezt felhasználva $4x^3 - 4x = 0$, tehát szélsőérték lehet a $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(-1,-1)$ pontokban. A második deriváltak: $f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2$, $f_{xy}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 2$. $D(1,1) = D(-1,-1) = 96 > 0$, $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) = 10 > 0$, tehát a P_2 és P_3 pontokban f-nek minimuma van. $D(0,0) = 0$, így a $P_1(0,0)$ pontban más módszert kell alkalmazni. Azt, hogy P_1 nem szélsőértékhely, a következőképpen láthatjuk be: $f(0,0) = 0$, azonban $(0,0)$ bármely környezetében f felvesz pozitív és negatív értéket is, ugyanis, ha az $y = -x$ egyenes mentén tartunk a $(0,0)$ ponthoz, akkor a függvény értéke $2x^4 > 0$, ha pedig az $y = x$ egyenes mentén tartunk a $(0,0)$ ponthoz, akkor a függvény értéke $2x^2(x^2 - 2)$, ami negatív, ha $|x| < \sqrt{2}$.

60. $D(0,0) = 0$, tehát a második deriváltakkal nem tudjuk eldönteni, hogy e pont szélsőértékhely, vagy nem. E pont azonban nyilvánvalóan minimumhely, hisz a függvény minden más pontban pozitív értéket vesz fel, csak itt zérust.

61. $D(0,0) = 0$, tehát a második deriváltakkal nem tudjuk eldönteni, hogy a $(0,0)$ pont szélsőértékhely, vagy sem. E pont azonban nyilvánvalóan nem szélsőértékhely, hisz $f(0,0) = 0$, másrészt $(0,0)$ bármely környezetében van olyan (x,y) pont, ahol $|x| > |y|$, itt f értéke pozitív, és van olyan (x,y) pont, ahol $|x| < |y|$, itt f értéke negatív.

62. Szélsőérték lehet a $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(-1,-1)$ pontokban. A P_1 pontban nincs szélsőérték, a P_2 és P_3 pontokban f-nek minimuma van.

63. Az $f_x(x,y) = y^2(1-x-2y) - xy^2 = 0$
$f_y(x,y) = 2xy(1-x-2y) - 2xy^2 = 0$
feltételekből $x \neq 0$, $y \neq 0$ miatt $1-x-2y = x$ és $1-x-2y = y$ adódik, amiből $x = y = \frac{1}{4}$. $f_{xx}(x,y) = -2y^2$, $f_{xy}(x,y) = 2y(1-2x-3y)$, $f_{yy}(x,y) = 2x(1-x-6y)$, $P(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$-ben maximum van.

64. $(2,4)$-ben minimum.

65. Az első és második deriváltak meghatározásával kapjuk, hogy az $(\frac{1}{2},1)$ pontban minimum, a $(-\frac{1}{2},-1)$ pontban maximum van. (A második deriváltak meghatározása elkerülhető az alábbi két megjegyzés alapján:
1. A függvény az $x \to -x$, $y \to -y$ helyettesítéssel ellentettjére válik, tehát ha (x_0,y_0)-ban minimum van, akkor $(-x_0,-y_0)$-ban maximum.
2. A függvény $x > 0$, $y > 0$ esetén mindenütt pozitív, tehát alulról korlátos; másrészt az $x \to \infty$, y rögzített, vagy az $y \to \infty$, x rögzített, vagy az $x \to 0$, y rögzített, vagy az $y \to 0$, x rögzített esetekben végtelenhez divergál. Emiatt a függvénynek e tartományon csak minimuma lehet.)

66. A $(3,3)$ pontban minimum van.

67. Szélsőérték lehet a $(0,1)$ pontban. Mivel $D(0,1) = -1 < 0$, nincs szélsőérték, e helyen nyeregpont van.

68. Szélsőérték lehet az $(\frac{1}{2},2)$ pontban. Mivel $D(\frac{1}{2},2) = 1 > 0$ és $f_{xx}(\frac{1}{2},2) = 8 > 0$, ezért e pontban minimum van. (Deriválás előtt érdemes elvégezni az $\ln x^2y = 2\ln x + \ln y$ átalakítást.)

69. Szélsőérték lehet a $(0,0)$ pontban. Mivel $D(0,0) = -1 < 0$, nincs szélsőérték, e helyen nyeregpont van.

70. Az első deriváltak alapján szélsőérték lehet a $(0,n\pi)$ pontokban, ahol n egész szám. $D(0,n\pi) = -1 < 0$, tehát e pontok mindegyikében nyeregpont van.

71. Az első deriváltak alapján szélsőérték lehet a $(\frac{\pi}{2}+k\pi, l\pi)$ pontokban, ahol k és l egész számok. A második deriváltak alapján, ha k és l páros, akkor maximum, ha k és l páratlan, akkor minimum van, a többi pontban nincs szélsőérték.

$\dot{7}$2. A bal oldali függvényt $F(x,y,g(x,y))$-nal jelölve és mindkét oldal x és y szerinti parciális differenciálhányadosát kiszámítva kapjuk, hogy:
$F_x(x,y,z) = 10x + 10zg_x - 2y - 2z - 2xg_x - 2yg_x = 0$,
$F_y(x,y,z) = 10y + 10zg_y - 2x - 2z - 2xg_y - 2yg_y = 0$.
Ezekből a $z_x = z_y = 0$ feltétel behelyettesítésével kapjuk, hogy $5x - y - z = 0$, $5y - x - z = 0$, amiből $y = x$ és $z = 4x$. E két egyenlőséget behelyettesítve a $g(x,y)$ függvényt meghatározó eredeti egyenletbe kapjuk, hogy $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 4$, illetve $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $z_2 = -4$. Szélsőérték lehet a $P_1(1,1)$ és a $P_2(-1,-1)$ pontokban. Az F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} kiszámítása és az x_i, y_i, z_i $(i = 1,2)$ értékek behelyettesítése után kapjuk, hogy $D(1,1) = 24/18^2 > 0$, $g_{xx}(1,1) = -5/18 < 0$, tehát P_1 minimumhely, továbbá $D(-1,-1) = 24/18^2 > 0$, $g_{xx}(-1,-1) = 5/18 > 0$, tehát P_2 maximumhely.

73. Szélsőérték lehet a $P_1(-2,0)$, $P_2(\frac{16}{7},0)$ pontokban.
P_1-ben $D(-2,0) = (4/15)^2 > 0$, $g_{xx}(-2,0) = 4/15$, tehát minimum van, P_2-ben $D(\frac{16}{7},0) = (4/15)^2 > 0$, $g_{xx}(\frac{16}{7},0) = -4/15$, tehát maximum van.

74. $f_x(x,y,z) = 2x+2$, $f_y(x,y,z) = 2y+4$, $f_z(x,y,z) = 2z-6$ zérushelyei $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$. $f_{xx}(x,y,z) = f_{yy}(x,y,z) = f_{zz}(x,y,z) = 2$, $f_{xy}(x,y,z) = f_{xz}(x,y,z) = f_{yz}(x,y,z) = 0$. Mivel a

$$2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

sorozat elemei pozitívak, a függvénynek a $P(-1,-2,3)$ pontban minimuma van.

75. Az első deriváltak alapján szélsőérték lehet a $(-1,1,2)$ pontban. A második deriváltakból kapott

$$-2, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

sorozat elemei váltakozó előjelűek, és az első elem negatív, így a $P(-1,1,2)$ pontban maximum van.

76. A $(4,2,-1)$ pontban a függvénynek minimuma van.

77. Az $f_x(x,y,z) = y^2z^3(1-x-2y-3z) - xy^2z^3 = 0$

$f_y(x,y,z) = 2xyz^3(1-x-2y-3z) - 2xy^2z^3 = 0$

$f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2(1-x-2y-3z) - 3xy^2z^3 = 0$

feltételekből $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ miatt $1-x-2y-3z = x$, $1-x-2y-3z = y$, $1-x-2y-3z = z$ adódik, amiből $x = y = z = \frac{1}{7}$. $f_{xx}(x,y,z) = -2y^2z^3$, $f_{xy}(x,y,z) = 2yz^3(1-2x-3y-3z)$, $f_{xz}(x,y,z) = 3y^2z^2(1-2x-2y-4z)$, $f_{yy}(x,y,z) = 2xz^3(1-x-6y-3z)$, $f_{yz}(x,y,z) = 6xyz^2(1-x-3y-4z)$, $f_{zz}(x,y,z) = 6xy^2z(1-x-2y-6z)$. A második deriváltakból kapott

$$-\frac{2}{7^5}, \quad \frac{1}{7^{10}}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = \frac{8}{7^{10}}, \quad \frac{1}{7^{15}}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -12 \end{vmatrix} = -\frac{42}{7^{15}}$$

sorozat elemei váltakozó előjelűek, és az első elem negatív, így a $P(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7})$ pontban maximum van.

78. Szélsőérték lehet a $P_1(2,4,8)$ és $P_2(-2,4,-8)$ pontokban. A determináns-sorozat a P_1 pontban 1, $3/2^4$, $1/2^7$, tehát a függvénynek e pontban minimuma van. A determináns-sorozat a P_2 pontban -1, $3/2^4$, $-1/2^7$, tehát a függvénynek e pontban maximuma van.

79. Szélsőérték lehet a $P_1(\frac{1}{2},1,1)$ és $P_2(-\frac{1}{2},-1,-1)$ pontokban. A determináns-sorozat a P_1 pontban 4, 8, 32, tehát a függvénynek e pontban minimuma van. A determináns-sorozat a P_2 pontban -4, 8, -32, tehát a függvénynek e pontban maximuma van.

80. Szélsőérték lehet a $(2,4,8,16)$ pontban. A determináns-sorozat e pontban 1, $3/2^4$, $1/2^7$, $5/2^{16}$, tehát a függvénynek e pontban minimuma van.

81. $x(t) = t$, $y(t) = 2t + 1$, ahol $t \in [-1,0]$. $z(t) = f(x(t), y(t)) = 2t^2 + t$, $z'(t) = 4t + 1$, szélsőérték lehet a derivált zérushelyén és a végpontokban. Ezek alapján az f függvény minimuma az adott szakaszon $-\frac{1}{8}$, a minimum helye $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, az f függvény maximuma az adott szakaszon 1, a maximum helye $(-1,-1)$.

82. A minimum 1, a minimumhely $(0,1)$, a maximum 4, a maximumhely $(1,3)$.

83. $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, ahol $t \in [0, \pi/2]$. $z(t) = f(x(t), y(t)) = 2\sin 2t$, így minimum van a $t = 0$ és $t = \frac{\pi}{2}$, maximum a $t = \frac{\pi}{4}$ helyen, tehát az f függvény minimuma a megadott görbén a $(2,0)$ és $(0,2)$ helyeken, maximuma a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ helyen van. A függvény minimuma 0, maximuma 2.

84. A minimumhelyek $(0,2)$, $(0,-2)$, a minimum 5, a maximumhelyek $(2,0)$, $(-2,0)$, a maximum 9. (Az $x^2+y^2 = 4$ egyenletű körön a vizsgálandó függvény megegyezik a $g(x,y) = x^2 + 5$ függvénnyel $(-2 \le x \le 2)$, és ez utóbbira minden további átalakítás nélkül adódik a fenti eredmény.)

85. $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 3\sin t$, ahol $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$. $z(t) = f(x(t), y(t)) = 4\cos^2 t + 18\sin^2 t = 4 + 14\sin^2 t$, $z'(t) = 14\sin 2t$, így minimum van a $t = \pi$ és maximum a $t = \frac{\pi}{2}$ helyen, tehát az f függvény minimuma a megadott görbén a $(-2,0)$-ban, maximuma a $(0,3)$-ban van. A függvény minimuma 4, maximuma 18.

86. Minimumhely $(0,-3)$, minimum -6, maximumhely $(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$, maximum $6\sqrt{2}$.

87. Szélsőérték lehet a tartomány határán és azokban a belső pontokban, ahol $f_x = f_y = 0$. A tartomány az $O(0,0)$, $A(0,9)$, $B(9,0)$ pontok által meghatározott háromszög.
1. OA szakasz: e szakaszon $x = 0$. $g_1(y) = f(0,y) = y^2 - 2y - 3$. Szélsőérték lehet a szakasz végpontjaiban és ott, ahol a függvény deriváltja 0, vagy ahol a függvény nem differenciálható. Tehát a lehetséges szélsőértékhelyek: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,9)$.
2. OB szakasz: e szakaszon $y = 0$. $g_2(x) = f(x,0) = x^2 - 2x - 3$. Az előző ponthoz hasonló gondolatmenettel a lehetséges szélsőértékhelyek: $(0,0)$, $(1,0)$, $(9,0)$.
3. AB szakasz: e szakaszon $y = 9 - x$. $g_3(x) = f(x, 9-x) = 2x^2 - 18x + 60$. $g_3'(x) = 0$, ha $x = 9/2$, így a lehetséges szélsőértékhelyek: $(0,9)$, $(9/2, 9/2)$, $(9,0)$.
4. A tartomány belsejében: az $f_x(x,y) = 2x - 2 = 0$, $f_y(x,y) = 2y - 2 = 0$ egyenlőségekből $x = y = 1$, tehát az $(1,1)$ pont is egy lehetséges szélsőértékhely.
5. Összegzés: a lehetséges pontokban kiszámítva f értékét, azt kapjuk, hogy f abszolút minimuma -5, a minimumhely $(1,1)$, f abszolút maximuma 60, a maximumhelyek $(0,9)$, $(9,0)$.

88. Figyelembe véve az előző feladat megoldását, az f függvénynek e tartományon nincs maximuma (szuprémuma 60), f abszolút minimuma -5, a minimumhely $(1,1)$.

89. 1. $x=4$, $0\le y\le 4$: $g_1(y)=f(4,y)=y^2-4y+16=(y-2)^2+12$, minimum: $g_1(2)=f(4,2)=12$, maximum: $g_1(4)=f(4,4)=16$ és $g_1(0)=f(4,0)=16$.
2. $y=0$, $0\le x\le 4$: $g_2(x)=f(x,0)=x^2$, minimum: $g_2(0)=f(0,0)=0$, maximum: $g_2(4)=f(4,0)=16$.
3. $y=x$, $0\le x\le 4$: $g_3(x)=f(x,x)=x^2$, minimum: $f(0,0)=0$, maximum: $f(4,4)=16$.
4. A tartomány belsejében: $f_x(x,y)=2x-y$, $f_y(x,y)=2y-x$, amiből $x=y=0$ adódna, de a $(0,0)$ pont a tartománynak nem belső pontja.
5. Összegzés: abszolút minimum van a $(0,0)$, abszolút maximum a $(4,4)$ pontban.

90. 1. $x=0$, $0\le y\le 2$: $g_1(y)=f(0,y)=y^2-4y$, $g_1'(y)=2y-4$, minimum: $f(0,2)=-4$, maximum: $f(0,0)=0$.
2. $y=2$, $0\le x\le 1$: $g_2(x)=f(x,2)=2x^2-4x-4$, $g_2'(x)=4x-4$, minimum: $f(1,2)=-6$, maximum: $f(0,2)=-4$.
3. $y=2x$, $0\le x\le 1$: $g_3(x)=f(x,2x)=6x^2-12x$, $g_3'(x)=12x-12$, minimum: $f(1,2)=-6$, maximum: $f(0,0)=0$.
4. A tartomány belsejében: $f_x(x,y)=4x-4$, $f_y(x,y)=2y-4$, amiből $x=1$, $y=2$, de az $(1,2)$ pont nem belső pont.
5. Összegzés: abszolút minimum az $(1,2)$, abszolút maximum a $(0,0)$ pontban van.

91. A tartomány a $(-2,-1)$, $(1,2)$ és $(4,-4)$ pontok által meghatározott háromszögtartomány. Mivel az arctg függvény szigorúan monoton növő, ezért az adott f függvénynek ott van szélsőértéke, ahol a $g(x,y)=x^2+y^2$ függvénynek. Abszolút minimum van a $(0,0)$ pontban, abszolút maximum a $(-4,4)$ pontban. (Ehhez az eredményhez eljuthatunk az előző feladatok mintájára is, de szemléletes geometriai úton is: a g függvény értéke az (x,y) pont origótól mért távolságának négyzetét adja, ami nyilván az origóban minimális, és valamelyik csúcspontban maximális.)

92. 1. $x=0$, $-3\le y\le 3$: $g_1(y)=f(0,y)=y^2$, minimum: $f(0,0)=0$, maximum: $f(0,\pm3)=9$.
2. $x=5$, $-3\le y\le 3$: $g_2(y)=f(5,y)=y^2+5y-5$, minimum: $f(5,-\frac{5}{2})=-\frac{45}{4}$, maximum: $f(5,3)=19$.
3. $y=-3$, $0\le x\le 5$: $g_3(x)=f(x,-3)=x^2-9x+9$, minimum: $f(\frac{9}{2},-3)=-\frac{45}{4}$, maximum: $f(0,-3)=9$.
4. $y=3$, $0\le x\le 5$: $g_4(x)=f(x,3)=x^2-3x+9$, minimum: $f(\frac{3}{2},3)=\frac{27}{4}$, maximum: $f(5,3)=19$.
5. A tartomány belsejében lokális minimum van a $(4,-2)$ pontban, értéke $f(4,-2)=-12$.
6. Összegzés: abszolút minimum a $(4,-2)$, abszolút maximum az $(5,3)$ pontban van.

93. Abszolút minimum a $(4,-2)$, abszolút maximum a $(0,-3)$ pontban van.

94. Abszolút minimum az $(1,0)$, abszolút maximum az $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ pontban van.

95. Mivel $e^{-x^2} > 0$, ezért az f függvénynek abszolút maximumhelye (illetve minimumhelye) az (x_0, y_0) pont, ha az e^{-x^2} függvénynek abszolút maximumhelye az x_0 és a $\sin y$-nak abszolút maximumhelye (illetve minimumhelye) az y_0 pont, azaz f-nek abszolút maximuma van a $(0, \frac{\pi}{2})$ és abszolút minimuma a $(0, -\frac{\pi}{2})$ helyen.

96. Külön vizsgálva a $\cos x$ és a $\sin y$ szélsőértékeit, a szorzatuknak abszolút maximuma van a $(\pi, -\frac{\pi}{2})$ és abszolút minimuma a $(\pi, \frac{\pi}{3})$ helyen.

97. 1. A tartomány határán $x^2 + y^2 = 1$, aminek paraméteres alakja $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Behelyettesítés után kapjuk, hogy $g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t - \cos t + 1$, $g'(t) = -2\sin^2 t + \sin t + 1$, $g''(t) = -2\sin 2t + \cos t$, így g-nek a $11\pi/6$ helyen minimuma, $7\pi/6$-ban maximuma, $\pi/2$-ben inflexiós pontja van. A minimum: $f(\sqrt{3}/2, -1/2) = (4 - 3\sqrt{3})/4 \approx -0.299$, a maximum: $f(-\sqrt{3}/2, -1/2) = (4 + 3\sqrt{3})/4$.
2. A tartomány belsejében az $f_x = f_y = 0$ egyenletekből $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ adódik, ami minimumhely, a minimum értéke $-\frac{1}{3}$.
3. Összegezve, f-nek abszolút maximuma van a $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ helyen, abszolút minimuma a $(2/3, -1/3)$ helyen.

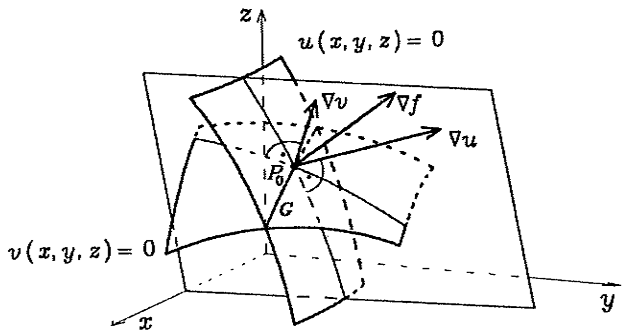
98. f-nek abszolút maximuma van a $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ helyeken abszolút minimuma a $(0, 0)$ helyen.

99. 1. A tartomány határán $x^2+y^2 = 3$. $g(t) := f(3\cos t, 3\sin t) = 9 - 9\cos t \sin t - 9\cos t$, g-nek a $\pi/6$ helyen minimuma, $5\pi/6$-ban maximuma, $3\pi/2$-ben inflexiós pontja van. A minimum: $f(3\sqrt{3}/2, 3/2) = 9 - 27\sqrt{3}/4$, a maximum: $f(-3\sqrt{3}/2, 3/2) = 9 + 27\sqrt{3}/4$.
2. A tartomány belsejében az $f_x = f_y = 0$ egyenletekből $x = 2$, $y = 1$ adódik, ami minimumhely, a minimum értéke -3.
3. Összegezve, f-nek abszolút maximuma van a $(-3\sqrt{3}/2, 3/2)$ helyen, abszolút minimuma a $(2, 1)$ helyen.

100. 1. A tartomány határán $x^2 + y^2 = 1$. $g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos 2t + \sin 2t$, g-nek a $\pi/8$, $9\pi/8$ helyeken maximuma, az $5\pi/8$, $13\pi/8$ helyeken minimuma van. A maximum értéke $\sqrt{2}$, a minimumé $-\sqrt{2}$.
2. A tartomány belsejében az $f_x = f_y = 0$ egyenletekből $x = y = 0$, de itt nyeregpont van.
3. $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ értékét a félszögekre vonatkozó összefüggésekkel kiszámítva, f-nek absz. max. van a $\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ és a $\left(-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}, -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ helyeken, absz. min. a $\left(-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ és a $\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}, -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ helyeken.

101. Tegyük fel, hogy f-nek P_0-ban maximuma (minimuma) van, amelynek értéke c. Ekkor semelyik $d > c$ ($d < c$) értékre sem metszi az $f(x, y, z) = d$ egyenletű nívófelület a G görbét a P_0 pont valamely környezetében. Ha u, v és f is differenciálható P_0-ban, akkor ez azt jelenti, hogy a G görbe érinti az $f(x, y, z) = c$

egyenletű nívófelületet (ennek precíz bizonyításától eltekintünk). Felhasználva, hogy a gradiensvektor merőleges a nívófelületre (lásd **14.142.** feladat), azt kapjuk, hogy $\nabla f(P_0)$ merőleges az $f(x,y,z) = c$ egyenletű felületre, $\nabla u(P_0)$ merőleges az $u(x,y,z) = 0$ és $\nabla v(P_0)$ merőleges az $v(x,y,z) = 0$ egyenletű felületre a P_0 pontban. Így tehát $\nabla f(P_0)$, $\nabla u(P_0)$ és $\nabla v(P_0)$ mindegyike merőleges a G görbére, tehát mindhárom vektor a P_0 pontban a G görbére merőleges síkban van (lásd az ábrát). Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan λ_0 és μ_0 valós számok, hogy teljesül a $\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla u(P_0) + \mu_0 \nabla v(P_0)$ egyenlőség.



102. Az $x+y+z=0$ egyenletből z-t kifejezve, és azt f-be helyettesítve a kétváltozós $g(x,y) := f(x,y,-x-y) = x^2+y^2-x-y$ függvényt kapjuk, melynek minimuma van az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban. Tehát az f függvénynek feltételes minimuma van az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ pontban.

103. Az $y^2 = 1-x^2-z^2$ behelyettesítésével kapott $g(x,z) := x^3-x^2-z^2+z+1$ függvény parciális deriváltjainak értéke zérus, ha $x=0$, $z=\frac{1}{2}$ vagy $x=\frac{2}{3}$, $z=\frac{1}{2}$, azaz szélsőérték lehet a $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ pontokban. Az előbbi maximumhely, az utóbbinál nyeregpont van, tehát f-nek az adott feltétel mellett maximuma van az $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ pontban, a maximum $\frac{5}{4}$.

104. Válasszuk x-et paraméternek. A feltételként megadott két felület metszésvonalának paraméteres alakja: $y = x^2-x$, $z = -x^2-x$. Behelyettesítve $g(x) := f(x, x^2-x, -x^2-x) = x^4-2x^3+3x^2$, aminek minimuma van $x=0$-ban, így f-nek feltételes minimuma van a $(0,0,0)$ pontban.

105. f-nek feltételes minimuma van a $(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15})$ pontban.

106. A feladatnak két geometriai szemléltetését is megadjuk.

(a) A $z = xy$ egyenletű hiperbolikus paraboloidot az $x^2+y^2=1$ egyenletű körhenger olyan görbében metszi, amely az első és a harmadik síknegyed felett, valamint a második és negyedik síknegyed alatt halad. A feladat: megkeresni e görbének azt a pontját, melynek z-koordinátája maximális illetve minimális.

(b) Tekintsük az xy-síkban az $x^2+y^2=1$ egyenletű kört és az $xy = c$ egyenletű hiperbolákat. Keressük a körön azokat a pontokat, amelyeken a legkisebb

illetve legnagyobb c értékhez tartozó hiperbola halad át.
1. megoldás: A szélsőértékhelyen a $h(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$ függvény parciális deriváltjainak értéke zérus, azaz
$h_x(x,y,\lambda) = y+2\lambda x = 0$, $h_y(x,y,\lambda) = x+2\lambda y = 0$, $h_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-1 = 0$. Ebből az egyenletrendszerből $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ adódik, tehát szélsőérték lehet a $P_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ pontokban.
A geometriai értelmezések bármelyikéből látható, hogy a P_1, P_2 pontokban maximum, a P_3, P_4 pontokban minimum van.
2. megoldás (a lényeget tekintve megegyezik az előzővel): $\mathbf{grad}(xy) = [y,x]$, $\mathbf{grad}(x^2+y^2-1) = [2x, 2y]$, a **T 15.11** tételbeli (1) egyenletei:
$[y,x] = \lambda[2x,2y]$, $x^2+y^2-1 = 0$, és ez — eltekintve λ előjelétől — ugyanarra az egyenletrendszerre vezet, mint amelyre az első megoldásban jutottunk.

107. 1. $h(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(xy-3)$, $h_x(x,y,\lambda) = 2x+\lambda y = 0$,
$h_y(x,y,\lambda) = 2y+\lambda x = 0$, $h_\lambda(x,y,\lambda) = xy-3 = 0$.
Szélsőérték lehet a $P_1(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $P_2(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ pontokban. A $z = x^2+y^2$ egyenletű forgásparaboloidot az $xy = 3$ egyenletű hiperbolikus henger két térgörbében metszi, melyek minimumai a P_1, P_2 pontokban vannak.
2. $\mathbf{grad}(x^2+y^2) = [2x,2y]$, $\mathbf{grad}(xy-3) = [y,x]$. Az egyenletrendszer $[2x,2y] = \lambda[y,x]$, $x^2+y^2-1 = 0$, ami az előző megoldásbeli pontokhoz vezet.

108. A $P_1(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ és $P_2(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$ pontokban maximum,
a $P_3(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ és $P_4(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$ pontokban minimum van.

109. A $z = xy^2$ egyenletű felület az első és a negyedik síknegyed felett, valamint a második és harmadik síknegyed alatt halad. Az $y^2 = \lambda 2x/a^2$ és $2xy = \lambda 2y/b^2$ feltételekből $y^2/b^2 = 2x^2/a^2$ adódik, ezt helyettesítsük az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ feltételbe. A $P_1(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}})$ és $P_2(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}})$ pontokban maximum, a $P_3(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}})$ és $P_4(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}})$ pontokban minimum van.

110. A $z = x^2+y^2$ egyenletű forgásparaboloidot a z tengellyel párhuzamos $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$ egyenletű sík egy, a z tengellyel párhuzamos tengelyű parabolában metszi. A függvénynek az $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ helyen minimuma van.

111. A $z = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ egyenletű sík és az $x^2+y^2 = 1$ egyenletű körhenger egy ellipszisben metszi egymást. Ennek legmagasabban (maximum) és legmélyebben (minimum) fekvő pontját kell megkeresni. Maximumhely: $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, minimumhely: $\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

112. A $z = x^m+y^m$ egyenletű felületet a z tengellyel párhuzamos $x+y = 2a$ egyenletű sík egy, a z tengellyel párhuzamos görbében metszi, melynek egyenlete

m-edfokú, ha m páros, és $(m-1)$-edfokú, ha m páratlan, azaz a legmagasabb fokú tag mindenképpen páros fokszámú. Így a függvénynek minimuma van. A minimumhely (a,a).

113. A $z = x + y$ sík az $y = -x$ egyenestől „jobbra" az xy sík felett, „balra" az xy sík alatt halad. A függvénynek az $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ helyen maximuma van, az $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ helyen minimuma.

114. Az $f(x,y) = (x-4)^2 + (y-2)^2$ függvény minimumát keressük az $y = 2x+3$ feltétel mellett. Szélsőérték lehet a $P_0(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$ pontban. Mivel az egyenesen a P ponttól maximális távolságra lévő pont nincs, minimális távolságra lévő viszont van, ezért P_0 minimumhely. A távolság: $\frac{81}{5}$.

115. Keressük az $f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2$ függvény minimumát az $x^2+y^2 = 45$ feltétel mellett. Szélsőérték lehet a $P_1(3,6)$, $P_2(-3,-6)$ pontokban. Mivel $f(3,6) = 20$ és $f(-3,-6) = 80$, ezért a P pontnak a körtől való távolsága 20 (és a körnek a P ponttól legtávolabbi pontja P_2).

116. Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény szélsőértékeit keressük az $x^4 + y^4 + 3xy = 2$ feltétel mellett. A feltételek szerint
$2x = (4x^3 + 3y)\lambda$, $2y = (4y^3 + 3x)\lambda$, ezekből λ kiküszöbölésével $3(x^2 - y^2) = 4xy(x^2 - y^2)$ adódik. $x^2 - y^2 = 0$ ad megoldást, $3 = 4xy$ nem ad. Az origóhoz legközelebb a $P_1(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_2(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ pontok vannak, a görbének az origótól való távolsága 1. (A görbe origótól legtávolabbi pontjai: $P_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P_4(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.)

117. 1. megoldás. Lagrange-módszer: $h(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - x^2y - 4)$. Szélsőérték lehet a $P_1(0,0,2)$, $P_2(0,0,-2)$, $P_3(\sqrt{2},-1,0)$, $P_4(-\sqrt{2},-1,0)$ pontokban. A feladatot felfoghatjuk úgy, hogy a $z^2 = x^2y + 4$ egyenletű felületen lévő pontok origótól mért távolságának szélsőértékeit keressük. A távolság minimális a P_1, P_2 pontokban, maximális távolság nincs.
2. megoldás. A $g(x,y) = x^2+y^2+x^2y+4$ kétváltozós függvény szélsőértékeit keressük. Szélsőérték lehet a $Q_1(0,0)$, $Q_2(\sqrt{2},-1)$, $Q_3(-\sqrt{2},-1)$ pontokban. Mivel $D(0,0) = 4 > 0$ és $g_{xx}(0,0) = 2 > 0$, ezért a Q_1 pontban minimum van és $z = \pm 2$. A Q_2, Q_3 pontokban $D(\pm\sqrt{2},-1) = -8 < 0$, nincs szélsőérték.

118. Minimumhely: $P_1(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. (A $P_2(4,4,-4)$, $P_3(4,-4,4)$ és $P_4(-4,4,4)$ helyeken nincs szélsőérték).

119. Szélsőértékhely: $P(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}, \frac{bd}{a^2+b^2+c^2}, \frac{cd}{a^2+b^2+c^2})$. A feladat geometriailag azt jelenti, hogy keressük az $ax+by+cz = d$ egyenletű síkon fekvő pontok origótól való távolságának szélsőértékeit. Mivel maximális távolságra lévő pont nincs, a fenti pont a minimumhely.

120. Minimumhely: $P(\frac{a_1bcd}{a_1^2bc+ab_1^2c+abc_1^2}, \frac{ab_1cd}{a_1^2bc+ab_1^2c+abc_1^2}, \frac{abc_1d}{a_1^2bc+ab_1^2c+abc_1^2})$.

121. Maximum van a $P_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ helyen (a $P_2(1,0,0)$, $P_3(0,1,0)$, $P_4(0,0,1)$ pontokban nincs szélsőérték).

122. Maximumhely: $(\frac{a}{9}, \frac{a}{9}, \frac{a}{9})$.

123. Maximumhely: $(\frac{ad}{a+b+c}, \frac{bd}{a+b+c}, \frac{cd}{a+b+c})$.

124. $h(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 2y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 1)$, amiből
$h_x = 1 + \lambda 2x = 0$, $h_y = 2 + \lambda 2y + \mu = 0$, $h_z = 3 + \mu = 0$,
$h_\lambda = x^2 + y^2 - 2$, $h_\mu = y + z - 1$.
Szélsőérték lehet a $P_1(1, -1, 2)$ és a $P_2(-1, 1, 0)$ pontokban. Az f függvény értelmezési tartománya az $x^2 + y^2 = 2$ egyenletű körhenger és az $y + z = 1$ egyenletű sík által meghatározott ellipszis. Mivel $f(P_1) = 5$ és $f(P_2) = 1$, ezért P_1 maximumhely, P_2 minimumhely.

125. Minimumhely: $P(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15})$. A feladat geometriailag úgy értelmezhető, hogy keressük a feltételi egyenletekkel megadott síkok metszésvonalának origótól való távolságát.

126. A háromváltozós függvényekhez hasonlóan itt is vagy meghatározzuk azokat a helyeket, ahol a $h(x, y, z, t, \lambda, \mu) := f(x, y, z, t) + \lambda u(x, y, z, t) + \mu v(x, y, z, t)$ függvény parciális deriváltjai 0 értékűek, vagy meghatározzuk azt a P_0 pontot, amely egyszerre kielégíti az alábbi egyenleteket:
$\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla u(P_0) + \mu_0 \nabla v(P_0)$, $u(P_0) = 0$, $v(P_0) = 0$.
Például az utóbbi összefüggések az alábbi egyenletrendszerre vezetnek:
$2x = \lambda + 2\mu$, $4y = 3\lambda - \mu$, $2z = -\lambda + \mu$, $2t = \lambda + 2\mu$, $x + 3y - z + t = 2$, $2x - y + z + 2t = 4$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $x = \frac{67}{69}$, $y = \frac{6}{69}$, $z = \frac{14}{69}$, $t = \frac{67}{69}$, azaz a lehetséges szélsőértékhely: $(\frac{67}{69}, \frac{6}{69}, \frac{14}{69}, \frac{67}{69})$, ami minimumhely $\frac{134}{69}$ értékkel.

127. A lehetséges szélsőértékhely: $(\frac{10}{23}, \frac{1}{23}, -\frac{1}{23}, \frac{17}{23})$, ami minimumhely.

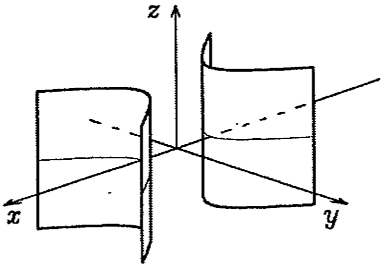
128. A függvény, amelynek maximumát keressük: $T = (27 - 2x + x\cos\varphi)x\sin\varphi$. A $T_x = 0$ egyenletből $\sin\varphi = 0$, de ez a feladat szempontjából érdektelen, vagy $\cos\varphi = 2 - \frac{27}{2x}$. Ezt a $T_\varphi = 0$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 0$ (a feladat szempontjából érdektelen), vagy $x = 9$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$. A második parciális deriváltakat is kiszámítva: $D(9, \frac{\pi}{3}) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{243\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{9}{2}\right)^2 > 0$,
$T_{xx}(9, \frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$. Tehát a trapéz keresztmetszete $x = 9$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$ választással lesz maximális.

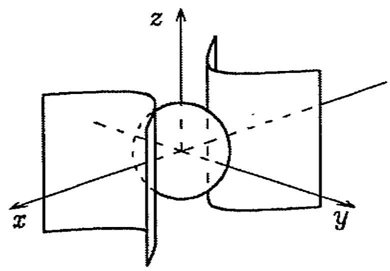
129. Keressük az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény minimumát a $x + y + z = \delta$ feltétel mellett. Behelyettesítés után a $g(x, y) = x^2 + y^2 + (\delta - x - y)^2$ függvény minimumát kell meghatároznunk. A korrekciókat az α, β, γ szögek mindegyikére egyaránt $\delta/3$-nak kell választani.

130. Az alaplap éleit $\sqrt[3]{2V}$-nek, a magasságot $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$-nek kell választani.

131. A max. ill. min. távolságot az $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$ függvény szélsőértékeiként kapjuk az $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ feltétel mellett. Minimumhely $P_1(2, 4, 4)$, a minimum 9, a maximumhely $P_2(-2, -4, -4)$, a maximum 81.

132. Jelölje az élek hosszát $2x$, $2y$, $2z$. Az $f(x, y, z) = 8xyz$ függvény maximumát keressük az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ feltétel mellett.
Az élek hossza $6/\sqrt{3}$, $4/\sqrt{3}$, $8/\sqrt{3}$.





133. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ minimumát keressük az $x^2 - z^2 = 4$ feltétel mellett.
1. megoldás: x^2 helyébe $(z^2 + 4)$-et helyettesítve $g(y, z) = 4 + y^2 + 2z^2$, így a $g'_y(y, z) = 2y = 0$, $g'_z(y, z) = 4z = 0$ feltételekből $y = z = 0$. A felület egyenletéből $x = \pm 2$. Mivel $4 + y^2 + 2z^2 \geq 4$, a felület $P_1(2, 0, 0)$ és $P_2(-2, 0, 0)$ pontjai esnek legközelebb az origóhoz.
2. megoldás: Ha z^2 helyébe helyettesítünk $(x^2 - 4)$-et, akkor a $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4$ függvény minimumát kell meghatároznunk az $|x| \geq 2$ tartományon (ugyanis $x^2 - 4 = z^2 \geq 0$) és a $g'_x(x, y) = 4x = 0$, $g'_y(x, y) = 2y = 0$ feltételekből $x = y = 0$ adódik. Ez a pont azonban nem esik a $z^2 = x^2 - 4$ felületre (nem teljesül az $|x| \geq 2$ feltétel). Az $|x| \geq 2$ által meghatározott tartományon a parciális deriváltak nem vesznek fel 0 értéket; a határon $|x| = 2$, így a g függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a $g(\pm 2, y) = y^2 + 4$ függvénynek. A minimumhelyek: $P_1(2, 0, 0)$ és $P_2(-2, 0, 0)$.
3. megoldás: $\nabla f(x, y, z) = [2x, 2y, 2z]$, $u(x, y, z) = x^2 - z^2 - 4$, $\nabla u(x, y, z) = [2x, 0, -2z]$. A $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla u(x, y, z)$, $u(x, y, z) = 0$ egyenletrendszer megoldásai: $\lambda_0 = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$ és $\lambda_1 = -1$, $(x_1, y_1, z_1) = (-2, 0, 0)$. Az f függvény értéke e helyeken 4, amely minimum, ugyanis $x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + z^2 \geq x^2 - z^2 = 4$. (A második ábrán az $f(x, y, z) = 4$ és $u(x, y, z) = 0$ nívófelületeket ábrázoltuk.)
4. megoldás: A $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - z^2 - 4)$ függvény segítségével.

134. Keressük az $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 (100 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ függvény szélsőértékeit. A parciális deriváltak pozitív zérushelyei az

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 100 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 100$$

egyenletrendszer megoldásából adódnak. Szélsőérték lehet a $P_0(20, 20, 20, 20)$ pontban. A másodrendű parciális deriváltak értékei: $f_{x_i x_j}(P_0) = -20^3$, ha $i \neq j$, $f_{x_i x_i}(P_0) = -2 \cdot 20^3$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. A determináns-sorozat: $-2 \cdot 20^3$, $3 \cdot 20^6$, $-4 \cdot 20^9$, $5 \cdot 20^{12}$. Ez váltakozó előjelű sorozat, az első eleme negatív, tehát az $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 20$ értékekre a szorzat maximális.

135. Keressük az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)$ függvény szélsőértékeit. A parciális deriváltak értéke zérus a $P_0(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$ helyen. A másodrendű parciális deriváltak értékei: $f_{x_i x_i}(P_0) = -2(\frac{1}{n+1})^{n-1}$ és $f_{x_i x_j}(P_0) = -(\frac{1}{n+1})^{n-1}$, ha $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. A k-adrendű determináns értéke: $D_k(P_0) = (-1)^k (\frac{1}{n+1})^{k(n-1)}(k+1)$, ami váltakozó előjelű, az első eleme negatív, tehát az $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n+1}$ értékekre a szorzat maximális.

16. Többváltozós valós függvények integrálása (megoldások)

1. a) $I = (0,2+0,1)\cdot 0,4\cdot 0,2 + (0,5+0,1)\cdot 0,2\cdot 0,2 + (0,8+0,1)\cdot 0,4\cdot 0,2$
$+ (0,2+0,5)\cdot 0,4\cdot 0,6 + (0,5+0,5)\cdot 0,2\cdot 0,6 + (0,8+0,5)\cdot 0,4\cdot 0,6$
$+ (0,2+0,9)\cdot 0,4\cdot 0,2 + (0,5+0,9)\cdot 0,2\cdot 0,2 + (0,8+0,9)\cdot 0,4\cdot 0,2$
$= 1.$

b) $I = 0,6.$ c) $I = 1,4.$

2. Az $f(x,y) = xy$ függvény folytonos a V tartományon, ezért ott integrálható is (T 16.3). Elég tehát az integrálközelítő összegek egyetlen sorozatának határértékét meghatározni. Osszuk fel a V egységnézetet az $y = k/n$, $x = k/n$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ egyenesekkel n^2 darab egyenlő részre, legyen ez a B_n beosztás. E beosztás minden kis négyzetének az origóhoz legközelebb eső sarkát válasszuk reprezentánsnak. Ekkor az I_n integrálközelítő összeget felírva:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n^2} f(P_i)\,\Delta v_i \\ &= \left(\frac{0}{n}\frac{0}{n} + \frac{0}{n}\frac{1}{n} + \frac{0}{n}\frac{2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\frac{0}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n^2} \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Tehát az integrál értéke $\frac{1}{4}$.

3. Az előző feladat megoldásához hasonlóan:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n^2} f(P_i)\,\Delta v_i = \left(\left(\frac{0}{n} + \frac{0}{n}\right) + \left(\frac{0}{n} + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2} \\ &= 2n\left(\frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^2} = 2n\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{1}{n^2} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

4. Mutassuk meg, hogy minden beosztáshoz van olyan reprezentánsrendszer, mellyel az integrálközelítő összeg 0 illetve olyan, amellyel 1. Ebből következik, hogy van olyan sorozata az integrálközelítő összegeknek mely nem konvergens (mert pl. felváltva 0 és 1 értékeket vesz fel).

5. Mivel f és g folytonosak, és folytonos függvény abszolút értéke is folytonos, ezért az egyenlőtlenségekben szereplő integrálok léteznek (T 16.3). Felhasználva az $|x+y| \le |x| + |y|$ összefüggést, az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk az integrálközelítő összegekre:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta v_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(P_i)|\,\Delta v_i$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i)+g(P_i)\,\Delta v_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(P_i)|+|g(P_i)|\,\Delta v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(P_i)|\,\Delta v_i + \sum_{i=1}^{n} |g(P_i)|\,\Delta v_i$$

Az integrálközelítő összegekre fennálló egyenlőtlenségek a határértékeikre is fennállnak, ami bizonyítja a feladat állítását.

6. Legyen V beosztása $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$. A V_i tömege közelíthető a $\varrho(x_i, y_i)\,\Delta v_i$ értékkel, ahol $(x_i, y_i) \in V_i$. A V_i-be eső testrészt helyettesítve az (x_i, y_i)-be helyezett pontszerű testtel, a pontrendszer nyomatékára a

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)\varrho(x_i, y_i)\,\Delta v_i$$

értéket kapjuk, ennek határértéke pedig

$$\iint_V (x-a)\varrho(x,y)\,dv$$

8. Két egyváltozós integrállal számolva

$$\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_0^1 = 1.$$

9. $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_0^1 y^2 x\,dy\,dx = \int_{-3}^{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 x\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} = \frac{5}{6}.$

10. $2.$ **11.** $\dfrac{2}{15}(31-9\sqrt{3}).$ **12.** $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2).$

13. $\dfrac{2\pi}{3}.$ **14.** $-54.$ **15.** $\dfrac{76}{3}.$

16. $-\dfrac{128}{15}.$ **17.** $\dfrac{1}{3}.$ **18.** $\dfrac{\pi}{2}.$

19. $\dfrac{\pi}{2}\ln 3.$ **20.** $\dfrac{1}{8}.$ **21.** $0.$

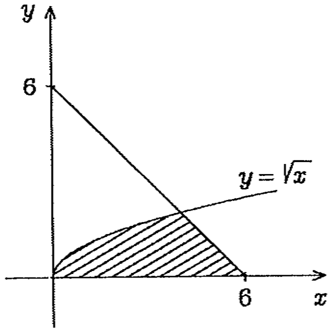
22. $\dfrac{16}{3}-\pi.$ **23.** $\dfrac{2}{3}(3^{\ln 3}-1).$ **24.** $\dfrac{2}{9}.$

25. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{2x-x^2} dy\,dx = \frac{1}{3}.$ **26.** $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{1-\frac{y^2}{9}}^{9-y^2} dx\,dy = 32.$

27. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{sh} x}^{\operatorname{ch} x} dy\,dx = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1.$ **28.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2-x} (x+y), dy, dx = \frac{8}{3}.$

29. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$ **30.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} xy\,dx\,dy = \frac{50}{3}$ (ld. ábra).

31. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dy\,dx = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).$



32. $\displaystyle\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xy\,dx\,dy = \frac{R^4}{8}.$

33. $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx\,dy = \frac{1}{20}.$

34. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos y} e^x \sin y\,dx\,dy = -e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + e - 1.$

35. $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}(e-1).$

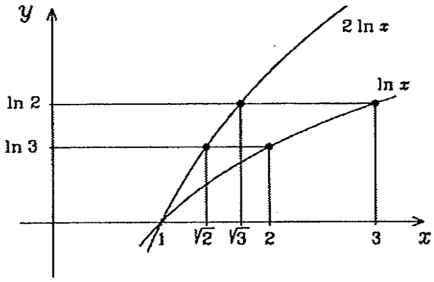
36. $\displaystyle I = \int_1^5 \int_0^{\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^2}\,dy\,dx = \frac{1}{4}(e^{16}-1).$

37. $\displaystyle I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}\,dy\,dx = \frac{4}{3}.$

38. $\displaystyle I = \int_1^2 \int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dy\,dx = 0.$

39. A határoló görbék egyenlete: $y = \ln x$, $y = 2\ln x$, $y = \ln 2$, $y = \ln 3$, az előbbi kettő inverze: $x = e^y$ és $x = e^{y/2}$ (lásd az ábrát). Mindezek alapján:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \int_{e^{y/2}}^{e^y} dx\,dy = 1 - 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$



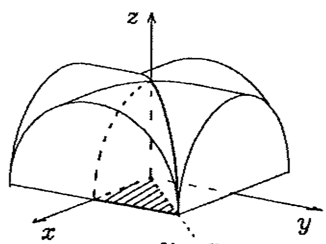
40. $\displaystyle\int_{-3}^0 \int_{-\sqrt{x+3}}^{\sqrt{x+3}} (y^2 - 2x)\,dy\,dx = 12\sqrt{3}.$ **41.** $\displaystyle\int_{-2}^0 \int_{-x}^x (x^2 - y^2)\,dy\,dx = \frac{16}{3}.$

42. $\displaystyle\int_0^\pi \int_{-\sin x}^{\sin x} (\sin^2 x - y^2)\,dy\,dx = \frac{16}{9}.$ **43.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{2-\frac{x}{2}} xy\,dy\,dx = \frac{4}{3}.$

44. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{x-1}{3}}^0 \frac{1}{x+3}\,dy\,dx = \frac{4\ln\frac{4}{3} - 1}{3}.$

45. Legyen a két körhenger egyenlete $y^2 + z^2 = R^2$ és $x^2 + z^2 = R^2$. Ekkor a $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ egyenletű síkok, és az $x^2 + z^2 = R^2$ egyenletű henger által határolt test térfogata a feladatbeli test térfogatának $\frac{1}{16}$ részét kapjuk (lásd az ábrát). Tehát

$$V = 16\int_0^R \int_0^x \sqrt{R^2 - x^2}\,dy\,dx = \frac{R^3}{3}.$$



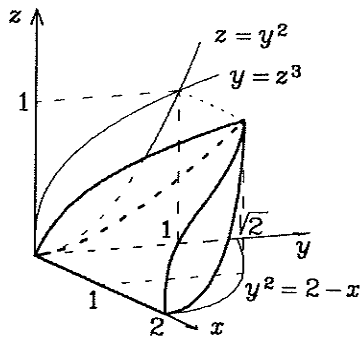
46. $\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx = \frac{4}{3}$. **47.** $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^{2-2x^2} dz\,dx\,dy = \frac{16}{3}$.

48. $\int_{-2}^2 \int_{x^2-4}^0 \int_0^{y+8} dz\,dy\,dx = \frac{1024}{15}$. **49.** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2-y^2} \int_{-x}^{x} dz\,dy\,dx = \frac{64\sqrt{2}}{15}$.

50. $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{y+2} dz\,dx\,dy = \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (y+2)\,dx\,dy = \frac{64}{3}$.

51. $\int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^{x^2-y} dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2-y)\,dy\,dx = \frac{16}{5}$.

52. A tartomány a pozitív nyolcadban van. Alulról a $z = y^2$ parabólikus henger, felülről az $y = z^3$ hengerszerű felület, jobbról (az x tengely pozitív irányából) az $y^2 = 2 - x$ parabólikus henger, balról a $z = x$ sík határolja. Ha először x, majd y szerint integrálunk, akkor az x az $x = z$ felülettől az $x = 2 - y^2$ felületig változik az $y = z^3$ és az $y^2 = z$ görbék által határolt yz-síkbeli tartomány fölött, míg e tartományon y megy z^3-től $\sqrt{z}$-ig és z megy 0-tól 1-ig.



$$\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_z^{2-y^2} dx\,dy\,dz = \frac{8}{15}$$

53. $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dz\,dy\,dx = \frac{32}{3} \int_{-2}^2 \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)^3 dx = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 8\pi$.

54. $\int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} z\,dz\,dy\,dx = \frac{abc^2}{24}$.

55. $\int_0^a \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} z\,dz\,dy\,dx =$

$= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} (\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})^4\,dy\,dx = \quad \{\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y} = t\}$

$= \int_0^a \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^6}{30}\,dx = \{\sqrt{a}-\sqrt{x} = u$ helyettesítés után$\} = \frac{a^4}{840}$.

56. $8 \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x^2} z^2\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{3}$.

57. $\bar{x} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x\,dy\,dx \Big/ \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{12}{5}$,

$\bar{y} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx \Big/ \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{3}{4}$.

58. $\bar{x} = \int_0^a \int_0^a xk(x^2+y^2)\,dy\,dx \Big/ \int_0^a \int_0^a k(x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{5a}{8} = \bar{y}$

59. $\bar{x} = \frac{5}{9}$ $\bar{y} = \frac{4}{7}$.

60. $\int_0^a \int_0^b \int_0^{\sqrt{xy}} dz\,dy\,dx = \frac{4}{9}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, $\quad \bar{x} = \frac{3a}{5}$, $\bar{y} = \frac{3b}{5}$, $\bar{z} = \frac{9\sqrt{ab}}{32}$.

61. $\iint_V (x-a)\delta(x,y)\,dv = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x-2)xy\,dy\,dx = -\frac{1}{15}$,
$\iint_V (y-b)\delta(x,y)\,dv = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y+3)xy\,dy\,dx = \frac{17}{120}$.

64. Mivel egy φ nyílásszögű, r sugarú körcikk területe $\frac{1}{2}r^2\varphi$, ezért

$$\Delta v_n = \frac{1}{2}(r_n + \frac{\Delta r}{2})^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}(r_n - \frac{\Delta r}{2})^2\Delta\varphi = r_n\Delta r\Delta\varphi.$$

Ez azt jelenti, hogy egy ilyen tartomány területe r-rel arányos (hiszen $\Delta r\Delta\varphi$ konstans), és r épp a Jacobi-determináns abszolút értéke.

65. Az $x^2 + y^2 = R^2$ egyenletű kör egyenlete polár koordinátákkal $r = R$. Így

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \pi(1 - e^{-R}).$$

Ha $R \to \infty$, akkor az integrál határértéke π. Nem foglalkoztunk a többváltozós függvények improprius integráljával, de megjegyezzük, hogy ebben az esetben az egész síkon való integrál értelmezhető, és az előbbiek szerint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \pi.$$

66. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$.

67. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\sin r^2\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{4}(1 - \cos 1)$.

68. $\int_0^{2\pi} \int_0^5 r^3 \cos\varphi \sin\varphi\,dr\,d\varphi = 0$.

69. $\int_0^{\pi} \int_0^{4\sin\varphi} r^3 \cos^2\varphi\,dr\,d\varphi = 4\pi$.

70. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-1})$.

71. A belső integrál határaiból kapjuk, hogy $y^2 = x - x^2$, azaz $x^2 + y^2 = x$, amiből az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ behelyettesítése és egyszerűsítés után az $r = \cos\varphi$ egyenletet kapjuk. Így

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} r^3\,dr\,d\varphi = \frac{3\pi}{32}.$$

72. $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 + r\cos\varphi + 2r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = 4\pi$.

73. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} r^2\,dr\,d\varphi = \frac{256}{9}$.

74. $\int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4 - r^2}\,r\,dr\,d\varphi = 2\sqrt{3}\pi$.

75. A $z = x + y$, $x^2 + y^2 = x + y$ felületek az xy-síkot az $x + y = 0$ egyenletű egyenesben, és az $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ egyenletű körben metszi. Az

utóbbi által határolt körlap lesz az integrálás tartománya. Vezessük be az

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$$
$$y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$$

helyettesítést. Ekkor $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$. Az integráltranszformációt elvégezve

$$\iint_V (x+y)\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} + r\cos\varphi + \frac{1}{2} + r\sin\varphi\right) r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

76. Legyen $x = \frac{1}{3}r\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}r\sin\varphi$. Ekkor $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \dfrac{r}{6}$. Az integráltranszformációt elvégezve

$$\iint_V (1 - 9x^2 - 4y^2)\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\frac{r}{6}\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{12}.$$

77. Mivel a határoló görbék egyenlete xy =konstans, illetve $\dfrac{y^2}{x}$ =konstans alakú, ezért az

$$xy = u, \qquad \frac{y^2}{x} = v$$

változók bevezetésével olyan új változókat kapunk, melyek konstans értékek között változnak, nevezetesen

$$a \le u \le b, \qquad p \le v \le q.$$

Az egyenletekből x-et és y-t kifejezve felírható a Jacobi-determinánst, majd az integrál az új változókkal.

$$x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}, \qquad y = \sqrt[3]{uv},$$

$$x_u = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{uv}}, \quad x_v = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^4}}, \quad y_u = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}}, \quad y_v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}},$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^4}} \\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}, \qquad \int_a^b\int_p^q \frac{1}{3v}\,dv\,du = \frac{b-a}{3}\ln\frac{p}{q}.$$

78. Mivel a határoló görbék egyenlete $\dfrac{y}{x}$ =konstans, illetve $\frac{y^3}{x^2}$ =konstans alakú, ezért az

$$\frac{y}{x} = u, \qquad \frac{y^3}{x^2} = v$$

változók bevezetésével olyan új változókat kapunk, melyek konstans értékek között változnak, nevezetesen

$$p \le u \le q, \qquad a \le v \le b.$$

Innen az előző feladathoz hasonlóan kapjuk x-et és y-t, a Jacobi-determinánst, végül az integrál értékét.

$$x = \frac{v}{u^3}, \qquad y = \frac{v}{u^2}, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3v}{u^4} & \frac{1}{u^3} \\ -\frac{2v}{u^3} & \frac{1}{u^2} \end{vmatrix} = \frac{v}{u^6},$$

$$\int_p^q \int_a^b \frac{v^3}{u^{11}}\, dv\, du = \frac{b^4 - a^4}{40}(p^{-10} - q^{-10}).$$

79. Legyen

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \; v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}.$$

Ekkor

$$x = \frac{a}{2}(u+v), \; y = \frac{b}{2}(u-v).$$

Az uv-síkban a görbe a $v = u^2$ alakot ölti,az x-tengelynek, azaz az $y = 0$ egyenesnek az $u = v$ egyenes felel meg (lásd ábra). A Jacobi-determináns és az integrál tehát:

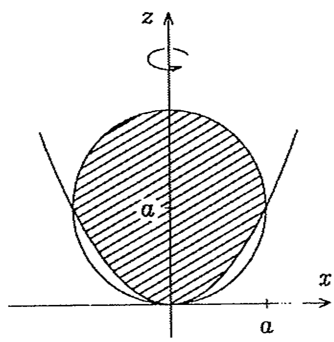
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} = -\frac{ab}{2}, \qquad \int_0^1 \int_{u^2}^u \frac{ab}{2}\, dv\, du = \frac{ab}{12}.$$

80. Az $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x+y}$ egyenletrendszerből u-t és v-t kifejezve, majd a Jacobi-determinánst is kifejezve kapjuk, hogy $x = u - uv$, $y = uv$, $J = u$. A határok változásának leírásához ábrázoljuk az $u = konstans$, $v = konstans$ paramétervonalakat az xy-síkon. Látható, hogy az u-paramétervonalak 0-tól a-ig változnak, a v-paramétervonalak az $y = 0$ egyenestől az $x = 0$ egyenesig változnak. A $v = \dfrac{y}{x+y}$ egyenletből adódik, hogy $y = 0$ esetén $v = 0$ és $x = 0$ esetén $v = 1$, tehát v 0-tól 1-ig változik.

81. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 dz\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 r\, dm\, dr\, d\varphi = 2\pi.$

82. $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{27-2x^2-2y^2} dz\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2}^{27-2r^2} r\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{243\pi}{2}.$

83. Az $x^2+y^2 = az$, $x^2+y^2+z^2 = 2az$ egyenletekből kapjuk, hogy $z^2 = az$, melyből $z = 0$, vagy $z = a$. Az előbbi esetben $x = y = 0$, amely pontban a két felület érinti egymást, a $z = a$ esetben $x^2 + y^2 = a^2$, mely a két felület metszésvonala. Tehát a testet alulról egy paraboloid, felülről egy félgömb határolja. A test xz-síkkal való metszete az ábrán látható. A határokat a test negyedére felírva:



$$4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}+a} dz\, dy\, dx =$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\int_{\frac{r^2}{a}}^{\sqrt{a^2-r^2}+a} r\,dm\,dr\,d\varphi = \frac{7a^3\pi}{6}.$$

84. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^m r\,dr\,dm\,d\varphi = \frac{7\pi}{3}.$

85. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi}\int_0^a mr^2\,dm\,dr\,d\varphi = \frac{8a^2}{9}.$

86. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\int_{-\sqrt{4a^2-r^2}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} m^2 r\,dm\,dr\,d\varphi = \frac{12\sqrt{3}a^5\pi}{5}.$

87. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-r^4}}^{\sqrt{1-r^4}} abcr\,dm\,dr\,d\varphi = \frac{abc\pi^2}{2}.$

88. A két felület metszésvonalának egyenlete $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2$. A két felület egyenlete a módosított hengerkoordinátákban felírva:

$$r^2+m^3=1,\ m=-1$$

amiből a határokat könnyen felírhatjuk:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-1}^{\sqrt[3]{1-r^2}} abcr\,dm\,dr\,d\varphi = 2abc\pi.$$

89. Végezzük el az alábbi helyettesítést:

$$\begin{aligned} y &= r\cos\varphi\\ z &= r\sin\varphi\\ x &= m. \end{aligned}$$

Ekkor a Jacobi-determináns értéke r, a két felület egyenlete $r^2=m$ illetve $r\cos\varphi = m$, a felületek metszésvonalának egyenlete pedig $r=\cos\varphi$, amiből

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\varphi}\int_{r^2}^{r\cos\varphi} r\,dm\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{32}.$$

90. Végezzük el az alábbi helyettesítést: $x=2r\cos\varphi$, $z=3r\sin\varphi$, $y=m$. Ekkor a Jacobi-determináns értéke $6r$, így

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 2me^{r^2}6r\,dm\,dr\,d\varphi = 6\pi(e-1).$$

91. Végezzük el az alábbi helyettesítést: $y=2r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$, $x=m$. Ekkor a Jacobi-determináns értéke $2r$, a határoló felület egyenlete $r^2=(m-1)^2$, azaz $x\geq 0$ miatt $r=m-1$, így

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} 2m\,dm\,dr\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

92. A metszésvonal egyenlete $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Hengerkoordinátákra térve

$$\iiint_V \delta(x, y, z)\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{r^2}^{1-r^2} (2 - m) r\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{3\pi}{8},$$

$x_s = y_s = 0.$

$$\iiint_V z\delta(x, y, z)\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{r^2}^{1-r^2} (2m - m^2) r\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{17\pi}{96},$$

$z_s = \frac{17}{36}.$

93. Módosított hengerkoordinátákra térve a határoló kúp egyenlete $(m-1)^2 = r^2$, ami $m \le 1$ miatt ekvivalens az $m - 1 = -r$ egyenlettel, így

$$\iiint_V dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r} abcr\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{abc\pi}{3},$$

$x_s = y_s = 0.$

$$\iiint_V z\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r} mabcr\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{abc^2\pi}{12},$$

$z_s = \frac{c}{4}.$

94. $\displaystyle\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \frac{4R^3\pi}{3}.$

95. A határoló felületek egyenlete $\vartheta = \alpha_0$, $r = 2a\cos\vartheta$, tehát

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2a\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4a^3\pi}{3}(1 - \cos^4\alpha_0).$$

96. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\vartheta}} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{a^3\pi}{3}.$

97. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\vartheta} r^3 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{\pi}{10}.$

98. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_3^{9} \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 6\pi(2 - \sqrt{3}).$

99. A sűrűségfüggvény $\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ami gömbi koordinátákban $r\sin\vartheta$, így

$$\iiint_V \varrho(x, y, z)\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} r\sin\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{81\pi^2}{8},$$

$$\iiint_V z\varrho(x, y, z)\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} r\cos\vartheta\, r^3 \sin^2\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{162\pi}{5},$$

$$x_s = y_s = 0, \quad z_s = \frac{16\pi}{5}.$$

100. A térbeli polárkoordinátás alakot úgy módosítsuk, hogy cseréljük fel x, y és z szerepét:

$$x = r\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad J = r^2\sin\vartheta$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

A felület egyenlete e koordinátarendszerben $r^{2n} = r^{2n-1}\cos^{2n-1}\vartheta$, azaz $r = \cos^{2n-1}\vartheta$. Így

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos^{2n-1}\vartheta} r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{\pi}{3(3n-1)}$$

101. $x = ar\cos\vartheta$, $y = br\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = cr\sin\vartheta\sin\varphi$, $|J| = abcr^2\sin\vartheta$. A felület egyenlete e koordinátarendszerben $r^4 = \frac{a}{h}r\cos\vartheta$, azaz $r = \sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\vartheta}$. Így

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\vartheta}} abcr^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{a^2bc\pi}{3h}.$$

102. $$\iiint_V dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{2abc\pi}{3},$$

$$\iiint_V z\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 cr\cos\vartheta\,abcr^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{abc^2\pi}{4},$$

$$x_s = y_s = 0, \quad z_s = \frac{3c}{8}.$$

103. Ha a feladatbeli síkok egyenleteinek bal oldalán álló kifejezéseket választjuk új változóknak, akkor ezek konstans határok között fognak változni:

$$u = -x + 2y + 2z \qquad -a \le u \le a$$
$$v = 2x - y + 2z \qquad -b \le v \le b$$
$$w = 2x + 2y - z \qquad -c \le w \le c$$

Ezekből az egyenletekből x, y, z kifejezése után a Jacobi-determináns és az integrál is könnyen számítható:

$$x = \frac{-u + 2v + 2w}{9}$$
$$y = \frac{2u - v + 2w}{9} \qquad J = \frac{1}{27}$$
$$z = \frac{2u + 2v - w}{9}$$

$$\iiint_V dv = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\frac{1}{27}\,dw\,dv\,du = \frac{8abc}{27}.$$

104. Legyen

$$u = -x + 2y + 2z$$
$$v = 2x - y + 2z \quad .$$
$$w = 2x + 2y - z$$

Ekkor a tartomány az uvw-koordináta rendszerben az $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ egyenletű gömb. Az előző feladat szerint $J = \frac{1}{27}$. Így a térfogat

$$\iiint_V dv = \iiint_G \frac{1}{27}\,dw\,dv\,du = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \frac{1}{27}r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{4\pi}{81}.$$

105. Legyen

$$\begin{aligned} u &= 2x - y + z \\ v &= 3x + 2y - 5z\,. \\ w &= x + 3y - 2z \end{aligned}$$

Ekkor a tartomány az uvw-koordináta rendszerben:

$$-1 \le u \le 1, \quad -\sqrt{1-u^2} \le v \le \sqrt{1-u^2}, \quad -a \le w \le a.$$

A fenti egyenletrendszerből x, y, z kifejezése után a Jacobi-determináns és hengerkoordinátákra való áttérés után az integrál is könnyen számítható:

$$x = \frac{11u + v + 3w}{28}, \quad y = \frac{u - 5v + 13w}{28}, \quad z = \frac{7u - 7v + 7w}{28}, \quad J = \frac{1}{28},.$$

$$\iiint_V dv = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\int_{-a}^{a} \frac{1}{28}\,dw\,dv\,du = \int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{28}\,dr\,d\varphi\,dw = \frac{a\pi}{14}.$$

106. $\displaystyle\int_0^1\int_{e^y}^{e} y\,dx\,dy = \frac{1}{2}(e-2).$

107. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}\int_1^{\frac{1}{x}} \cos(x - \ln x)\,dy\,dx = -\sin 1 + \sin(\frac{1}{e} + 1).$

108. $\displaystyle\frac{14}{6}.$

109. 1. megoldás (integrál transzformációval). A két paraboloid metszetgörbéjének y- és z-koordinátái közötti összefüggés a két egyenletből megkapható:

$$x = 6 - y^2 - 7z^2 = 5y^2 + 5z^2 \text{ azaz } y^2 + 2z^2 = 1.$$

Alkalmazzuk a következő transzformációt:

$$\begin{aligned} y &= r\cos\varphi \\ \sqrt{2}z &= r\sin\varphi \end{aligned} \qquad |J| = \frac{1}{\sqrt{2}}r,$$

$$\begin{aligned} T &= \iint_R \left(\int_{5y^2+5z^2}^{6-y^2-7z^2} dx\right) dy\,dz = \iint_R (6 - 6y^2 - 12z^2)\,dy\,dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 6(1 - r^2)\frac{r}{\sqrt{2}}\,dr\,d\varphi = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. megoldás

$$T = \iint_R \left(\int_{5y^2+5z^2}^{6-y^2-7z^2} dx \right) dy\, dz = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-2z^2}}^{\sqrt{1-2z^2}} \int_{5y^2+5z^2}^{6-y^2-7z^2} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-2z^2}}^{\sqrt{1-2z^2}} (6 - 6y^2 - 12z^2)\, dy\, dz$$

$$= 8 \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2z^2)^{\frac{3}{2}}\, dz \qquad \text{(helyettesítés: } z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\text{)}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

110.1. megoldás (integrál transzformációval):

$$\frac{x}{a} = r\cos\varphi \qquad I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, abr\, dr\, d\varphi = \frac{2ab\pi}{3}.$$
$$\frac{y}{b} = r\sin\varphi$$

2. megoldás:

$$I = 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy\, dx.$$

Végezzük el az

$$\frac{y}{b} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin u$$

helyettesítést, ekkor

$$I = \int_0^a 2b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{2ab\pi}{3}.$$

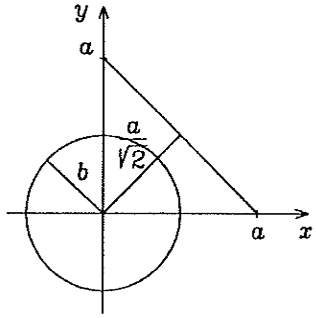
111.1. megoldás: Ha $a > \sqrt{2}b$, akkor az $x + y + z = a$ sík a $z = 0$ sík felett vág bele a hengerbe (lásd az ábrákat). Így

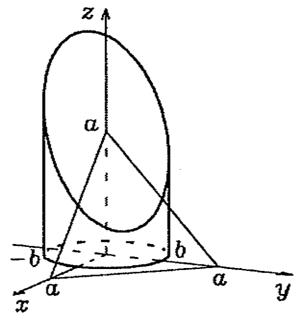
$$\int_{-b}^{b} \int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \int_0^{a-x-y} dz\, dy\, dx = \int_{-b}^{b} \int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} (a - x - y)\, dy\, dx = ab^2\pi.$$

2. megoldás: Legyen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = m$. Az új határok, és az integrál ekkor:

$$0 \le r \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le m \le a - r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{a-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} r\, dm\, dr\, d\varphi =$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^b (a - r(\cos\varphi + \sin\varphi)) r\, dr\, d\varphi = ab^2\pi.$$





112. 1. megoldás:

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dz\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dy\, dx = \frac{abc}{3}.$$

2. megoldás: Legyen $x = ar\cos\varphi$, $z = cr\sin\varphi$, $y = m$. A Jacobi determináns $J = acr$, az új határok

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le m \le br\cos\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{br\cos\varphi} acr\cos\varphi\, dm\, dr\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abcr^2\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \frac{abc}{3}.$$

113. Polár koordinátákra térve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{\pi}{8}(\pi - 2).$$

114. Legyen $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, $z = m$. A Jacobi determináns $J = abr$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-c\sqrt[4]{1-r^2}}^{c\sqrt[4]{1-r^2}} abr\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{8abc\pi}{5}.$$

115. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b r^3 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \pi(b^4 - a^4).$

116. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_r^{\sqrt{a^2-r^2}+a} mr\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{7a^4\pi}{6}.$

117. 1. megoldás: gömbkoordináták bevezetésével:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin\vartheta\cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{\pi}{16}.$$

2. megoldás: hengerkoordináták bevezetésével:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} mr\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{\pi}{16}$$

118. 1. megoldás: gömbkoordináták bevezetésével:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{a^3\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$$

2. megoldás: hengerkoordináták bevezetésével:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dm \, dr \, d\varphi = \frac{a^3\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$$

119. 1. megoldás: módosított gömbkoordináták bevezetésével:

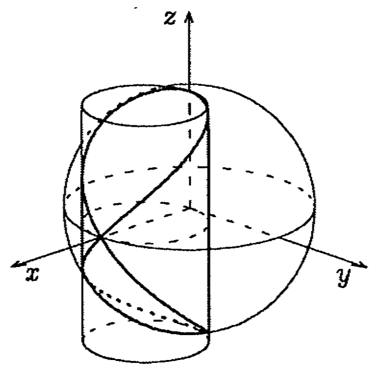
$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 abcr^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{4abc\pi}{3}.$$

2. megoldás: módosított hengerkoordináták bevezetésével:

$$8\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \, dy \, dx = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abc\sqrt{1-r^2} r \, dr \, d\varphi = \frac{4abc\pi}{3}.$$

120. A Viviani-test első térnyolcadba eső részének térfogata az egész térfogat negyede. Ezt úgy számítjuk ki, hogy a $z = \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$ függvényt integráljuk az $(x-R)^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$ félkörtartomány fölött. Polárkoordinátákra áttérve a T térfogatra kapjuk, hogy

$$T = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} \sqrt{4R^2 - r^2} r \, dr \, d\varphi = \frac{32R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$



121. Gömbkoordinátákkal számolva:

$$\Delta v = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ezt megszorozva az

$$1 = \frac{\Delta r}{r_2 - r_1} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

kifejezéssel kapjuk, hogy

$$\Delta v = \frac{1}{3}\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} \frac{-(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \Delta r \, \Delta\varphi \, \Delta\vartheta.$$

A Langrange-féle középértéktétel szerint az $f(r) = r^3$ ill. az $f(\vartheta) = \cos\vartheta$ függvényekhez van olyan $r_1 \le R \le r_2$ ill. $\vartheta_1 \le \Theta \le \vartheta_2$ szám, hogy

$$\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} = 3R^2 \text{ ill. } \frac{\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = -\sin\Theta,$$

amiből

$$\Delta v = R^2 \sin\Theta \Delta\varphi \Delta\vartheta.$$

122. Legyen a transzformáció az alábbi egyenletekkel megadva:

$$x = a + a\cos\varphi$$
$$y = b + b\sin\varphi.$$

Ekkor a Jacobi-determináns $J = abr$, és így az integrál

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\frac{c}{2}(2+2r(\cos\varphi+\sin\varphi+r^2))}^{c(2+r(\cos\varphi+\sin\varphi))} \frac{abr}{1+r^2}\,dm\,dr\,d\varphi = abc\pi\left(\frac{3}{2}\ln 3 - 1\right).$$

123. Legyen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = 2r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad J = 6r^2\sin\vartheta.$$
$$z = 3r\cos\vartheta$$

Ekkor

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^r 6r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = 24\pi(e-2).$$

124. A $xy = u$ és az $x\ln x = v$ egyenletekből kapjuk, hogy

$$\frac{v}{u} = \frac{\ln x}{y} \quad \text{illetve} \quad v = u\frac{\ln x}{y}.$$

Az $xy = 1$, $xy = 2$ egyenletekből kapjuk, hogy $1 \le u \le 2$, az $y = \ln x$ és az $y = 3\ln x$ egyenletekből pedig, hogy $\frac{1}{3} \le \frac{\ln x}{y} \le 1$. Tehát az új határok:

$$1 \le u \le 2$$
$$\frac{1}{3}u \le v \le u.$$

Az $x(u,v)$, $y(u,v)$ függvények parciális deriváltjait az implicit függvény deriválási szabályával számoljuk:

$$xy = u,\ x\ln x = v,$$

amiből u szerint deriválva

$$\left.\begin{aligned} x_u y + x y_u &= 1 \\ x_u \ln x + x_u &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{amiből} \quad x_u = 0,\ y_u = \frac{1}{x},$$

és v szerint deriválva

$$\left.\begin{aligned} x_v y + x y_v &= 0 \\ x_v \ln x + x_v &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{amiből} \quad x_v = \frac{1}{\ln x + 1},\ y_v = \frac{-y}{x(\ln x + 1)}.$$

Innen

$$\int_1^2\int_{\frac{u}{3}}^{u} f(x,y)|J|\,dv\,du = \int_1^2\int_{\frac{u}{3}}^{u} dv\,du = \frac{2}{3}.$$

125. A megoldás menete hasonló az előző feladatéhoz:

$$\int_a^b\int_{\frac{u}{q}}^{\frac{u}{p}} dv\,du = \frac{b^2-a^2}{2pq}(q-p).$$

126. Legyen
$$u = \frac{y}{1+x}, \; v = \frac{xy}{1+x}.$$
Ekkor
$$x = \frac{v}{u}, \; y = u + v$$
amiből
$$|J| = \frac{u+v}{u^2} = \frac{(1+x)^2}{y}$$
Ha $0 \le x \le 1$, akkor $0 \le \frac{v}{u} \le 1$, azaz $0 \le v \le u$.
Ha $0 \le y \le a(1+x)$, akkor $0 \le u + v \le a(1 + \frac{v}{u}) = a\frac{u+v}{u}$, azaz $0 \le u \le a$.
Tehát
$$\int_0^a \int_0^u (\operatorname{sh} u + v)\, dv\, du = a \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a + \frac{a^3}{6}.$$

127. 1. megoldás: Legyen
$$x + y + z = u, \; x + y = v, \; y = w.$$
Ekkor a határok:
$$a \le u \le 2a$$
$$u - v \le v \le 2u - 2v, \text{ amiből } \frac{u}{2} \le v \le \frac{2u}{3}$$
$$v - w \le w \le 3v - 3w, \text{ amiből } \frac{v}{2} \le w \le \frac{3v}{4}.$$
A Jacobi-determináns:
$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \; |J| = 1.$$
Így
$$T = \int_a^{2a} \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{2u}{3}} \int_{\frac{v}{2}}^{\frac{3v}{4}} dw\, dv\, du = \frac{49a^3}{864}.$$
2. megoldás: Ha az
$$u = x + y + z, \; v = \frac{x+y}{z}, \; w = \frac{y}{x}$$
helyettesítést végezzük el, akkor a határok ugyan konstansok lesznek, nevezetesen
$$a \le u \le 2a, \; 1 \le v \le 2, \; 1 \le w \le 3,$$
de a Jacobi-determináns és az integrálás bonyolult:
$$T = \int_a^{2a} \int_1^2 \int_1^3 \frac{u^2 v}{(v+1)^3(w+1)^2}\, dw\, dv\, du = \frac{49a^3}{864}.$$

128. A test térfogatának kiszámítása úgy történik, hogy az $R = \sqrt{2}$ sugarú félgömb térfogatából levonjuk két $\varrho = 1$ sugarú, $h = \sqrt{2} - 1$ magasságú gömbszelet térfogatát, pontosabban négy félgömbszelet térfogatot. Egy ilyen gömbszelet térfogata hengerkoordinátákban felírva:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-r^2}} r\, dm\, dr\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - \frac{5}{2}).$$

Innen a test térfogata, és a súlypont koordinátái:

$$V = \frac{2\pi}{3}(5 - 2\sqrt{2}).$$

$$z_s = \frac{8}{V} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\, dz\, dy\, dx = \frac{4}{\pi(5 - 2\sqrt{2})}.$$

A szimmetria miatt $x_s = y_s = 0$.

129. $I_{xy} = \frac{abc^3}{60}, I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}, I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$.

130. $I_{xy} = \frac{4\pi abc^3}{15}, I_{yz} = \frac{4\pi a^3bc}{15}, I_{zx} = \frac{4\pi ab^3c}{15}$.

131. Gömbi koordinátákban számolva az xy-síkra szimmetrikus felület egyenlete:

$$r^6 = a^5 r \cos\vartheta, \text{ azaz } r = a\sqrt[5]{\cos\vartheta},$$

továbbá

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta,$$

így

$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt[5]{\cos\vartheta}} r^4 \sin^3\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{a^5\pi}{10}.$$

17. Differenciálgeometria (megoldások)

1. $\lim_{t\to 3} \mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. A függvény a $t = 3$ helyen nem folytonos.
2. A $t = 1$ helyen nincs határérték.
3. $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{j}$. A függvény nem folytonos a $t = 0$ helyen.
4. Folytonos a $t = 2$ helyen.
5. $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = [1, 5, 1]$. A függvény nem folytonos a $t = 0$ helyen.
6. $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right]$. A függvény nem folytonos a $t = 0$ helyen.
7. Az első két koordináta-függvény határértéke például a L'Hospital-szabály alkalmazásával 1, illetve 2, továbbá

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \operatorname{ctg} t - 1}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t - \operatorname{tg} t}{t^2 \operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{t^2}{\cos^2 t} + 2t \operatorname{tg} t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-\sin^2 t}{t^2 + 2t \sin t \cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2 + 2 \cos t \frac{t}{\sin t}} = -\frac{1}{3},$$

ezért $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$. Nem folytonos a 0 helyen.

8. A vektor-skalárfüggvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, ezért csak jobb oldali határérték létezhet. Nem folytonos a 0 helyen.

$$\lim_{t\to +0} t^p \ln t = \lim_{t\to +0} \frac{\ln t}{t^{-p}} = \lim_{t\to +0} \frac{t^p}{-p} = 0,$$

$$\lim_{t\to +0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to +0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{t}{\sin t - t}}\right)^{\frac{t}{\sin t - t}}\right]^{\frac{\sin t - t}{t^3}} = e^{-\frac{1}{6}},$$

mert $\lim\limits_{t\to +0} \dfrac{t}{\sin t - t} = -\infty$ és $\lim\limits_{t\to +0} \dfrac{\sin t - t}{t^3} = -\dfrac{1}{6}$, továbbá

$$\lim_{t\to +0} (\operatorname{ctg} t)^{\frac{1}{\ln t}} = e^{\lim_{t\to +0} \frac{\ln \operatorname{ctg} t}{\ln t}} = \lim_{t\to +0} e^{\lim_{t\to +0}\left(-\frac{t}{\sin t}\frac{1}{\cos t}\right)} = e^{-1},$$

ezért $\lim\limits_{t\to +0} \mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}\mathbf{j} + \dfrac{1}{e}\mathbf{k}$.

9. $\lim_{t\to 1} \mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$. Nem folytonos az 1 helyen.
10. $\lim_{t\to -0} \mathbf{r}(t) = \frac{1}{\ln 3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ és $\lim_{t\to +0} \mathbf{r}(t) = \frac{1}{\ln 3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Nem folytonos és nincs határértéke a 0 helyen.
11. A $t_0 = k\pi = 4k\frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyeken a függvény nincs értelmezve és határérték sem létezik. $\mathbf{r}((4k+1)\frac{\pi}{4}) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ és $\lim_{t\to(4k+1)\frac{\pi}{4}} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, azaz a $t_0 = (4k+1)\frac{\pi}{4}$ helyeken a függvény nem folytonos. $\mathbf{r}((4k+2)\frac{\pi}{4}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\lim_{t\to(4k+2)\frac{\pi}{4}} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, azaz a $t_0 = (4k+2)\frac{\pi}{4}$ helyeken a függvény nem

folytonos.
$\mathbf{r}((4k+3)\frac{\pi}{4}) = \lim_{t\to(4k+3)\frac{\pi}{4}} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, azaz a $t_0 = (4k+3)\frac{\pi}{4}$ helyeken a függvény folytonos.

12. A $t_0 = 1$ helyen a függvény nincs értelmezve, így nem is folytonos ezen a helyen. $\lim_{t\to 1-0}\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ és $\lim_{t\to 1+0}\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, azaz nincs határértéke az 1 helyen. (A második koordináta-függvény határértéke például L'Hospital-szabállyal számítható ki.) Ha $t_0 = 2k \quad (k \in \mathbf{N}^+)$, akkor $\lim_{t\to 2k-0}\mathbf{r}(t) = (2k+1)^2\mathbf{i} + \frac{2k-1}{\ln 2k}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ és $\lim_{t\to 2k+0}\mathbf{r}(t) = (2k+1)^2\mathbf{i} + \frac{2k-1}{\ln 2k}\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{r}(2k)$. Ha $t_0 = 2k+1 \quad (k \in \mathbf{N}^+)$, akkor $\lim_{t\to(2k+1)-0}\mathbf{r}(t) = 4(k+1)^2\mathbf{i} + \frac{2k}{\ln(2k+1)}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\lim_{t\to(2k+1)+0}\mathbf{r}(t) = 4(k+1)^2\mathbf{i} + \frac{2k}{\ln(2k+1)}\mathbf{j} - \mathbf{k} = \mathbf{r}(2k+1)$. A függvény csak jobbról folytonos az 1-nél nagyobb egész helyeken. (Megjegyezzük, hogy minden más helyen a függvény folytonos.)

13. $\mathbf{i}3t^2 - \mathbf{j}\sin t - \mathbf{k}e^{-t}$. **14.** $(\mathbf{i}-\mathbf{j})\sin 2t$.

15. $\mathbf{i}\dfrac{2\ln t\cos\ln^2 t}{t} - \mathbf{j}\dfrac{4t}{(t^2+1)^2} + \mathbf{k}\dfrac{1}{2(t+1)\sqrt{t}}$.

16. $\mathbf{k}\ln 3$. **17.** $-\mathbf{i}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} + \mathbf{j}2t\,\mathrm{sh}\,t^2 + \mathbf{k}\,\mathrm{sh}\,2t$.

18. $\mathbf{i}\dfrac{2t}{\sqrt{1+t^4}} + \mathbf{j}\dfrac{1}{t\,\mathrm{ch}^2\ln t} - \mathbf{k}\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 t}$. **19.** $3\cos t(\cos^2 t - 3\sin^2 t)\mathbf{i}$.

20. $4\sqrt[3]{t}\left(4t^4+1\right)\mathbf{i} + 3t^2\left(7t^4+3\right)\mathbf{j} + 10t^2\sqrt[3]{t}\mathbf{k}$.

21. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{r}(t)$ függvénnyel megadott görbe illeszkedik az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű síkra ($A^2+B^2+C^2 \neq 0$). Ez azt jelenti, hogy ezt az egyenletet a görbe minden pontjának koordinátái kielégítik, azaz

$$A2t^2 + B(3t^2+t+1) + C(2t-5) + D = 0.$$

Ezzel ekvivalens a

$$2A+3B=0, \quad B+2C=0, \quad B-5C+D=0$$

egyenletrendszer. Az egyenletrendszer megoldható, például: $A = 3C, B = -2C, D = 7C$, ahol $C \neq 0$. Válasszuk az egyszerűség kedvéért C-t 1-nek. A görbét tartalmazó sík egyenlete: $3x - 2y + z + 7 = 0$.

22. $2x + z - 4 = 0$.

23. $f^2(t)\cos^2 t + f^2(t)\sin^2 t = f^2(t)$.

24. A görbe az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű elliptikus hengeren van.

25. A görbe az $x^2+y^2+z^2 = 1$ egyenletű gömbön van.

26. Az $f(t)$ függvénytől függetlenül $x^2+y^2 = 2a^2$, ezért minden ilyen egyenletű görbe ezen a hengeren van.

27. A görbe az $x^2+y^2 = 1$ egyenletű hengeren van.

28. A görbe az $4x^2+4y^2 = z^2$ egyenletű kúpon van.

29. A görbe az $x^2+y^2+z^2 = 4$ egyenletű gömbön van.

30. A görbe az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ egyenletű ellipszoidon van.

31. A görbe az $x^2+y^2+z^2=a^2$ egyenletű gömbön van.

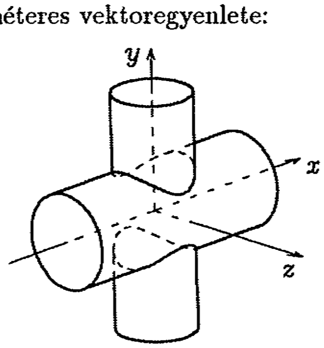
32. Legyen $y=t$ (paraméter). Akkor $x=-2t$ és $z=\pm\sqrt{a^2-5t^2}$. A metszésvonal (kör) egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}=-2t\mathbf{i}+t\mathbf{j}\pm\sqrt{a^2-5t^2}\mathbf{k}$.

33. Ha $x=t$, akkor $y+z=1-t$ és $z^2-y^2=t^2$. Ebből

$$t^2=(z-y)(z+y)=(z-y)(1-t),$$

azaz $z-y=\dfrac{t^2}{1-t}$. ($t=1$ nem lehetséges, mert ha $t=1$, akkor $1=t^2=(z-y)(1-t)=0$.) A metszésvonal egy paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r}=t\mathbf{i}+\frac{1-2t}{2(1-t)}\mathbf{j}+\frac{2t^2-2t+1}{2(1-t)}\mathbf{k}.$$



34. $x^2+z^2=a^2,\quad y^2+z^2=b^2;$
$\mathbf{r}=\mathbf{i}a\cos t\pm\mathbf{j}\sqrt{b^2-a^2\sin^2 t}+\mathbf{k}a\sin t.$
Az $a=b$ esetben két ellipszist kapunk. (1. ábra).

35. $\mathbf{r}(2)=-\mathbf{i}+\mathbf{j}\ln 5+\mathbf{k}e^{-2}$ és
$\dot{\mathbf{r}}(t)=\dfrac{1}{(1-t)^2}\mathbf{i}+\dfrac{2t}{1+t^2}\mathbf{j}-e^{-t}\mathbf{k},$
így $\dot{\mathbf{r}}(2)=\mathbf{i}+\dfrac{4}{5}\mathbf{j}-\dfrac{1}{e^2}\mathbf{k}$, ezért az érintő egy vektoregyenlete:

$$\mathbf{p}=\mathbf{r}(2)+u\dot{\mathbf{r}}(2)=(u-1)\mathbf{i}+(\frac{4u}{5}+\ln 5)\mathbf{j}+\frac{1}{e^2}(1-u)\mathbf{k}\quad(u\in R).$$

36. $\mathbf{p}=(1+2u)\mathbf{i}+(2-u)\mathbf{j}+\dfrac{1}{4}(2+u)\mathbf{k}.$

37. $\mathbf{p}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}((1-u)\mathbf{i}+(1+u)\mathbf{j}+2(1-u)\mathbf{k}).$

38. $\mathbf{p}=\left(\dfrac{1}{2}-u\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{1}{2}+u\right)\mathbf{j}+\left(\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}u\right)\mathbf{k}.$

39. $\mathbf{p}=\mathbf{i}+u\mathbf{j}+\mathbf{k}.$

40. $\mathbf{p}=\mathbf{i}(1+ua)+\mathbf{j}u+\mathbf{k}(1+ua).$

41. $\mathbf{p}=4(1-2u)\mathbf{i}+4\left(u-\dfrac{2}{3}\right)\mathbf{j}+2(1-u)\mathbf{k}.$

42. $\mathbf{p}=\sqrt{3}(1+u\ln 3)\mathbf{i}+\ln 3\left(\dfrac{1}{2}+u\right)\mathbf{j}+\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{u}{5}\right)\mathbf{k}.$

43. $\mathbf{p}=2(1+\sqrt{3}u)\mathbf{i}+(\sqrt{3}+4u)\mathbf{j}+a\left(\dfrac{\pi}{3}+u\right)\mathbf{k}.$

44. $\dot{\mathbf{r}}(1)=\mathbf{0}$, így a **D 17.6** alapján nem adható meg a $t_0=1$ paraméterű pontban az érintő egy irányvektora. Az érintő egy irányvektorát (ha létezik) ebben az esetben a következő módszerrel határozzuk meg. A $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(1)=(t-1)^2\mathbf{i}+(t-1)^3\mathbf{j}+(t-1)^4\mathbf{k}$ ($t\neq 1$) vektor a görbe t és 1 paraméterű pontján átmenő szelő egy irányvektora. Nyilvánvaló, hogy a szelőnek van olyan irányvektora, amelynek valamelyik koordinátája 1. Az érintő egy irányvektorát a szelők ilyen irányvektorainak határértékeként adjuk meg. Osszuk el a $\mathbf{v}(t)$ vektort például az első koordinátájával, azaz $(t-1)^2$-tel. Így azt az

irányvektort kapjuk, amelynek az első koordinátája 1; ekkor $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\mathbf{v}(t)}{(t-1)^2} = \mathbf{i}$.
Az érintő egy vektoregyenlete: $\mathbf{p} = (u-1)\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (Ebből látható, hogy nincs olyan irányvektor, amelynek második vagy harmadik koordinátája 1.)

45. Az előző feladat megoldási módszerét alkalmazzuk, mivel $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$. A szelők olyan irányvektorainak, amelyek első koordinátája 1, nincs határértéke a $t_0 = 0$ helyen, így az érintőnek nincsen olyan irányvektora, amely első koordinátája 1. Válasszuk a szelők irányvektorainak második koordinátáját 1-nek. (Megoldható úgy is, hogy a harmadik koordinátát választjuk így.) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathbf{v}(t)}{2t^2} = \mathbf{j} + \dfrac{1}{2}\mathbf{k}$, amiből az érintő egy vektoregyenlete: $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + (u-1)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}u - 3\right)\mathbf{k}$.

46. $\dot{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{0}$, így a **44.** feladat megoldási módszerét alkalmazzuk. Válasszuk a szelők irányvektorainak harmadik koordinátáját 1-nek. (Megoldható úgy is, hogy az első vagy második koordinátát választjuk így.) A határértékeket számíthatjuk például L'Hospital-szabállyal. Az érintő egy vektoregyenlete: $\mathbf{p} = \left(\frac{3}{8}u - \frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(1 - \frac{1}{2}u\right)\mathbf{j} + (u-1)\mathbf{k}$.

47. A P_0 pont mindkét felületre illeszkedik. Válasszuk az x változót paraméterként. Differenciáljuk mindkét felület egyenletét x szerint (az x szerinti differenciálást a változók feletti ponttal jelöljük):

$$x + y\dot{y} = 0, \quad y\dot{y} + z\dot{z} = 0.$$

A P_0 pont koordinátáit behelyettesítve:

$$1 + 2\dot{y} = 0, \quad \dot{y} + \dot{z} = 0.$$

Ebből az egyenletrendszerből kapjuk, hogy a P_0 pontban $\dot{y} = -\frac{1}{2}$ és $\dot{z} = \frac{1}{2}$. $\dot{x} = 1$ miatt a két felület metszésvonalának P_0 pontbeli érintővektora: $\dot{\mathbf{r}} = [1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Az érintő egy vektoregyenlete:

$$\mathbf{p} = (1+t)\mathbf{i} + (2 - \frac{t}{2})\mathbf{j} + (2 + \frac{t}{2})\mathbf{k}.$$

Az érintő egy paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 1 + t, \quad y = 2 - \frac{t}{2}, \quad z = 2 + \frac{t}{2}.$$

Ha az egyszerűbb írásmód kedvéért $2\dot{\mathbf{r}}$-ot választjuk a P_0-beli érintő irányvektoraként, akkor az érintő egy vektoregyenlete:

$$\mathbf{p} = (1+2t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j} + (2+t)\mathbf{k}.$$

48. $\mathbf{p} = (1+t)\mathbf{i} + (1 - \dfrac{t}{3})\mathbf{j} + (1 - \dfrac{2t}{3})\mathbf{k}$. (Megjegyezzük, hogy x-et választottuk paraméterként. Ha y-t választjuk paraméterként, akkor az $\mathbf{p} = (1-3u)\mathbf{i} + (1+u)\mathbf{j} + (1+2u)\mathbf{k}$ vektoregyenletet kapjuk. A $t = -3u$ helyettesítéssel az előző vektoregyenlethez jutunk.)

49. $x = 2 + t, \quad y = 4(1+t), \quad z = 16(1+2t)$.

50. Paraméterként most csak z választható. Differenciáljuk az egyenleteket z szerint:

$$2z + \dot{x}z + x - 2\dot{y} = 0, \quad 6z - \dot{x}z - x - \dot{x} = 0.$$

A P_0 pontbeli érintővektor: $\dot{\mathbf{r}}(P_0) = [0, 0, 1]$. Így az érintő egy vektoregyenlete: $\mathbf{p} = t\mathbf{k}$.

51. $\mathbf{p} = (1+t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. **52.** $\mathbf{p} = (2+t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$.

53. $x = 27t - 2, \quad y = 28t + 1, \quad z = 4t + 6$.

54. A sík egy normálvektora: $\mathbf{n} = [1, 3, 1]$. A térgörbe t paraméterű pontjához akkor és csak akkor tartozik a síkkal párhuzamos érintő, ha $\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{n} = 0$.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j} + (t^2 - 3t)\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{n} = -\frac{1}{t} + 3 + t^2 - 3t.$$

Ebből $\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{n} = 0$ akkor és csak akkor ha $t = 1$, tehát $P(0, 1, -\frac{7}{6})$.

55. A sík egy normálvektora: $\mathbf{n} = [1, 3, 2]$, $\quad \dot{\mathbf{r}}(t) = t^4\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. Az

$$\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{n} = t^2(t^2 + 3t + 2) = 0$$

egyenlet megoldásai: $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, ezért $P_1(-\frac{32}{5}, 4, -\frac{8}{3})$ és $P_2(-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3})$. De $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$, így a $P_3(0, 0, 0)$ pontban az érintő egy irányvektorát a **44.** feladat megoldási módszerével határozzuk meg. Nem nehéz számolással látható, hogy ez például a $[0, 0, 1]$ vektor, amely nem párhuzamos az S síkkal.

56. $P_1(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9})$, $\quad P_2(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9})$.

57. A t paraméterű pontban akkor és csak akkor párhuzamos az érintő az xy koordinátasíkkal, ha $\mathbf{k}\dot{\mathbf{r}}(t) = 0$. Az egyenlet megoldásai azonban nem tartoznak $\mathbf{r}(t)$ értelmezési tartományába, ezért nincs ilyen érintő. (Megjegyezzük, hogy elegendő $\dot{\mathbf{r}}(t)$ harmadik koordinátáját kiszámítani.)

58. $P_k\left(0, (-1)^k b, \frac{(2k+1)}{2}c\pi\right)$, $\quad k \in \mathbf{Z}$.

59. Az egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v} = [1, 1, 1]$. $\quad \dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{v} = |\dot{\mathbf{r}}(t)||\mathbf{v}|\cos 30°$, azaz

$$4t^2 + 4t + 2 = 3\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} = 3(2t^2 + 1).$$

A megoldások: $P_1(\frac{10+7\sqrt{2}}{3}, 3 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $\quad P_2(\frac{10-7\sqrt{2}}{3}, 3 - 2\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$. (Megjegyezzük, hogy az $\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{v} = |\dot{\mathbf{r}}(t)||\mathbf{v}|\cos 150°$ feltételt kielégítő pont nincs a görbén.)

60. $x = a\left(\frac{\pi}{2} - 1 + u\right)$, $\quad y = a(1+u)$, $\quad z = \sqrt{2}a(2+u)$. Az érintő a z tengellyel $\frac{\pi}{4}$ szöget zár be.

61. $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 18t\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\mathbf{k}$, az $x + y = 0$ egyenletű sík egy normálvektora: $[1, 1, 0]$. $\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{n} = |\dot{\mathbf{r}}(t)||\mathbf{n}|\cos 45°$, azaz $1 + 18t = \sqrt{(1+18t)^2}$. Mivel $t \geq 0$, ezért ez az egyenlet a térgörbe minden pontjára teljesül. A $P(t, 9t^2, 4\sqrt{t^3})$ ponton áthaladó és $\dot{\mathbf{r}}(t)$ irányvektorú érintő egyenlete:

$$\mathbf{p} = \mathbf{i}(t + u) + \mathbf{j}(9t^2 + 18tu) + \mathbf{k}(4\sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}u).$$

Az érintő és az xy koordinátasík metszéspontjára a $4\sqrt{t^3}+6\sqrt{t}u=0$ egyenlet teljesül, amelyből $u=-\frac{2}{3}t$ adódik, s így a metszéspont: $(\frac{t}{3},-3t^2,0)$. A kérdéses görbe egy paraméteres egyenletrendszere: $x=\frac{t}{3}$, $y=-3t^2$, $z=0$, amelyből a $y=-27x^2$, $z=0$ paramétermentes egyenletrendszerű parabolát kapjuk.

62. $\cos(\dot{\mathbf{r}}(t),\mathbf{i})=\dfrac{1-\cos t}{2}=\sin^2\dfrac{t}{2}$, $\cos(\dot{\mathbf{r}}(t),\mathbf{j})=\dfrac{1}{2}\sin t$, $\cos(\dot{\mathbf{r}}(t),\mathbf{k})=\cos\dfrac{t}{2}$.

63. Az érintő egy paraméteres vektoregyenlete a t paraméterű pontban:

$$\mathbf{p}=a(\cos t-u\sin t)\mathbf{i}+a(\sin t+u\cos t)\mathbf{j}+b(t+u)\mathbf{k};$$

az xy koordinátasíkkal közös pontokban $b(t+u)=0$, azaz $u=-t$. Ezért a metszéspontok a következő egyenletű görbét írják le:

$$\mathbf{r}=a(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+a(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}.$$

64. $\mathbf{r}=\mathbf{i}e^t\sin t-\mathbf{j}e^t\cos t$.

65. Az érintő egy paraméteres vektoregyenlete a t paraméterű pontban:

$$\mathbf{p}=(t+u)\mathbf{i}+(t^2+2tu)\mathbf{j}+(t^3+3t^2u)\mathbf{k};$$

az xy koordinátasíkkal közös pontokban $t=0$ vagy $u=-\frac{1}{3}t$. A $t=0$ paraméterű pontban az érintő irányvektora $[1,0,0]$, ezért az érintő nem metszi az xy koordinátasíkot. Ha $u=-\frac{1}{3}t$, akkor a keresett görbe vektoregyenlete: $\mathbf{r}=\dfrac{2}{3}t\mathbf{i}+\dfrac{1}{3}t^2\mathbf{j}$.

66. A metszésvonal egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+\mathbf{j}+(x^2+16)\mathbf{k}$; $\dot{\mathbf{r}}(x)=\mathbf{i}+2x\mathbf{k}$, $\dot{\mathbf{r}}(-3)=\mathbf{i}-6\mathbf{k}$. Az érintő egy paraméteres egyenletrendszere: $x=-3+t$, $y=1$, $z=25-6t$.

67. Az $x^2+y^2=1$ egyenletű körhenger alkotói párhuzamosak a $\mathbf{k}$ egységvektorral. Ezért az $\dot{\mathbf{r}}(t)$-nek párhuzamosnak kell lennie $\mathbf{k}$-val. Nincs ilyen pont a térgörbén.

68. Az $x^2+y^2=z^2$ egyenletű körkúp alkotói párhuzamosak a $[\cos u,\sin u,1]$ $(0\le u<2\pi)$ alakú vektorok valamelyikével. $\dot{\mathbf{r}}(t)=[-\sin t,2\cos t,1]$, ezért a térgörbe egy érintője pontosan akkor párhuzamos a kúp valamelyik alkotójával, ha van olyan u és t érték, amelyre $\cos u=-\sin t$ és $\sin u=2\cos t$. Mivel $\cos^2u+\sin^2u=1$, ezért $(-\sin t)^2+(2\cos t)^2=1$, amiből $\cos t=0$ következik, azaz $t=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. A keresett pontok $\left(0,2,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ és $\left(0,-2,\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

69. A körhenger egyenletébe helyettesítve az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ vektor koordinátáit, meggyőződhetünk arról, hogy a térgörbe valóban a hengerfelületre írható. Jelöljük $\varphi(t)$-vel a térgörbe t paraméterű pontjában a térgörbe és a henger alkotói által bezárt szöget $(0\le\varphi(t)\le\frac{\pi}{2})$. Ekkor

$$\cos\varphi(t)=\frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{k}|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

azaz minden t-re $\varphi(t) = \arccos \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}}$. $\varphi(t) = \dfrac{\pi}{6}$ akkor, ha $c = \pm\sqrt{3}a$.

70. Adott t paraméterű ponton átmenő alkotó egy irányvektora: $\mathbf{r}(t)$. Legyen $\varphi(t)$ a térgörbe t paraméterű pontjában a térgörbe és a kúp alkotója által bezárt szög $(0 \le \varphi(t) \le \frac{\pi}{2})$.

$$\cos\varphi(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{r}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)||\mathbf{r}(t)|} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2+1}}.$$

$\varphi(t) = \frac{\pi}{3}$ akkor, ha $a = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

71. A térgörbe t paraméterű pontján átmenő érintő vektoregyenlete: $\mathbf{p} = \mathbf{i}a(\sin t + \cos t + u(\cos t - \sin t)) + \mathbf{j}a(\sin t - \cos t + u(\cos t + \sin t)) + \mathbf{k}be^{-t}(1-u)$. A $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ egyenletű egyenes az xy koordinátasíkot az $u = 1$ paraméterű pontjában metszi, azaz az $x = 2a\cos t$, $y = 2a\sin t$, $z = 0$ koordinátájú pontokban. Ezek a pontok az $x^2 + y^2 = 4a^2$, $z = 0$ egyenletrendszerű kör pontjai.

72. $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}e^t(\cos t - \sin t) + \mathbf{j}e^t(\sin t + \cos t) + \mathbf{k}e^t$,

$$s = \int_0^2 e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1}\,dt = \sqrt{3}\int_0^2 e^t dt = \sqrt{3}(e^2 - 1).$$

73. $s = \int_{-2}^0 \sqrt{1+t^2+2t}\,dt = \int_{-2}^0 |t+1|\,dt = 2\int_{-1}^0 (t+1)\,dt = 1.$

74. $s = 2\int_0^2 \sqrt{4t^6+4t^4+t^2}\,dt = 2\int_0^2 (2t^3+t)\,dt = 20.$

75. $s = \int_0^3 \sqrt{\frac{9}{4}t+2}\,dt = \frac{35\sqrt{35}-16\sqrt{2}}{27} \approx 6,83094.$

76. $s = \int_{-1}^1 |t^2+9t|\,dt = 9.$

77. A 0 helyen a függvény nem differenciálható, ezért $s = \lim\limits_{a\to+0}\displaystyle\int_a^1 \frac{4}{\sqrt{t}(4-t)}\,dt$, ha ez a jobb oldali határérték létezik. A $t = u^2$ $(u > 0)$ helyettesítést végrehajtva: $s = 2\lim\limits_{a\to+0}\displaystyle\int_a^1 \frac{4}{4-u^2}\,du = 2\ln 3.$

78. $s = 2(a+2b).$

79. $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{i}\dfrac{\sin\ln t}{t} + \mathbf{j}\dfrac{\cos\ln t}{t} + \mathbf{k}$; $\quad s = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt.$

A $t = \sqrt{u^2-1}$ $\quad(u \ge 1)$ helyettesítést alkalmazva:

$$s = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2}{u^2-1}\,du = 2 - \sqrt{2} - \ln\sqrt{3}(\sqrt{2}-1) \approx 0,917854.$$

80. A $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítést alkalmazva:

$$s = \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{ch}^2 u\,du = \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2} \approx 1,147794.$$

81. $s = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. 82. $s = \frac{3}{2}$. 83. $s = 10$.

84. $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}\sin 2t - \mathbf{j}\sin 2t$; $\quad s = \displaystyle\int_0^e \sqrt{2\sin^2 2t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^e |\sin 2t|\,dt =$ $\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt + \sqrt{2}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{e} \sin 2t\,dt\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + \cos 2e).$

85. $s=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{4-t^2}+\frac{4}{(4-t^2)^2}}\,dt=\int_0^1\left(1+\frac{2}{4-t^2}\right)dt=\left[t+\ln\frac{2+t}{2-t}\right]_0^1=$ $1+\ln 3$.

86. $\dot{\mathbf{r}}(t)=\cos t\sin t(-\mathbf{i}3\cos t+\mathbf{j}3\sin t-4\mathbf{k})$;

$s=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt=10\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt=10.$

87. Határozzuk meg a **P 17.9** alapján az $t\mapsto s$ függvényt:

$s=\int_0^t|\dot{\mathbf{r}}(u)|\,du=\sqrt{3}\int_0^t e^u\,du=\sqrt{3}(e^t-1),\quad t\in\mathbf{R}.$

Az $t\mapsto s$ függvény inverze: $s\mapsto t=\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),\quad -\sqrt{3}<s<\infty.$

A térgörbe egy ívhosszparaméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\left(\mathbf{i}\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)+\mathbf{j}\sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)+\mathbf{k}\right).$$

88. $s=\int_0^t 2\sqrt{2}|u|\,du=\begin{cases}\sqrt{2}t^2, & \text{ha } t\ge 0;\\ -\sqrt{2}t^2, & \text{ha } t<0,\end{cases}$

$t^2=\frac{|s|}{\sqrt{2}},\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\mathbf{i}\frac{|s|}{\sqrt{2}}+\mathbf{j}\cos\frac{|s|}{\sqrt{2}}+\mathbf{k}\sin\frac{|s|}{\sqrt{2}}.$

89. $s=\int_0^t(1+u)\,du=\frac{t^2}{2}+t;\quad t=\sqrt{2s+1}-1.$ (Mivel $t\ge 0$, ezért $s\ge 0$.)

90. $t=\frac{s}{\sqrt{14}}.$

91. $s=2\int_0^t\sin\frac{u}{2}\,du=4\left(1-\cos\frac{t}{2}\right),\quad t=2\arccos\left(1-\frac{s}{4}\right),\quad 0\le s\le 8,$

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\mathbf{i}\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4}\right)-\left(1-\frac{s}{4}\right)\frac{\sqrt{s(8-s)}}{4}\right)+\mathbf{j}\frac{s(8-s)}{8}.$

92. $\lim_{t\to+0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{0},\quad t=\frac{s}{\sqrt{3}},\ s\ge 0.$

93. $t=\frac{4}{9}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}s+1\right)^2}-1\right),\ s\ge 0.$

94. $t=\operatorname{arsh}s.$

95. $t=\sqrt{s+4}-2,\quad s\ge 0.$

96. $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\sqrt{a^2+\frac{s^2}{2}}\mathbf{i}+\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+a\left(\operatorname{arsh}\frac{s}{a\sqrt{2}}\right)\mathbf{k}.$

97. $|\dot{\mathbf{r}}(s)|=\sqrt{\frac{1}{9}\cos^2\frac{s}{3}+\frac{1}{9}\sin^2\frac{s}{3}+\frac{8}{9}}=1$, így a **T 17.10** szerint a térgörbe természetes paraméterezésű. A **D 17.12** alapján: $\mathbf{t}(0)=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+\sqrt{8}\mathbf{k}),\quad \mathbf{n}(0)=\mathbf{j},$ $\mathbf{b}(0)=-\frac{1}{3}(\sqrt{8}\mathbf{i}-\mathbf{k}).$

98. $|\dot{\mathbf{r}}(s)|=1,\quad \mathbf{t}(0)=\frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{j}+3\mathbf{k}),\quad \mathbf{n}(0)=-\mathbf{i},\quad \mathbf{b}(0)=-3\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}.$
(L. az előző feladat megoldását!)

99. $|\dot{\mathbf{r}}(s)|=1,\quad \mathbf{t}(\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}),\quad \mathbf{n}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}),$
$\mathbf{b}(0)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$. (L. a **97.** feladat megoldását!)

100. A T 17.13 szerint: $\mathbf{t}(1) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(1)}{|\dot{\mathbf{r}}(1)|} = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$,

$\mathbf{b}(1) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)}{|\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)|} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$,

$\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \times \mathbf{t}(1) = \dfrac{1}{3\sqrt{26}}(7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 11\mathbf{k})$.

101. $\mathbf{t}(0) = \mathbf{k}$, $\mathbf{b}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$.

102. $\mathbf{t}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5}(-2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{10}(3\sqrt{3}\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$, $\mathbf{n}(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$.

103. $\mathbf{t}(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{n}(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{70}}(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\sqrt{2}\mathbf{k})$.

104. $\mathbf{t}(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4}(3\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(\dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{1}{4\sqrt{7}}(-\mathbf{i} + 5\sqrt{3}\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$,

$\mathbf{n}(\dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j} - \sqrt{3}\mathbf{k})$. (L. a **60.** feladatot!)

105. $\mathbf{t}(-\frac{5\pi}{4}) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k})$,

$\mathbf{n}(-\dfrac{5\pi}{4}) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{k})$.

106. $\mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{b}(0) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $\mathbf{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{205}}(5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k})$.

107. $\mathbf{t}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}(e^2+1)}((e^2 - 1)\mathbf{i} + (e^2 + 1)\mathbf{j} + 2e\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e^2+2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - e\mathbf{k})$,

$\mathbf{n}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e^2+4}(e^2+1)}(e(e^2 + 3)\mathbf{i} - e(e^2 + 1)\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

108. $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, ezért $\dot{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Az érintő egy irányvektora a $t_0 = 1$ paraméterű $P_0(2, 1, -2)$ pontban: $[1, 3, 2]$. Az érintő egy egyenletrendszere:

$$x - 2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}.$$

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, ezért $\ddot{\mathbf{r}}(1) = 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ és $\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. A binormális egy irányvektora a P_0 pontban: $[3, 1, -3]$. A binormális egy egyenletrendszere:

$$\frac{x-2}{3} = y - 1 = -\frac{z+2}{3}.$$

$(\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)) \times \dot{\mathbf{r}}(1) = -22\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$, így a főnormális egy irányvektora a P_0 pontban: $[11, -9, 8]$. A főnormális egy egyenletrendszere:

$$\frac{x-2}{11} = -\frac{y-1}{9} = \frac{z+2}{8}.$$

A simulósík merőleges a binormálisra, ezért egyik normálvektora a $[3, 1, -3]$ vektor. A simulósík egyenlete: $3x + y - 3z - 13 = 0$. A normálsík merőleges az érintőre, ezért az egyenlete: $x + 3y + 2z - 1 = 0$. A rektifikáló sík merőleges a főnormálisra, így az egyenlete: $11x - 9y + 8z + 3 = 0$.

109. Érintő: $x = 2 + u$, $y = 2 - 2u$, $z = -u$;
Binormális: $x = 2 + 6v$, $y = 2 + v$, $z = 4v$;

Főnormális: $x = 2 + 7w, \quad y = 2 + 10w, \quad z = -13w;$
Simulósík: $6x + y + 4z = 14;$ Normálsík: $x - 2y - z = -2;$ Rektifikáló sík: $7x + 10y - 13z = 34.$

110. Érintő: $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + \mathbf{j} + u\mathbf{k};$ Binormális: $\mathbf{r} = -v\mathbf{i} + \mathbf{j} + v\mathbf{k};$
Főnormális: $\mathbf{r} = (1 + 2w)\mathbf{j};$
Simulósík: $x = z;$ Normálsík: $x = -z;$ Rektifikáló sík: $y = 1.$

111. Érintő: $2x = 2y = z + 2;$ Binormális: $x + y = 2, \quad z = 0;$
Főnormális: $x = y = 1 - z;$
Simulósík: $x = y;$ Normálsík: $x + y + 2z = 2;$ Rektifikáló sík: $x + y - z = 2.$

112. Érintő: $x = \ln 5 + 8u, \quad y = -1 + 5u, \quad z = \sqrt{5} + 4\sqrt{5}u;$
Binormális: $x = \ln 5 + 10v, \quad y = -1 - 4v, \quad z = \sqrt{5} - 3\sqrt{5}v;$
Főnormális: $x = \ln 5 + \sqrt{5}w, \quad y = -1 + 64\sqrt{5}w, \quad z = \sqrt{5} - 82w;$
Simulósík: $10x - 4y - 3\sqrt{5}z = 10\ln 5 - 11;$ Normálsík: $8x + 5y + 4\sqrt{5}z = 8\ln 5 + 15;$ Rektifikáló sík: $x + 64y - \dfrac{82\sqrt{5}}{5}z = \ln 5 - 146.$

113. Érintő: $x = \dfrac{1}{2} + u, \quad y = 1, \quad z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}u;$
Binormális: $x = \dfrac{1}{2} + 4v, \quad y = 1 + 3v, \quad z = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2}v;$
Főnormális: $x = \frac{1}{2} + 6w, \quad y = 1 - 12w, \quad z = \sqrt{2} - 3\sqrt{2}w;$
Simulósík: $4x + 3y - 2\sqrt{2}z = 9;$ Normálsík: $2x + 2\sqrt{2}z = -3;$
Rektifikáló sík: $2x - 4y - \sqrt{2}z = -1.$

114. Tetszőleges t paraméterű ponthoz tartozó normálsík egyenlete:

$$\sin 2t(x - \sin^2 t) + \cos 2t(y - \sin t \cos t) - \sin t(z - \cos t) = 0.$$

115. $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = -2e^t\mathbf{i} + 4e^{2t}\mathbf{j} - 4e^{3t}\mathbf{k}$ a simulósík egy normálvektora a t paraméterértékű pontban. Az egyenes akkor és csak akkor párhuzamos a simulósíkkal, ha $\mathbf{v} = [2, 2, 1]$ irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz $(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t))\mathbf{v} = 0$, amiből $t = 0$ adódik.

116. Az $\dot{\mathbf{r}}(t) = (3t^2 - 4t + 2)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$ vektornak merőlegesnek kell lenni az $\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ vektorra, és ez csak $t = 1$ esetén következik be, azaz az érintő benne van a simulósíkban.

117. Mivel $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\dfrac{4}{t}\mathbf{i} - \dfrac{12}{t^2}\mathbf{j} - \dfrac{2}{t^4}\mathbf{k}$ merőleges az $[1, -1, 8]$ vektorra, ezért a keresett t-kre:
$0 = t^3 - 3t^2 + 4 = t^3 - 2t^2 - t^2 + 4 = t^2(t - 2) - (t^2 - 4) = (t - 2)^2(t + 1),$
s így csak a $P(1, \ln 2, -4)$ pont tesz eleget a feladat követelményeinek.

118. A keresett pont a $(0, 0, 0)$.

119. A rektifikáló sík egyenlete: $2ax + 2ay - z = 2a^2$. A rektifikáló sík $a = \frac{1}{4}$ esetben merőleges az adott síkra.

120. A P_0 pont rajta van mindkét felületen. Válasszuk az x változót paraméterként, s tekintsük az y és z változókat x függvényeként. Differenciáljuk mindkét felület egyenletét x szerint. A kapott egyenleteket ismét differenciáljuk x szerint.

(Az x szerinti differenciálást a változók feletti ponttal jelöljük.) Természetesen $\dot{x} = 1$ és $\ddot{x} = 0$.

$$x + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \qquad 1 + \dot{y}^2 + y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0,$$
$$x + y\dot{y} - 2 = 0, \qquad 1 + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

A P_0 pont koordinátáit helyettesítve az első egyenletrendszerbe:

$$3 + \sqrt{3}\dot{y} + 2\dot{z} = 0,$$
$$3 + \sqrt{3}\dot{y} - 2 = 0.$$

Ebből az egyenletrendszerből kapjuk, hogy a P_0 pontban $\dot{y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $\dot{z} = -1$. A második egyenletrendszerbe a P_0 pont megfelelő koordinátáit, valamint az $\dot{y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ és a $\dot{z} = -1$ értékeket helyettesítve kapjuk, hogy $\ddot{y} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ és $\ddot{z} = -\frac{1}{2}$. Ha a két felület metszésvonalának vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$, akkor $\dot{\mathbf{r}}(3) = \mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ és $\ddot{\mathbf{r}}(3) = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \dfrac{1}{2}\mathbf{k}$. Ezekből:
$\mathbf{t}(3) = \frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j} - \sqrt{3}\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(3) = \frac{1}{2\sqrt{29}}(-5\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$,
$\mathbf{n}(3) = -\frac{1}{2\sqrt{203}}(17\mathbf{i} + 13\sqrt{3}\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$.

121. $\mathbf{t}(1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{b}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{n}(1) = \frac{1}{\sqrt{30}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$.

122. $\mathbf{t}(0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{k}$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{j}$.

123. Ha az x változót választjuk paraméterként, akkor a P_0 pontban az

$$x - y - x\dot{y} + z\dot{z} = 0$$
$$1 + 2y + 2x\dot{y} + 4y\dot{y} - 4z\dot{z} = 0$$

egyenletrendszer ellentmondó. Válasszuk ezért az y változót paraméterként: $\mathbf{t}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(1) = \frac{1}{\sqrt{41}}(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$,
$\mathbf{n}(1) = \frac{1}{\sqrt{205}}(-5\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$. Ha a z változót választjuk paraméterként, akkor pontosan az előzőleg kiszámított vektorok ellentettjeit kapjuk, ami azt mutatja, hogy az y és a z paraméterezés ellentétes irányú. Megjegyezzük, hogy az x változó azért nem választható paraméterként, mert az érintő egységvektor első koordinátája 0, azaz az érintő merőleges az x tengelyre.

124. $\mathbf{t}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{b}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{n}(1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

125. $\mathbf{t}(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{b}(-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k})$,
$\mathbf{n}(-1) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k})$.

126. Ha $a = 0$, akkor csak a $(0, 0, 0)$ pont közös, ezért nincs kisérő triéder. Ha $a \neq 0$, akkor $\mathbf{t}(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{b}(a) = \dfrac{|ab|}{ab\sqrt{8a^2 + b^2}}(2a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} - b\mathbf{k})$,
$\mathbf{n}(a) = -\dfrac{|ab|}{ab\sqrt{16a^2 + 2b^2}}(b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + 4a\mathbf{k})$.

127. $\mathbf{t}(a) = \dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4a\mathbf{k}}{\sqrt{16a^2 + 2}}$, $\mathbf{b}(a) = \dfrac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{n}(a) = \dfrac{-2a\mathbf{i} - 2a\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{8a^2 + 1}}$.

128. A P_0 pont rajta van mind a két felületen. Ha az y vagy a z változót választjuk paraméterként, akkor ellentmondásra jutunk. (Ez azt jelenti, hogy ha a P_0 pontban van érintő, akkor nincs olyan irányvektora, amelynek második vagy harmadik koordinátája 1. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a második és a harmadik koordináta 0.) Válasszuk az x változót paraméterként ($\dot{x} = 1$):

$$3x^2 - 2y\dot{y} = 0$$
$$2x - \dot{z} = 0.$$

Az egyenletrendszert $x = y = z = 0$ helyettesítéssel megoldva $\dot{z} = 0$ adódik; $\dot{y}$-ot azonban nem tudjuk meghatározni. Az egyenletrendszert másodszor differenciálva x szerint ($\ddot{x} = 0$):

$$3x - \dot{y}^2 - y\ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 2.$$

Az első egyenletből kapjuk, hogy a P_0 pontban $\dot{y} = 0$; $\ddot{y}$ ebből az egyenletrendszerből nem határozható meg. Az eredeti egyenletekből azonban kifejezhetők az $y = y(x)$ és a $z = z(x)$ függvények: $y = \pm\sqrt{x^3}$ $(x \geq 0)$, $z = x^2$. A térgörbét ezek szerint megadhatjuk az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} \pm \sqrt{x^3}\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ paraméteres vektoregyenletekkel. Mivel $\dot{\mathbf{r}}(0) = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}(0)}{x - 0} = \mathbf{i}$, ezért $\dot{\mathbf{r}}(x) = \mathbf{i} \pm \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ $(x \geq 0)$. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(x) - \dot{\mathbf{r}}(0)}{x - 0}$ nem létezik, így **D 17.12** szerint a 0 paraméterű pontban nincs kísérő triéder.

129. Az előző feladat megoldása szerint $\mathbf{t}(0) = \lim_{x\to+0} \mathbf{t}(x) = \mathbf{i}$, továbbá **T 17.13** alapján $\mathbf{b}(0) = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(x) \times \ddot{\mathbf{r}}(x)}{|\dot{\mathbf{r}}(x) \times \ddot{\mathbf{r}}(x)|} = \mathbf{k}$, s így $\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \times \mathbf{t}(0) = \mathbf{j}$. (Megjegyezzük, hogy csak jobb oldali határérték képezhető, mivel a feladat szerint $x \geq 0$.)

130. $\dot{\mathbf{r}}(-1)\ddot{\mathbf{r}}(-1)\dddot{\mathbf{r}}(-1) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 12^2$ és $|\dot{\mathbf{r}}(-1) \times \ddot{\mathbf{r}}(-1)|^2 = 3 \cdot 12^2$,

ezért $G(-1) = \dfrac{6\sqrt{3}}{13\sqrt{26}}$ és $T(-1) = \dfrac{1}{3}$.

131. $G(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $T(0) = -\frac{1}{3}$. **132.** $G(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{5}$, $T(\frac{\pi}{2}) = 0$.

133. Válasszuk paraméterként az x változót ($\dot{x} = 1$): $\dot{\mathbf{r}}(P_0) = [1, \frac{1}{2}, 2]$, $\ddot{\mathbf{r}}(P_0) = [0, -\frac{1}{4}, 2]$, $\dddot{\mathbf{r}}(P_0) = [0, \frac{3}{8}, 0]$ és így $G(P_0) = \dfrac{2\sqrt{101}}{21\sqrt{21}}$, $T(P_0) = -\dfrac{12}{101}$.

4. $G(P_0) = 1$, $T(P_0) = 0$.

. Térjünk át ívhosszparaméterre (l. **88.** feladatot): $\mathbf{r}(s) = \mathbf{i}\dfrac{s}{\sqrt{2}} + \mathbf{j}\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}} + \mathbf{k}\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}}$ $(s \in \mathbf{R})$. A **T 17.16** tételt alkalmazva: $G(s) = T(s) = \frac{1}{2}$.

136. A $G(t) = \dfrac{\sqrt{4t^2 + 5}}{\sqrt{(4t^2 + 1)^3}}$ és $T(t) = -\dfrac{2t}{4t^2 + 5}$ egyváltozós valós függvények mindenütt differenciálhatók, ezért a **T 11.3** alapján a torziónak a $t = 0$ paraméterű pontban maximuma van. A görbületnek a $t = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ paraméterű pontban maximuma, a $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ paraméterű pontban minimuma van.

137. $G(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$, $T(t) = -G(t)$. A $t = 0$ paraméterű pontban a görbületnek maximuma, a torziónak pedig minimuma van.

138. A görbe egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \ln x\mathbf{j} \quad (x > 0)$. $G(x) = x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. A görbületnek az $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ helyen van maximuma.

139. Minden a sugarú kör egybevágósági transzformációval az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű körbe vihető át. Az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű kör egy vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$. Ezt az egyenletet felhasználva: $G(t) = \dfrac{1}{a}$.

140. $G(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}}$. A nagytengely végpontjaiban $t = 0$, illetve $t = \pi$, s ezért ezekben a pontokban a görbület $\dfrac{a}{b^2}$. A kistengely végpontjaiban $t = \frac{\pi}{2}$, illetve $t = \frac{3\pi}{2}$, így ezekben a pontokban a görbület $\dfrac{b}{a^2}$.

141. $G(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{(a^2\,\mathrm{sh}^2 t + b^2\,\mathrm{ch}^2 t)^3}}$. Mivel a $(\pm a, 0)$ tengelypontokban $t = 0$, ezért a görbület $\dfrac{a}{b^2}$.

142. A görbe egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \dfrac{y^2}{2p}\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (p \neq 0)$;
$G(y) = \dfrac{1}{|p|\sqrt{\left(\frac{y^2}{p^2}+1\right)^3}}$. A tengelypontban $y = 0$, ezért a görbület $\dfrac{1}{|p|}$.

143. Meg lehetne mutatni, hogy a görbe minden pontjában a torzió 0 (l. **T 17.15**), ez azonban most túlságosan nehézkes. Megmutatjuk, hogy van olyan $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletű sík, hogy az $x = \dfrac{1+t}{1-t}$, $y = \dfrac{1}{1-t^2}$ és $z = \dfrac{t}{1+t}$ koordinátájú pont minden t ($\neq \pm 1$) esetén benne van a síkban, azaz

$$A(1 + 2t + t^2) + B + C(t - t^2) + D(1 - t^2) = 0.$$

Ebből az A, B, C és D együtthatókra az

$$A - C - D = 0, \quad 2A + C = 0, \quad A + B + D = 0$$

egyenletrendszert kapjuk. Az egyenletrendszer megoldása: $B = -4A$, $C = -2A$, $D = 3A$, ahol $A \neq 0$, különben tetszőleges valós szám. A görbe rajta van az $x - 4y - 2z + 3 = 0$ egyenletű síkon.

144. $4x^2 - 4x + y^2 = 4\sin^4 t - 4\sin^2 t + 4\sin^2 t\cos^2 t = 0$, s így a görbe rajta van az adott felületen. Kimutatható, hogy a görbe minden pontjában 0 a torzió, azaz **T 17.15** szerint síkgörbe. Egyszerűbben bizonyíthatjuk az utóbbi állítást, ha észrevesszük, hogy $1 = \sin^2 t + \cos^2 t = x + z$, azaz a görbe rajta van az $x + z = 1$ egyenletű síkon.

145. A $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ paraméterű pontokban párhuzamos a binormális az adott síkkal, és ezekben a pontokban a görbület $\frac{2\sqrt{282}}{11\sqrt{11}}$.

146. A görbületi sugár a $t = 1$ paraméterű pontban: $\rho(1) = \dfrac{1}{G(1)} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$. Ha a koordináta-rendszer kezdőpontja O, a simulókör középpontja K, akkor:

$$\overrightarrow{OK} = \mathbf{r}(1) + \rho(1)\mathbf{n}(1) = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}) + \frac{3}{4}(4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} + \frac{7}{4}\mathbf{j} + \frac{15}{4}\mathbf{k},$$

ezért $K\left(4, \dfrac{7}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$.

147. $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{16}{\sqrt{65}}$, $K\left(\dfrac{128}{65}, 0, \dfrac{49}{65}\right)$. **148.** $\rho(0) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $K\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, 1\right)$.

149. $\rho(P_0) = \dfrac{|a|(2+9a^2b^2)\sqrt{2+9a^2b^2}}{\sqrt{1+45a^2b^2}}$.

150. $\rho(P_0) = \dfrac{(9a^2+324b^2+4)\sqrt{9a^2+324b^2+4}}{18|a|\sqrt{a^2+36b^2+324a^2b^2}}$.

151. **T 17.19** alapján $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}(t)+\rho(t)\mathbf{n}(t)$, amiből $\mathbf{v}(t) = -\mathbf{i}\dfrac{b^2}{a}\cos t - \mathbf{j}\dfrac{b^2}{a}\sin t + \mathbf{k}bt$.

152. Mivel $\rho(t) = 2\,\mathrm{ch}^2\, t$ és $\mathbf{n}(t) = \mathbf{i}\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, t} - \mathbf{k}\,\mathrm{th}\, t$, ezért **T 17.19** szerint

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}3\,\mathrm{ch}\, t + \mathbf{j}\,\mathrm{sh}\, t + \mathbf{k}(t - \mathrm{sh}\, 2t).$$

153. Az $y = f(x)$ függvény grafikonjának egy vektoregyenlete: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Ezért:

$$\dot{\mathbf{r}}(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(x) = f''(x)\mathbf{j}, \quad \dot{\mathbf{r}}(x)\times\ddot{\mathbf{r}}(x) = f''(x)\mathbf{k},$$

amiből már **T 17.16** szerint adódik az állítás. A $\rho(x) = \dfrac{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x}$ függvénynek az $x = -\frac{\ln 2}{2}$ helyen minimuma van, s a minimum értéke $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

154. $x^2 + (y - \dfrac{1}{2})^2 + z^2 = \dfrac{1}{4}$.

155. $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = e^t + e^{-t}$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$, $\rho = (t)\dfrac{(e^t+e^{-t})^2}{\sqrt{2}}$ és $T(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$. Így a simulógömb sugara:

$$(e^t + e^{-t})^2\sqrt{\frac{1}{2} + (e^{2t} - e^{-2t})^2}.$$

A simulógömb sugarának a $t = 0$ paraméterű pontban minimuma van, a minimum értéke $2\sqrt{2}$. (Megegyezik ebben a pontban a simulókör sugarával.)
A simulógömb egy egyenlete: $(x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 8$.
A simulókör egy egyenletrendszere: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8, \quad z = 0$.

156. A 17.22 alapján: $\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$; $\quad \mathbf{v}(2)=\mathbf{i}+8\mathbf{j}+4\mathbf{k}$,

$\mathbf{a}(t)=\ddot{\mathbf{r}}(t)=4t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; $\quad \mathbf{a}(2)=8\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,

$s(t)=\int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(u)|\,du=\int_0^t (1+2u^2)du=\frac{2t^3}{3}+t$; $\quad s(2)=\frac{22}{3}$,

$v(t)=\dot{s}(t)=2t^2+1$; $\quad v(2)=9$; $\quad \rho(2)=\frac{81}{2}$,

$a_t(t)=\ddot{s}(t)=4t$; $\quad a_t(2)=8$; $\quad a_n(2)=\frac{v^2(2)}{\rho(2)}=2$,

$\mathbf{v}(2)=v(2)\mathbf{t}(2)=9\mathbf{t}(2)$, $\quad \mathbf{a}(2)=a_t(2)\mathbf{t}(2)+a_n(2)\mathbf{n}(2)=8\mathbf{t}(2)+2\mathbf{n}(2)$.

$(\mathbf{t}(2)=\frac{1}{9}(\mathbf{i}+8\mathbf{j}+4\mathbf{k})$, $\quad \mathbf{n}(2)=-\frac{1}{9}(4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}).)$

157. $\mathbf{v}(1)=\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{a}(1)=3\mathbf{i}+2\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\quad s(t)=\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}$, $\quad s(1)=\frac{3}{4}$,

$v(1)=\dot{s}(1)=2$, $\quad a_t(1)=\ddot{s}(1)=4$, $\quad a_n(1)=\sqrt{2}$, $\quad \mathbf{v}(1)=2\mathbf{t}(1)$,

$\mathbf{a}(1)=4\mathbf{t}(1)+\sqrt{2}\mathbf{n}(1)$. $(\mathbf{t}(1)=\frac{1}{2}(\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\quad \mathbf{n}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{k}).)$

158. $\mathbf{v}(2\pi)=A\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(2\pi)=-A\mathbf{i}$, $s(2\pi)=2\pi\sqrt{A^2+c^2}$, $v(2\pi)=\sqrt{A^2+c^2}$,

$a_t(2\pi)=0$, $\quad a_n(2\pi)=A$, $\quad \mathbf{v}(2\pi)=\sqrt{A^2+c^2}\mathbf{t}(2\pi)$, $\quad \mathbf{a}(2\pi)=A\mathbf{n}(2\pi)$,

$\mathbf{t}(2\pi)=\frac{1}{\sqrt{A^2+c^2}}(A\mathbf{j}+c\mathbf{k})$, $\quad \mathbf{n}(2\pi)=-\mathbf{i}$.

(Az anyagi pontnak az xy koordinátasíkra eső merőleges vetülete O középpontú A sugarú körpályán egyenletes körmozgást, a z tengelyre eső merőleges vetülete c sebességű egyenletes mozgást végez.)

159. $\mathbf{v}(2)=\mathbf{i}-\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{a}(2)=-\frac{1}{2}(\mathbf{j}+\mathbf{k})$,

$$s(t)=\int_0^t \frac{4}{(4-u)\sqrt{u}}\,du=\int_0^{\sqrt{t}} \frac{4}{(4-r^2)r}2r\,dr=2\ln\frac{2+\sqrt{t}}{2-\sqrt{t}},$$

ahol $t<4$, $\quad s(2)=4\ln(\sqrt{2}+1)$, $\quad v(2)=\sqrt{2}$, $\quad a_t(2)=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$a_n(2)=\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\quad \mathbf{v}(2)=\sqrt{2}\mathbf{t}(2)$, $\quad \mathbf{a}(2)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\mathbf{t}(2)+\sqrt{3}\mathbf{n}(2))$.

$(\mathbf{t}(2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{k})$, $\quad \mathbf{n}(2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}).)$

160. $\mathbf{v}(2)=\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{a}(2)=2\mathbf{j}$, $\quad s(2)=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$, $\quad v(2)=\sqrt{17}$,

$a_t(2)=\frac{8}{\sqrt{17}}$, $\quad a_n(2)=\frac{2}{\sqrt{17}}$, $\quad \mathbf{v}(2)=\sqrt{17}\mathbf{t}(2)$,

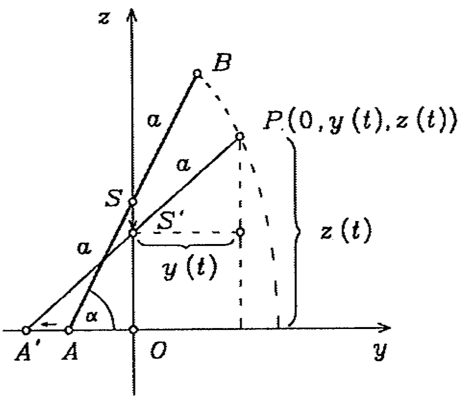
$\mathbf{a}(2)=\frac{2}{\sqrt{17}}(4\mathbf{t}(2)+\mathbf{n}(2))$.$(\mathbf{t}(2)=\frac{1}{\sqrt{17}}(\mathbf{i}+4\mathbf{k})$, $\quad \mathbf{n}(2)=\frac{1}{\sqrt{17}}(-4\mathbf{i}+\mathbf{j}).)$

161. $\mathbf{v}(1)=\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{a}(1)=\frac{3}{2}\mathbf{j}$, $\quad s(1)=\frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)$, $\quad v(1)=\sqrt{10}$,

$a_t(1)=\frac{9}{2\sqrt{10}}$, $\quad a_n(1)=\frac{3}{2\sqrt{10}}$, $\quad \mathbf{v}(1)=\sqrt{10}\mathbf{t}(1)$,

$\mathbf{a}(1)=\frac{3}{2\sqrt{10}}(3\mathbf{t}(1)+\mathbf{n}(1))$. $\quad (\mathbf{t}(1)=\frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i}+3\mathbf{k})$, $\quad \mathbf{n}(1)=\frac{1}{\sqrt{10}}(-3\mathbf{i}+\mathbf{j}).)$

162. Vegyük fel a térbeli derékszögű koordináta-rendszert az ábrán látható módon, azaz legyen az xy koordinátasík az S sík, a rúd S tömegközéppontja a z tengelyen és a rúd A végpontja az y tengelyen. Mivel a $t = 0$ időpillanatban a rúd nem volt mozgásban, és a nehézségi erőn kívül rá más erő nem hat, ezért a rúd csak az yz síkban, az S tömegközéppont pedig csak a z tengelyen mozoghat. Legyen $P(0, y(t), z(t))$ a B végpont pályájának az a pontja, ahol ez a végpont a t időpillanatban van, és jelölje S' a rúd tömegközéppontjának t időpillanatbeli helyét. Elemi geometriai meggondolásokból adódik, hogy a B végpont az $\dfrac{y^2(t)}{a^2} + \dfrac{z^2(t)}{4a^2} = 1$ egyenletű ellipszisen mozog. A vektoregyenlet felírásához vegyük figyelembe, hogy a nehézségi erő hatása miatt az S tömegközéppont elmozdulása t időegység alatt $SS' = \dfrac{gt^2}{2}$, ahol g a nehézségi gyorsulás. Figyelembe véve, hogy



$SO = a\sin\alpha$, $z(t) = 2S'O$ és $y(t) = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{z(t)}{2}\right)^2}$, megkapjuk a $z(t)$ és $y(t)$ koordinátafüggvényeket, amelyekből a vektoregyenlet azonnal felírható:

$$\mathbf{r} = \sqrt{a^2 - \left(a\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)^2}\,\mathbf{j} + (2a\sin\alpha - gt^2)\mathbf{k}.$$

Rövidebben írva:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sqrt{4a^2 - z^2(t)}}{2}\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

A sebességvektor: $\mathbf{v}(t) = \dfrac{z(t)gt}{\sqrt{4a^2 - z^2(t)}}\mathbf{j} - 2gt\mathbf{k}$,

a gyorsulásvektor: $\mathbf{a}(t) = \dfrac{(\dot z(t)gt + z(t)g)(4a^2 - z^2(t)) + z^2(t)\dot z(t)gt}{\sqrt{(4a^2 - z^2(t))^3}}\mathbf{j} - 2g\mathbf{k}$,

a pályamenti sebesség: $v(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)| = gt\sqrt{\dfrac{z^2(t)}{4a^2 - z^2(t)} + 4}$, a pályamenti gyorsulás: $a_t(t) = \dot v(t) = g\sqrt{\dfrac{z^2(t)}{4a^2 - z^2(t)} + 4 + \dfrac{4a^2 z(t)\dot z(t)gt}{\sqrt{(16a^2 - 3z^2(t))(4a^2 - z^2(t))^3}}}$.

A B végpont S síkra érkezésének t_0 időpontja a $z(t_0) = 2a\sin\alpha - gt_0^2 = 0$ egyenletből számítható: $t_0 = \sqrt{\dfrac{2a\sin\alpha}{g}}$. A t_0 időpontbeli pályamenti sebesség,

gyorsulás és görbületi sugár: $v(t_0) = 2\sqrt{2ag\sin\alpha}$, $a_t(t_0) = 2g$, $\rho = 4a$.
A t_0-beli gyorsulásvektor előállítása: $\mathbf{a}(t_0) = 2g\mathbf{t}(t_0) + 2g\sin\alpha\mathbf{n}(t_0)$,
ahol $\mathbf{t}(t_0) = -\mathbf{k}$ és $\mathbf{n}(t_0) = -\mathbf{j}$.

163. A koordináta-rendszert ugyanúgy vegyük fel, mint az előző feladat megoldásában. Az A pont pályájának vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{j}\sqrt{a^2 - \left(a\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)^2}, \quad (0 \le t \le t_0 = \sqrt{\frac{2a\sin\alpha}{g}}).$$

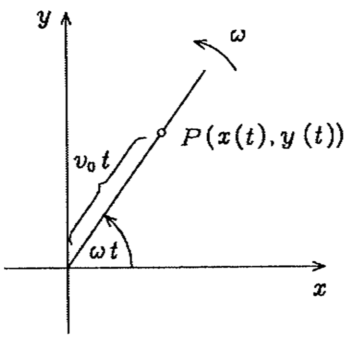
A t_0-beli pályamenti sebesség és gyorsulás: $v(t_0) = 0$, $a_t(t_0) = -g\sin\alpha$.

164. $\omega(1) = \dfrac{\mathbf{r}(1)\times\dot{\mathbf{r}}(1)}{|\mathbf{r}(1)|^2} = \dfrac{1}{21}(11\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

165. $\omega(1) = \dfrac{-e\mathbf{i} + e^3(2+e)\mathbf{j} - e^2\mathbf{k}}{2e^4 + 2e^3 + e^2 + 1}$.

166. $\dfrac{1}{1+a^2}(-a\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

167. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszert vegyük fel az ábra szerint. A mozgó P pont tetszőleges t időpillanatbeli helyének koordinátáit $x(t)$-vel és $y(t)$-vel jelöltük. A $t = 0$ időpillanatban a félegyenes az x tengely pozitív felével esett egybe. A P pont pályájának vektoregyenlete:
$\mathbf{r} = \mathbf{i}v_0t\cos\omega t + \mathbf{j}v_0t\sin\omega t \quad (t \ge 0)$.
A pályamenti sebesség és gyorsulás:
$v(t) = v_0\sqrt{1+\omega^2t^2}$, $a_t(t) = \dfrac{v_0\omega^2t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}$.



168. $|\mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{r}}(t)| = 2\sqrt{2}t^5(t^4+1)$ és $|\mathbf{r}(t)|^2 = t^4(t^4+1)^2$ miatt
$\omega(t) = \dfrac{|\mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{r}}(t)|}{|\mathbf{r}(t)|^2} = \dfrac{2\sqrt{2}t}{t^4+1}$. (Megjegyezzük, hogy ez a $t = 0$ időpillanatban is megadja a szögsebesség értékét, annak ellenére, hogy $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$.) A szöggyorsulás: $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \dfrac{2\sqrt{2}(1-3t^4)}{(t^4+1)^2}$. A szögsebesség a legkisebb értéket a 0, a legnagyobb értéket az $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ időpillanatban, a szöggyorsulás pedig a legkisebb értéket a $\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, a legnagyobb értéket a 0 időpillanatban veszi fel.

169. A P_1, P_2, P_3 pontok akkor és csak akkor esnek egy egyenesre, ha például a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és a $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektorok kollineárisak. Az adott három pont nem esik egy egyenesre. Nyilvánvaló, hogy egy P pont akkor és csak akkor van rajta a P_1, P_2, P_3 pontok által meghatározott síkon, ha $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u\overrightarrow{P_1P_2} + v\overrightarrow{P_1P_3}$, ahol $u, v \in \mathbf{R}$. Ennek alapján a sík egy paraméteres vektoregyenlete:

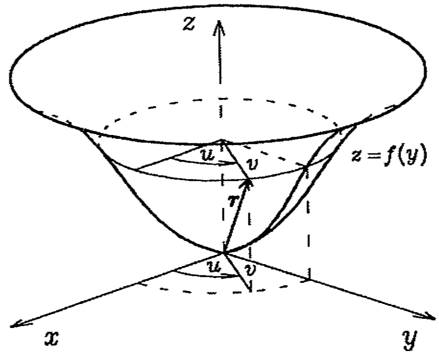
$$\mathbf{r} = (2 - u - 2v)\mathbf{i} + (1 + 4u + 3v)\mathbf{j} + (9 + u - 9v)\mathbf{k}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

170. $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, $u, v \in \mathbf{R}$.

171. $\mathbf{r} = (3 + u + 2v)\mathbf{i} + (4u - 1)\mathbf{j} + (2 - 7u)\mathbf{k}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$

172. $\mathbf{r} = (5u - 2v)\mathbf{i} + (2 - 3u - v)\mathbf{j} + (4u + 5v - 1)\mathbf{k}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$

173. Az ábra alapján belátható, hogy a $z = f(y)$ függvény z tengely körüli megforgatásakor kapott felület z-nívóvonalai (l. **D 8.2**) az



$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = f(v)$$

($u \in [0, 2\pi)$, $v \in \operatorname{Dom} f$) egyenletrendszerű körök ($v = 0$ esetben a nívóvonal a $(0, 0, f(0))$ pont), amiből azonnal adódik a felület

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}f(v),$$

($u \in [0, 2\pi), v \in \operatorname{Dom} f$) paraméteres vektoregyenlete. Mivel $\sqrt{x^2 + y^2} = |v|$, ezért ebből az egyenletből közvetlenül adódik a második egyenlet, amiből pedig leolvasható a

$$z = \begin{cases} f(\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{ha } \sqrt{x^2 + y^2} \in \operatorname{Dom} f, \\ f(-\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{ha } -\sqrt{x^2 + y^2} \in \operatorname{Dom} f \end{cases}$$

vektormentes egyenlet.

Ha a grafikont az y tengely körül forgatjuk meg, akkor a kapott felület egy paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}f(v)\cos u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}f(v)\sin u, \quad (u \in [0, 2\pi), \ v \in \operatorname{Dom} f),$$

amiből $x^2 + z^2 = f^2(v)$ és $v = y$ miatt:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y \pm \mathbf{k}\sqrt{f^2(y) - x^2}$$

és $z = \pm\sqrt{f^2(y) - x^2} \quad (y \in \operatorname{Dom} f)$.

A megfelelő egyenletek, ha az $y = f(x)$ függvényt forgatjuk meg az y tengely körül:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}f(v) + \mathbf{k}v\sin u \quad (u \in [0, 2\pi), \ v \in \operatorname{Dom} f),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{k}z + \mathbf{j}\begin{cases} f(\sqrt{x^2 + z^2}), & \text{ha } \sqrt{x^2 + z^2} \in \operatorname{Dom} f, \\ f(-\sqrt{x^2 + z^2}), & \text{ha } -\sqrt{x^2 + z^2} \in \operatorname{Dom} f \end{cases}$$

és $y = \begin{cases} f(\sqrt{x^2 + z^2}), & \text{ha } \sqrt{x^2 + z^2} \in \operatorname{Dom} f, \\ f(-\sqrt{x^2 + z^2}), & \text{ha } -\sqrt{x^2 + z^2} \in \operatorname{Dom} f. \end{cases}$

Ha az $y = f(x)$ függvényt az x tengely körül forgatjuk meg, akkor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v + \mathbf{j}f(v)\cos u + \mathbf{k}f(v)\sin u \quad (u \in [0, 2\pi), \ v \in \operatorname{Dom} f),$$

amiből $y^2 + z^2 = f^2(v)$ és $v = x$ miatt:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x \pm \mathbf{j}\sqrt{f^2(x) - z^2} + \mathbf{k}z \quad \text{és} \quad y = \pm\sqrt{f^2(x) - z^2} \quad (x \in \operatorname{Dom} f),$$

vagy

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{k}y \pm \mathbf{k}\sqrt{f^2(x) - y^2} \quad \text{és} \quad z = \pm\sqrt{f^2(x) - y^2} \quad (x \in \operatorname{Dom} f).$$

174. A függvény grafikonját a z tengely körül megforgatva, a keletkezett felület két paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}v^2 \quad (0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v);$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}.$$

Egy vektormentes egyenlete: $z = x^2 + y^2$ (**forgási paraboloid**, l. 8.84 feladatot). A függvény grafikonját az y tengely körül megforgatva a következő egyenletek írhatók fel:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v^2\cos u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}v^2\sin u \quad (0 \le u < 2\pi);$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \mathbf{j}y \pm \mathbf{k}\sqrt{y^4 - x^2}; \quad z = \pm\sqrt{y^4 - x^2}.$$

175. A z tengely körüli forgatáskor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}\ln v, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

és $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ $\quad (x^2 + y^2 \neq 0)$. Az x tengely körüli forgatáskor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v + \mathbf{j}\ln v\cos u + \mathbf{k}\ln v\sin u \quad (0 \le u < 2\pi);$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \pm \sqrt{\ln^2 x - y^2}\mathbf{k}; \quad z = \pm\sqrt{\ln^2 x - y^2}.$$

176. A z tengely körüli forgatáskor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}e^{-v^2} \quad (0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + e^{-(x^2+y^2)}\mathbf{k}; \quad z = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Az y tengely körüli forgatáskor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}e^{-v^2}\cos u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}e^{-v^2}\sin u \quad (0 \le u < 2\pi),$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \pm \sqrt{e^{-2y^2} - x^2}\mathbf{k}; \quad z = \pm\sqrt{e^{-2y^2} - x^2}.$$

177. Az y tengely körüli forgatáskor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}\operatorname{ch} v + \mathbf{k}v\sin u \quad (0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \operatorname{ch}\sqrt{x^2 + z^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad y = \operatorname{ch}\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Az x tengely körüli forgatáskor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v + \mathbf{j}\operatorname{ch} v\cos u + \mathbf{k}\operatorname{ch} v\sin u \quad (0 \le u < 2\pi);$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \pm \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - y^2}\mathbf{k}; \quad z = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - y^2},$$

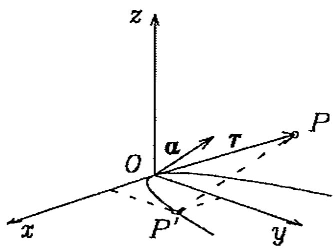
vagy

$$\mathbf{r} = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - z^2}\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad y = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - z^2}.$$

178. A parabola az a és a b helyen metszi az x tengelyt. A **173.** feladat szerint egy paraméteres vektoregyenlet a következő:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}(-v^2 + (a+b)v - ab) + \mathbf{k}v\sin u \quad (0 \le u < 2\pi,\ a \le v \le b).$$

179. Legyen P a felület egy tetszőleges pontja. A P ponton átmenő és $\mathbf{a}$-val párhuzamos egyenes az $y = x^2$ egyenletű parabolát valamely P' pontban metszi. Bármely P felületi ponthoz pontosan egy olyan valós szám adható meg, hogy $\overrightarrow{P'P} = v\mathbf{a}$, ezért $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + v\mathbf{a}$. Legyen továbbá a P' pont abszcisszája $x = u$. Paraméterekként az u és v valós számokat választjuk. Mivel $\overrightarrow{OP'} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{k}$, ezért a (**parabolikus henger**)felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (u-v)\mathbf{i} + (u^2+v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.

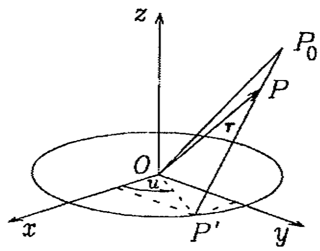


180. Hasonlóan járhatunk el, mint az előbbi feladat megoldásánál. Legyen $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u \quad (0 \le u < 2\pi)$ (az 1 sugarú, origó középpontú kör egy paraméteres vektoregyenlete, l. a **139.** feladat megoldását!). A (**körhenger**)felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (\cos u + 2v)\mathbf{i} + (\sin u - v)\mathbf{j} + 3v\mathbf{k}$.

181. Hasonlóan járhatunk el, mint a **179.** feladat megoldásánál. Legyen $\overrightarrow{OP'} = \pm\mathbf{i}2\operatorname{ch} u + \mathbf{j}2\operatorname{sh} u$ (l. a **141.** feladatot!). A (**hiperbolikus henger**)felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (\pm 2\operatorname{ch} u - 3v)\mathbf{i} + (2\operatorname{sh} u + 2v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.

182. Hasonlóan járhatunk el, mint a **179.** feladat megoldásánál. Legyen $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}\sin u \quad (0 \le u < 2\pi)$ (l. a **140.** feladatot!). Az (**elliptikus henger**)felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}(\sin u + v) + \mathbf{k}2v$.

183. A P_0 ponton és a felület tetszőleges P pontján átmenő egyenes az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a P' pontban metszi. Állítsuk elő az $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OP'}$ és $\overrightarrow{OP_0}$ vektorok lineáris kombinációjaként: $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (1-v)\overrightarrow{OP'} + v\overrightarrow{OP_0}$ (l. a **4.44** feladatot!). Mivel
$\overrightarrow{OP'} = \mathbf{i}5\cos u + \mathbf{j}5\sin u \quad (0 \le u < 2\pi)$
(l. a **139.** feladatot megoldását!), ezért a felület egy paraméteres vektoregyenlete:
$\mathbf{r} = (5\cos u - 5v\cos u - 2v)\mathbf{i} + (5\sin u - 5v\sin u + 3v)\mathbf{j} + 4v\mathbf{k}$.



184. Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladat megoldásában. Mivel $\overrightarrow{OP'} = u\mathbf{i} + (u^2-4)\mathbf{j}$, ezért a (**parabolikus kúp**)felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (u - uv + 4v)\mathbf{i} + (u^2 - u^2v + 2v - 4)\mathbf{j} + 3v\mathbf{k}$.

185. Úgy járunk el, mint a **183.** feladat megoldásában. A felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (1-v)u\mathbf{i} + (1-v)(u^3+2u^2-u-2)\mathbf{j} + 3v\mathbf{k}$.

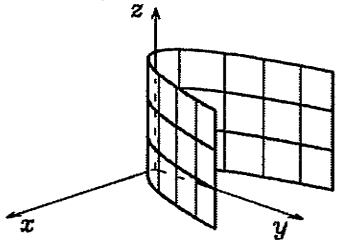
186. Hasonlóan járhatunk el, mint a **183.** feladat megoldásában. A (**hiperbolikus kúp**)felület egy paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = \pm\mathbf{i}(1-v)\operatorname{ch} u + \mathbf{j}(1-v)\operatorname{sh} u + \mathbf{k}5v.$$

(L. még a **141.** és a **181.** feladatok megoldását!)

187. $x^2+y^2=z$.

188. $x^2+y^2-a^2=0$.



189. $c^2x^2+c^2y^2-z^2=0$.

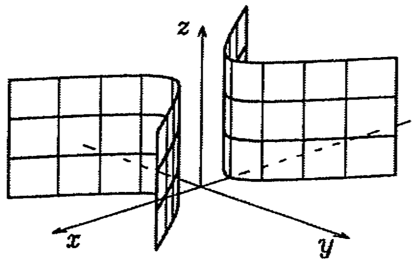
190. $y=x^2$ (l. ábra).

191. $\dfrac{x}{a}=\cos u\sin v,\quad \dfrac{y}{b}=\sin u\sin v,$

$\dfrac{z}{c}=\cos v$ miatt: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$.

192. $x^2+y^2-z^2-1=0$.

193. $\dfrac{x^2}{2a^2}-\dfrac{y^2}{2b^2}=z$.



194. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-a=0$.

195. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ (l. ábra).

196. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}-1=0$.

197. $\dfrac{z^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}-1=0$.

198. Tekintsük x-et és y-t paramétereknek: $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.

199. $\mathbf{r}=\mathbf{i}v\cos u+\mathbf{j}v\sin u+\mathbf{k}v;\quad (0\le u<2\pi)$.

200. $\mathbf{r}=\mathbf{i}av\cos u+\mathbf{j}bv\sin u+\mathbf{k}v^2\quad (0\le u<2\pi)$.

201. $\mathbf{r}=\mathbf{i}a\operatorname{ch} v\cos u+\mathbf{j}b\operatorname{ch} v\sin u+\mathbf{k}c\operatorname{sh} v;\quad (0\le u<2\pi)$.

202. $\mathbf{r}=\mathbf{i}a\operatorname{ch} v+\mathbf{j}b\operatorname{sh} v\cos u+\mathbf{k}c\operatorname{sh} v\sin u;\quad (0\le u<2\pi)$.

203. $\mathbf{r}=\mathbf{i}av\cos u+\mathbf{j}bv\sin u+\mathbf{k}cv:\quad (0\le u<2\pi)$.

204. $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)+u\dot{\mathbf{r}}(t)$ (l. **D 17.6**), azaz a felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}=(t+u)\mathbf{i}+(t^2+2tu)\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

205. $\mathbf{r}=\mathbf{i}(\cos t-u\sin t)+\mathbf{j}(\sin t+u\cos t)+\mathbf{k}(t+u)$.

206. $\mathbf{r}=\mathbf{i}e^t(\cos t+u(\cos t-\sin t))+\mathbf{j}e^t(\sin t+u(\sin t+\cos t))+\mathbf{k}e^t(1+u)$.

207. A felületi görbe egy paraméteres vektoregyenlete (**D 17.27**): $\tilde{\mathbf{r}}=\mathbf{i}t\cos\ln t+\mathbf{j}t\sin\ln t+\mathbf{k}2t$, ezért **T 17.7** szerint: $s=\displaystyle\int_\pi^{2\pi}|\dot{\tilde{\mathbf{r}}}(t)|\,dt=\sqrt{6}\pi$.

208. Az előző feladat megoldása szerint: $s=\sqrt{3}(e-1)$.

209. A **207.** feladat megoldása szerint: $s=\dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^1(2t^2+9)\,dt=\dfrac{29}{27}$.

210. Az u_0-hoz tartozó u-paramétervonalat meghatározó függvény t szerinti deriváltja: $\dot{\mathbf{r}}(u_0,t)=a(\mathbf{i}\cos t\cos u_0+\mathbf{j}\cos t\sin u_0-\mathbf{k}\sin t)$.

Az v_0-hoz tartozó v-paramétervonalat meghatározó függvény t szerinti deriváltja: $\dot{\mathbf{r}}(t,v_0) = a(-\mathbf{i}\sin v_0 \sin t + \mathbf{j}\sin v_0 \cos t)$.

Az u_0-hoz tartozó u-paramétervonal hossza: $s(u_0) = \int_0^{\pi} |\dot{\mathbf{r}}(u_0,t)|\,dt = a\pi$.

A v-paramétervonal hossza $v = v_0$ esetén: $s(v_0) = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t,v_0)|\,dt = 2a\pi \sin v_0$.

211. Az $u_0 = 2, v_0 = 1$ paraméterű pont: $P_0(3,1,2)$. Az u-paramétervonal egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (2+t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; P_0-beli érintőjének egy egyenletrendszere: $x - 3 = 1 - y = \frac{z-2}{2}$. A v-paramétervonal egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = (t+1)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; P_0-beli érintőjének egy egyenletrendszere: $x - 3 = y - 1 = z - 2$.

212. A u-paramétervonal érintőjének egy paraméteres egyenletrendszere az adott pontban: $x = \sqrt{2}(1-a)$, $\quad y = \sqrt{2}(1+a)$, $\quad z = 2 \quad (a \in \mathbf{R})$.
Az v-paramétervonal érintőjének egy paraméteres egyenletrendszere az adott pontban: $x = \sqrt{2}\left(1 + \frac{b}{2}\right)$, $\quad y = \sqrt{2}\left(1 + \frac{b}{2}\right)$, $\quad z = 2 + b \quad (b \in \mathbf{R})$.

213. Az u-paramétervonal érintőjének egy egyenletrendszere:

$$\frac{x+7}{8} = \frac{4-y}{4} = z + 3.$$

A v-paramétervonal érintőjének egy egyenletrendszere:

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y-4}{4} = -\frac{z+3}{5}.$$

214. Az $\mathbf{r_u}$ és $\mathbf{r_v}$ akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $\mathbf{r_u}(u,v) \times \mathbf{r_v}(u,v) = \mathbf{0}$, azaz, a vektori szorzat harmadik koordinátája miatt, ha $u = \pm v$.

215. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg; $u = 0$ vagy $v = 0$.

216. $\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{r_u}(1,2)\mathbf{r_v}(1,2)|}{|\mathbf{r_u}(1,2)||\mathbf{r_v}(1,2)|} = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

217. $\frac{\pi}{2}$.

218. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{33}}$.

219. $\mathbf{r_u}(u,v) = 2u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 4u^3\mathbf{k}$ és $\mathbf{r_v}(u,v) = -4v\mathbf{i} + (u - 3v^2)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, ezért $\mathbf{r_u}(-1,1) \times \mathbf{r_v}(-1,1) = 6(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. A **T 17.29** szerint az érintősík egyenlete a $(-1,1)$ paraméterű $P_0(-1,-2,-1)$ pontban: $-3x+2y+2z+3 = 0$. A felületi normális egy egyenletrendszere a P_0 pontban:

$$-\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

220. Az érintősík egyenlete: $z = 3x$; a felületi normális egy egyenletrendszere: $x = -3z$, $y = 2$.

221. $2x + \sqrt{6}y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 2 = 0$ és $\dfrac{4x-\pi}{2} = \dfrac{4y-\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

222. $3x - 2z + 3 = 0$ és $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{3-z}{2}$, $y = -1$.

223. $x + y = \sqrt{2}$ és $x = y$, $z = 0$.

224. A $(0, 0)$ paraméterű pontban $\mathbf{r_v}(0,0) = \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{r_u}(0,0) \times \mathbf{r_v}(0,0) = \mathbf{0}$. Ebből azonban nem következik, hogy a felület $\mathbf{r}(0,0)$ helyvektorú $P_0(0,0,1)$ pontjában nincs érintősík. Adjuk meg a felületet egy másik vektoregyenlettel. $x = u\cos v$, $y = u \sin v$ és $z = e^{-u^2}$ miatt $x^2 + y^2 = u^2$ és $z = e^{-x^2-y^2}$. Az x és y koordinátákat választva paraméternek, a felület

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}e^{-x^2-y^2}$$

paraméteres vektoregyenletét kapjuk. Ha $u = v = 0$, akkor $x = y = 0$. Ebben az esetben $\mathbf{r_x}(0,0) \times \mathbf{r_y}(0,0) = \mathbf{k}$. A P_0 pontban tehát létezik érintősík, amelynek egyenlete: $z = 1$. Nyilvánvaló, hogy a felületi normális az $x = 0$, $y = 0$ egyenletrendszerű z tengely.

225. A P_0 pont rajta van a felületen. Mivel $z'_x(2,1) = 4$, $z'_y(2,1) = 8$, ezért **T 17.31** szerint az érintősík egyenlete: $4x + 8y - z = 10$. A felületi normális egy egyenletrendszere: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{8} = 6 - z$.

226. $-4x + y + z + 3 = 0$ és $\dfrac{2-x}{4} = y - 2 = z - 3$.

227. $3x + 12y - z = 18$ és $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{12} = 9 - z$.

228. A P_0 pont rajta van a felületen. $f(x,y,z) = x^2y + z^2 + yz$, $f'_x(P_0) = 0$, $f'_y(P_0) = 1$ és $f'_z(P_0) = 1$, ezért **T 17.32** miatt az érintősík egyenlete: $y + z = 0$. A felületi normális egy egyenletrendszere: $x = 0$, $z = y + 2$.

229. $3x + 4y + 12z = 169$ és $4x = 3y = z$.

230. $x + y + 3z = 9$ és $3x - 1 = 3y - 4 = z$.

231. $x + y = 2z$ és $2x = 2y = 3 - z$.

232. $x + y - 4z = 0$ és $4x = 4y = 9 - z$.

233. $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$ és $\dfrac{a^2}{x_0}(x - x_0) = \dfrac{b^2}{y_0}(y - y_0) = \dfrac{c^2}{z_0}(z - z_0)$.

234. $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = \dfrac{z + z_0}{2}$ és $x = x_0 + \dfrac{2x_0}{a^2}t$, $y = y_0 + \dfrac{2y_0}{b^2}t$, $z = z_0 - t$ $(t \in \mathbf{R})$.

235. $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$ és $\dfrac{a^2}{x_0}(x - x_0) = \dfrac{b^2}{y_0}(y_0 - y) = \dfrac{c^2}{z_0}(z_0 - z)$.

236. Legyen $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a t_0 paraméterhez tartozó pont és helyvektora $\mathbf{r}(t_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, azaz $x_0 = e^{t_0}\cos t_0$, $y_0 = e^{t_0}\sin t_0$, $z_0 = 2t_0$. A P_0 pont rajta van a felületen, mert $x_0^2 + y_0^2 = e^{z_0}$. Megmutatjuk, hogy a térgörbe P_0 pontjához tartozó binormálisa (**D 17.12**) egybeesik a felület P_0 pontbeli felületi normálisával. Ehhez **T 17.13** szerint elegendő megmutatni, hogy az $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ vektor párhuzamos az érintősík $\mathbf{n}(P_0)$ normálvektorával. A **T 17.32** szerint $\mathbf{n}(P_0) = [2x_0, 2y_0, -e^{z_0}]$. Mivel $\dot{x} = e^t(\cos t - \sin t) = x - y$, $\dot{y} = e^t(\cos t + \sin t) = x + y$, $\dot{z} = 2$, $\ddot{x} = -2e^t \sin t = -2y$, $\ddot{y} = 2e^t\cos t = 2x$ és $\ddot{z} = 0$, ezért $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) = -4x_0\mathbf{i} - 4y_0\mathbf{j} + 2e^{z_0}\mathbf{k} = -2\mathbf{n}(P_0)$.

237. A sík egy normálvektora: $\mathbf{n} = [1, 4, 6]$. A felület $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjában **T 17.32** szerint az érintősík egy normálvektora: $\mathbf{n}(P_0) = [2x_0, 4y_0, 6z_0]$. A

P_0 pontban az érintősík akkor és csak akkor párhuzamos az adott síkkal, ha van olyan k valós szám, hogy $\mathbf{n}(P_0) = k\mathbf{n}$, amiből $y_0 = z_0 = 2x_0$. De $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$, s így $x_0 = \pm 1$. Az $x + 4y + 6z = \pm 21$ egyenletű síkok párhuzamosak az adott síkkal.

238. $2x + 3y - 4z = \frac{13}{16}$.

239. A **T 17.31** szerint a felület $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontbeli érintősíkjának egy normálvektora $\mathbf{n}(P_0) = [-2x_0, -2y_0, 1]$. Az $x + y + z = 0$ egyenletű sík egy normálvektora $\mathbf{n} = [1, 1, 1]$. A P_0 pontbeli érintősík akkor és csak akkor merőleges az adott síkra, ha $\mathbf{n}(P_0)\mathbf{n} = 0$. Végtelen sok sík elégíti ki a feladat feltételeit, ezek egyenlete: $2x_0x + (1 - 2x_0)y - z + y_0^2 - x_0^2 + 2x_0y_0 - y_0 = 0$, ahol x_0 és y_0 bármilyen valós szám lehet.

240. Nincs ilyen pont.

241. A **T 17.32** szerint a felület $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontbeli érintősíkjának egy normálvektora $\mathbf{n}(P_0) = [2x_0, y_0, 4z_0]$. Az $2x - 2y + z = 0$ egyenletű sík egy normálvektora $\mathbf{n} = [2, -2, 1]$. A P_0 pontbeli érintősík akkor és csak akkor merőleges az adott síkra, ha $\mathbf{n}(P_0)\mathbf{n} = 0$, azaz $2x_0 - y_0 + 2z_0 = 0$. A P_0 pontbeli érintősík egyenlete: $2x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + 4z_0(z - z_0) = 0$. Mivel $2x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 = 6$, ezért az érintősík egyenlete $2x_0x + y_0y + 4z_0z = 6$ alakra hozható. De a $P_0(4, -1, 1)$ pont rajta van az érintősíkon, ezért $8x_0 - y_0 + 4z_0 = 0$. Ebből, valamint az $2x_0 - y_0 + 2z_0 = 0$ és az $2x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 = 6$ egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy két olyan pont van az ellipszoidon, amely eleget tesz a feltételeknek: $P_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -1\right)$ és $P_2\left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$. Az érintősíkok egyenlete: $x - 2y - 6z = 9$ és $-x + 2y + 6z = 9$.

242. Nincs ilyen pont.

243. Ha $f(x, y, z) = (y + z)^2 + (z - x)^2 - 16$, akkor $f'_x = 2(x - z)$, $f'_y = f'_z = 2(y + z)$. Az $[f'_x, f'_y, f'_z]$ normálvektornak (l. **T 17.32**) merőlegesnek kell lenni az $\mathbf{i}$ vektorra, azaz $x = z$. Ezt helyettesítve az $f(x, y, x) = 0$ egyenletbe: $z = -y \pm 4$. A keresett pont koordinátái: $x = z = -y \pm 4$.

244. Ha az érintési pont $P_0(x_0, y_0, z_0)$, akkor $x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 = 1$ és $x_0 + 2y_0 + az_0 + 1 = 0$. A felület P_0 pontbeli érintősíkjának egy normálvektora a **T 17.32** szerint: $\mathbf{n}(P_0) = [x_0, -y_0, z_0]$, a sík egy normálvektora $\mathbf{n} = [1, 2, a]$. A két sík akkor és csak akkor esik egybe, ha van olyan k valós szám, hogy $\mathbf{n}(P_0) = k\mathbf{n}$. Ebből $y_0 = -2x_0$, $z_0 = ax_0$. Ezeket az első két egyenletbe helyettesítve, és a kapott egyenletrendszert megoldva $a = \pm 2$ és $x_0 = -1$ adódik. Az érintési pontok: $P_1(-1, 2, -2)$, $P_2(-1, 2, 2)$.

245. $\cos\alpha = \dfrac{479}{27\sqrt{609}}$.

246. $x + y + z = 3$ (l. a **237.** feladat megoldását!).

247. A $(-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ pontban minimuma van (l. **T 15.8**).

Ha az $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \mathbf{r}_u{}^2\mathbf{r}_v - (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)^2$ egyenlőséggel számolunk (**T 4.19**), akkor elemi úton is könnyen megoldható a feladat:

$$\mathbf{r}_u{}^2\mathbf{r}_v - (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)^2 = (4u^2 + 4u + 2)(4v^2 + 4v + 2) - 1 =$$

$$((2u+1)^2+1)((2v+1)^2+1)-1;$$

minimum van, ha $u = v = -\frac{1}{2}$.

248. Az $\mathbf{r}(u,v)$ helyvektorú pontban az érintősík egyenlete:

$$x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u = 1.$$

Az érintősík tengelymetszetei:

$$\frac{1}{\sin u \cos v}, \ \frac{1}{\sin u \sin v}, \ \frac{1}{\cos u}.$$

A tetraéder térfogata:

$$V(u,v) = \frac{1}{6 \sin^2 u \cos u \sin v \cos v}$$

(l. a **4.122.** feladatot!). A $V(u,v)$ függvény pontosan ott veszi fel a legkisebb értéket, ahol az $f(u,v) = \sin^2 u \cos u \sin v \cos v$ függvény a legnagyobbat, azaz a $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ pontban.

249. A **173.** feladat megoldása szerint a forgásfelület egyenlete: $y^2+z^2 = 64x^4$. A P_0 pont rajta van a felületen. Az érintősík egyenlete: $32x - y - \sqrt{3}z = 16$; a felületi normális egy egyenletrendszere: $\dfrac{x-1}{32} = 4 - y = \dfrac{4\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}}$.

250. A felület $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontjában az érintősík egyenlete:

$$y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3a^3.$$

Az érintősík a tengelyeket a

$$\left(\frac{3a^3}{y_0z_0}, 0, 0\right), \ \left(0, \frac{3a^3}{x_0z_0}, 0\right), \ \left(0, 0, \frac{3a^3}{x_0y_0}\right)$$

pontokban metszi; $V = \dfrac{(3a^3)^3}{6(x_0y_0z_0)^2} = \dfrac{9a^3}{2}$.

251. A felület $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $(x_0,y_0,z_0 \neq 0)$ pontjához tartozó érintősík egyenlete: $\dfrac{x}{\sqrt{x_0}} + \dfrac{y}{\sqrt{y_0}} + \dfrac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}$. A tengelymetszetek rendre: $\sqrt{x_0a}$, $\sqrt{y_0a}$, $\sqrt{z_0a}$, ezért $\sqrt{x_0a} + \sqrt{y_0a} + \sqrt{z_0a} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$.

252. Az $x_0^{n-1}x + y_0^{n-1}y + z_0^{n-1}z = a^n$ egyenletű érintősík a tengelyekből rendre az

$$OA = \frac{a^n}{x_0^{n-1}}, \quad OB = \frac{a^n}{y_0^{n-1}}, \quad OC = \frac{a^n}{z_0^{n-1}}$$

tengelymetszeteket vágja le. Ebből

$$\frac{x_0}{OA} + \frac{y_0}{OB} + \frac{z_0}{OC} = \frac{x_0^n}{a^n} + \frac{y_0^n}{a^n} + \frac{z_0^n}{a^n} = 1.$$

253. $\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v} = -\mathbf{i}abv \sin u + \mathbf{j}abv \cos u - \mathbf{k}a^2v$. Ha $v = 0$, akkor $\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v} = \mathbf{0}$. Ha $v \neq 0$, akkor $\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}$ párhuzamos a $-\mathbf{i}b \sin u + \mathbf{j}b \cos u - \mathbf{k}a$ vektorral. Az $\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}$ és $\mathbf{k}$ vektorok φ hajlásszögére:

$$\cos\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ami független a felület pontjának megválasztásától.

254. A felület P_0 pontján áthaladó felületi normális egy paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + \frac{2ax_0t}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \quad y = y_0 + \frac{2ay_0t}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \quad z = z_0 - 2z_0t.$$

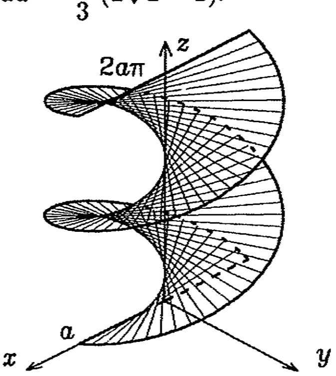
A Q_0 döféspont esetében $t = \frac{1}{2}$, ezért a P_0' merőleges vetületre:

$\overrightarrow{P_0'Q_0} = \dfrac{a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j})$, amelyből $|\overrightarrow{P_0'Q_0}| = a$.

255. A **D 17.33** szerint: $A = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4u\sqrt{u^2+1}\,dv\,du = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$

256. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$. **257.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

258. $2a^2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. (Az integrálásnál alkalmazzuk az $u = a\,\mathrm{sh}\,t$ helyettesítést!) (l. ábra)



259. $2\pi\left(\frac{\mathrm{sh}\,4}{4}+1\right)$. **260.** $\sqrt{2}\pi$.

261. $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}(e^2-1)$.

262. $2\sqrt{2}\ln 2$. **263.** $\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,1}{2}$.

264. $f(x,y,z) = x^2 - 2yz$, $f_x' = 2x$, $f_y' = -2z$, $f_z' = -2y$, ezért **T 17.35** szerint:

$$A = \int_0^1 \int_1^2 (1 + \frac{x^2}{2y^2})\,dy\,dx = \frac{13}{12}.$$

265. $z_x' = y$, $z_y' = x$, $T = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$, ezért **T 17.34** szerint, síkbeli polárkoordinátás helyettesítést is alkalmazva:

$$A = \iint_T \sqrt{1+x^2+y^2}\,dT = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

266. $z_x' = y$, $z_y' = x-1$, $T = \{(x,y); (x-1)^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$, ezért **T 17.34** szerint:

$$A = \iint_T \sqrt{1+(x-1)^2+y^2}\,dT = \int_0^1\int_0^\pi r\sqrt{1+r^2}\,d\varphi\,dr = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(Az $y = r\sin\varphi$, $x-1 = r\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le 1$ síkbeli polárkoordinátás helyettesítést alkalmaztuk.)

267. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

268. $z_x' = \frac{x}{y}$, $z_y' = -\frac{x^2}{2y^2}$, $T = \{(x,y); x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge \sqrt{3}\}$, ezért **T 17.34** szerint, síkbeli polárkoordinátás helyettesítést is alkalmazva:

$$A = \iint_T \left(1+\frac{x^2}{2y^2}\right)dT = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}}^2 \left(1+\frac{\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}\right) r\,dr\,d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}}^{2}\left(1+\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)r\,dr\,d\varphi=\frac{\pi}{6}-\frac{7\sqrt{3}}{36}\approx 0,18681.$$

Az integrál kiszámításához a $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ helyettesítést (**T 12.13**) alkalmazzuk.

269. $z'_x=\frac{x}{a}$ és $z'_y=\frac{y}{b}$. Az $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $0\le r\le 1$, $0\le\varphi<2\pi$ transzformációt alkalmazva: $A=ab\int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+r^2}\,d\varphi\,dr=\frac{2ab\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

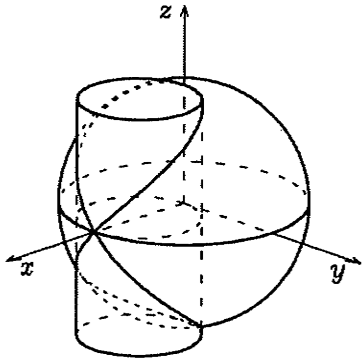
270. $2\pi ad$ (l. Szász G., Matematika II., 156.o.).

271. $f'_x=2x$, $f'_y=2y$, $f'_z=2z$. A $T=\{(x,y);(x-a)^2+y^2\le a^2,\ x,y\ge 0\}$ jelöléssel ($z\ge 0$):

$$A=4\iint_T\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dT=$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\varphi=$$

$$8a^2(\pi-2).$$



272. $A=4\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dy\,dx=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$.

273. $A=\int_0^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}x}^{2x}\sqrt{1+x^2}\,dy\,dx=13$.

274. Mivel $z'_x=1$ és $z'_y=2y$, ezért **T 17.34** szerint: $A=\int_0^1\int_0^x\sqrt{2+4y^2}\,dy\,dx$. Az $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}t$ helyettesítést alkalmazva (**T 12.13**)

$$\int_0^x\sqrt{2+4y^2}\,dy=\int_0^{\operatorname{arsh}\sqrt{2}x}\operatorname{ch}^2t\,dt=\frac{1}{2}\operatorname{arsh}\sqrt{2}x-\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2+1},$$

tehát

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1\operatorname{arsh}\sqrt{2}x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 4x\sqrt{2x^2+1}\,dx.$$

Az első tagra parciális integrálást (**D 12.10**), a második tagra pedig **12.264.** feladat első képletét alkalmazva : $A=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{2}}{6}$.

275. A felület x tengelyű forgáskúp, amely az xy koordinátasíkot az $y=\pm x$ egyenletű egyenesekben metszi. Elegendő az integrálást a $T=\{(x,y);0\le y\le\frac{1}{\sqrt{2}},y\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$ halmazon elvégezni.

$$A=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy=$$

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\lim_{a\to y+0}\int_a^{\sqrt{1-y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-2y^2}\,dy=\pi.$$

276. $16a^2$ (l. a **34.** feladatot!). **277.** $\sqrt{2}\pi$.

278. A felületdarab egyenlete **D 17.6** szerint:

$$\mathbf{r}(u,s) = \mathbf{r}(s) + u\mathbf{r}'(s), \quad 0 \le u \le d, \quad s_1 \le s \le s_2.$$

$\mathbf{r_u}(u,s) = \mathbf{r}'(s)$ és $\mathbf{r_s}(u,s) = \mathbf{r}'(s) + u\mathbf{r}''(s)$, ezért $\mathbf{r_u}(u,s) \times \mathbf{r_s}(u,s) = u(\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s))$, amiből (**T 17.16**):

$$|\mathbf{r_u}(u,s) \times \mathbf{r_s}(u,s)| = u|\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)| = u|\mathbf{r}'(s)||\mathbf{r}''(s)| = u|\mathbf{r}''(s)| = uG(s).$$

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^d uG(s)\,du\,ds = \frac{d^2}{2} \int_{s_1}^{s_2} G(s)\,ds.$$

279. Térjünk át ívhosszparaméterre (**P 17.9**): $\mathbf{r}(s) = \mathbf{i}4\cos\frac{s}{5} + \mathbf{j}4\sin\frac{s}{5} + \mathbf{k}\frac{3s}{5}$ $(0 \le s \le 5)$. Mivel $G(s) = |\mathbf{r}''(s)| = \frac{4}{5}$, ezért az előző feladat eredményét felhasználva: $A = \int_0^5 \frac{4}{5}\,ds = 4$.

280. A forgásfelület egyenlete: $y^2 + z^2 - f^2(x) = 0$ (l. a **173.** feladatot!). Legyen $g(x,y,z) = y^2 + z^2 - f^2(x)$. Ha $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ és $z \ge 0$, akkor $g'_x = -2f(x)f'(x)$, $g'_y = 2y$, $g'_z = 2z$ miatt **T 17.35** szerint:

$$A = 4\int_a^b \int_0^{f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}\,dy\,dx =$$

$$4\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} \left[\arcsin\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)} dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

281. $M = \int_0^1 \varrho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{3t}{2} 2\sqrt{t^2 + 1}\,dt = \left[\sqrt{(t^2+1)^3}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 1.$

282. A vékony fémhuzal egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$, ezért $M = \int_0^\pi (2 - \sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = 2(\pi - 1)$ és $N_{xz} = \int_0^\pi \sin t(2 - \sin t)\,dt = \frac{8 - \pi}{2}$, amiből $\bar{y} = \frac{N_{xz}}{M} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0,57$.
A tömegközéppont: $\left(0, \frac{8 - \pi}{4\pi - 4}, 0\right)$.

283. $I_z = 2\pi\varrho a^2\sqrt{a^2 + b^2}$. Mivel $M = 2\pi\varrho\sqrt{a^2 + b^2}$, $N_{yz} = N_{xz} = 0$ és $N_{xy} = 2\pi^2\varrho b\sqrt{a^2 + b^2}$, így a tömegközéppont koordinátái: $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = b\pi$.

284. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = -\frac{3}{5}$, $\bar{z} = \frac{9}{8}$, $I_x = \frac{192}{35}$.

285. Legyen az $\mathcal{F}$ félgömb egyenlete: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \ge 0)$. Nyilvánvaló, hogy a tömegközéppont a z tengelyen van, azaz $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$M = \iint_{\mathcal{F}} \varrho\,d\mathcal{F} = \varrho \iint_{\mathcal{F}} d\mathcal{F} = 2\pi\varrho a^2.$$

A félgömb egy paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos u\sin v + \mathbf{j}a\sin u\sin v + \mathbf{k}a\cos v \quad (0 \le u \le 2\pi, \ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}).$$

$$N_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho z(u,v)|\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}|\, dv\, du = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho a \cos v a^2 \sin^v \, dv\, du = \pi a^3 \varrho,$$

ezért $\bar{z} = \dfrac{N_{xy}}{M} = \dfrac{a}{2}$.

286. A felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}a\cos v + \mathbf{k}a\sin v$ $(0 \le u \le a,\ 0 \le v \le \pi)$; $M = a^2\pi\varrho$, $N_{xy} = 2a^3\varrho$, $N_{yz} = \dfrac{a^3\pi\varrho}{2}$, amiből: $\bar{x} = \dfrac{N_{yz}}{M} = \dfrac{a}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{N_{xy}}{M} = \dfrac{2a}{\pi}$. Nyilvánvaló, hogy $\bar{y} = 0$.

287. A felület egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}u$ $(-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le u \le 2\cos v)$, amiből: $M = \sqrt{2}\pi$ és $I_z = 3\sqrt{2}\pi$.

18. Vektor-vektorfüggvények (megoldások)

1. A **D 18.1** szerint $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2(x+y+z)$ és $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ forrásmentes az $x+y+z=0$ egyenletű síkon. A **D 18.2** szerint $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2(z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k})$ és a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező csak az $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ helyen örvénymentes.

2. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+x$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\left(\dfrac{y}{z^2}\mathbf{i}+z\mathbf{j}+\dfrac{x}{y^2}\mathbf{k}\right)$. A vektormező az $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+x=0$ egyenletű felületen forrásmentes, és sehol sem örvénymentes.

3. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2x(7+yz)$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}xz^2-\mathbf{j}yz^2+\mathbf{k}3(4y-1-y^2)$. A vektormező az yz koordinátasíkon és az $yz=-7$ egyenletű hiperbolikus hengerfelületen forrásmentes; a $z=0$, $y=2+\sqrt{3}$ és a $z=0$, $y=2-\sqrt{3}$ egyenletrendszerű egyeneseken örvénymentes.

4. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3|\mathbf{a}|$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. A vektormező örvénymentes, de sehol sem forrásmentes.

5. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{r}\mathbf{a}$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{r}\times\mathbf{a}$. A vektormező az $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ helyen forrásmentes és az $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{a}$ $(t\in\mathbf{R})$ paraméteres vektoregyenletű egyenesen örvénymentes.

6. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 4\mathbf{a}\mathbf{r}$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\times\mathbf{r}$. A vektormező ugyanott forrásmentes illetve örvénymentes, mint az előző feladatban.

7. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}\mathbf{a}}{|\mathbf{r}|}$, ha $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$. Az $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ helyen a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvénynek nincs divergenciája, ugyanis például a v_1 függvény differenciahányadosanak nincs határértéke az $x=0$ helyen:
$$\frac{v_1(x,0,0)-v_1(0,0,0)}{x} = a_1\frac{|x|}{x} \quad (x\neq 0).$$
A vektormező az $\mathbf{r}\mathbf{a} = a_1x+a_2y+a_3z=0$ egyenletű síkon a $(0,0,0)$ pont kivételével forrásmentes. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{r}|}$, ha $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$. Az $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ helyen nincs rotáció. A vektormező a $t\mathbf{a}$ $(t\neq 0)$ helyvektorú pontokban örvénymentes.

8. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 4|\mathbf{r}|$, ha $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$.
$$\frac{\partial v_1(0,0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{v_1(x,0,0)-v_1(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$
Hasonlóan
$$\frac{\partial v_2(0,0,0)}{\partial y} = \frac{\partial v_3(0,0,0)}{\partial z} = 0,$$
ezért $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{0}) = 0$, így $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 4|\mathbf{r}|$ minden $\mathbf{r}$-re igaz. A vektormező az $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ helyen forrásmentes. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$; a vektormező örvénymentes.

9. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2}$, ha $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$. Az $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ helyen nincs divergencia. A vektormező az $\mathbf{a}\mathbf{r} = a_1x+a_2y+a_3z=0$ egyenletű síkon a $(0,0,0)$ pont kivételével

forrásmentes. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}\times\mathbf{a}}{\mathbf{r}^2}$, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyen nincs rotáció. A vektormező a $t\mathbf{a}$ $(t \neq 0)$ helyvektorú pontokban örvénymentes.

10. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3\ln|\mathbf{r}| + 1$, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyen nincs divergencia. A vektormező az $x^2 + y^2 + z^2 = e^{-\frac{2}{3}}$ egyenletű gömbfelületen forrásmentes. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, a vektormező örvénymentes.

11. **J 18.4** jelölést használva $\operatorname{div}\mathbf{grad}\,|\mathbf{r}| = \Delta\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{2}{|\mathbf{r}|}$, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyen nincs divergencia. A vektormező sehol sem forrásmentes. A **T 18.7** alapján $\operatorname{rot}\mathbf{grad}\,|\mathbf{r}| = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyen nincs rotáció. A vektormező az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ hely kivételével örvénymentes.

12. **T 18.5** szerint

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\mathbf{a}|\mathbf{r}| + \operatorname{div}|\mathbf{a}|\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{a}}{|\mathbf{r}|} + 3|\mathbf{a}|,$$

ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$; az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyen nincs divergencia (l. a **4** és **7** feladatokat!). A vektormező sehol sem forrásmentes.

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{a}|\mathbf{r}| + \operatorname{rot}|\mathbf{a}|\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{r}|},$$

ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyen nincs rotáció. A vektormező a $t\mathbf{a}$ $(t \neq 0)$ helyvektorú pontokban örvénymentes.

13. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, ezért a vektortér forrásmentes (**D 18.1**).

14. Forrásmentes. **15.** Forrásmentes. **16.** Forrásmentes.

17. $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = z^2\left(y - e^x\right)^2$; a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvény az xy koordinátasíkon és az $y = e^x$ egyenletű felületen forrásmentes. (Az egész vektortér nem forrásmentes.)

18. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ és $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, ezért **D 18.3** szerint a vektormező harmonikus.

19. **T 18.6** szerint: $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{grad}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathbf{0}$, de **18.4** szerint:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\mathbf{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \Delta\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \neq 0,$$

ezért a vektortér nem harmonikus, de örvénymentes.

20. Nem harmonikus, de örvénymentes. **21.** Harmonikus.

22. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ és $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 6((A+C)x + (B+D)y)$. Ha $A + C = B + D = 0$, akkor a vektortér harmonikus. Ha $A + C \neq 0$ vagy $B + D \neq 0$, akkor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ csak az $(A+C)x + (B+D)y = 0$ egyenletű síkon harmonikus.

23. A **D 18.1** és a **D 18.2** definíciókból azonnal adódik.

24. Legyen $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. A **D 18.1**, a **D 18.2** és a **D 14.9** definíciókból egyszerűen adódik.

25. Legyen $\mathbf{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}$. Az állítás, a függvények szorzatának differenciálására vonatkozó szabályt is alkalmazva, egyszerűen igazolható.

26. Az előző feladathoz hasonlóan egyszerűen bizonyítható.

27. A **23.** feladathoz hasonlóan egyszerűen bizonyítható.

28. A **T 18.6** alapján a bizonyítás egyszerű, de a tétel szerint fel kell tenni, hogy az $\mathbf{r}$ valamely teljes környezetében a megfelelő parciális deriváltak folytonosak legyenek. (L. még **T 14.9**!)

29. $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 6(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = 6\mathbf{r}$.

30. A **T 18.5** szerint $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \Delta\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

31. $\Delta v(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$.

32. $\dfrac{1}{\mathbf{r}^2}$.

33. $(2 - x^2z^2 - x^2y^2)\sin yz$.

34. $ye^x + ze^y + xe^z$.

35. $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)e^{xyz}$.

36. A **D 18.7** szerint, ha a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvénynek u egy potenciálfüggvénye, akkor $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3$ és $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$, ezért például

$$u = \int (3x^2y - y^3)\,dx = x^3y - y^3x + c(y),$$

ahol $c(y)$ olyan egyváltozós valós függvény, amely csak y-tól függhet. Ebből

$$x^3 - 3y^2x = \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3y^2x + c'(y),$$

ahol $c'(y)$ a $c(y)$-nak y szerinti deriváltját jelenti. Eszerint $c'(y) = 0$, azaz $c(y) = c$ ($c \in \mathbf{R}$), ezért a potenciálfüggvények az $u(x,y) = x^3y - y^3x + c$ ($c \in \mathbf{R}$) függvények.

37. Az előző feladat megoldását követve az $\frac{5x^3}{3} - 2x^2 + c'(y) = 3x^2 - 2y$ egyenlethez jutunk, ami ellentmondás, mert $c'(y)$, és így $c(y)$ is függ x-től. Tehát nincs potenciálfüggvény. Mivel $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$, ezért **T 18.8** alapján is megkapható ez az eredmény.

38. A **36.** feladat megoldását követve, például: $u = \int zx\,dy = xyz + c(x,z)$, amiből

$$yz = \frac{\partial u}{\partial x} = yz + \frac{\partial c(x,z)}{\partial x}, \quad xy = \frac{\partial u}{\partial z} = xy + \frac{\partial c(x,z)}{\partial z}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{\partial c(x,z)}{\partial x} = 0$ és $\dfrac{\partial c(x,z)}{\partial z} = 0$, azaz $c(x,z) = c$ ($c \in \mathbf{R}$). Tehát a potenciálfüggvények: $u(x,y,z) = xyz + c \quad (c \in \mathbf{R})$.

39. A **36.** feladat megoldását követve, például: $u = \int (y+z)\,dx = yx + zx + c_1(y,z)$, amiből

$$x + z = \frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y}, \quad x + y = \frac{\partial u}{\partial z} = x + \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial z}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = z$ és $\dfrac{\partial c_1(y,z)}{\partial z} = y$, azaz $c_1(y,z) = yz + c_2(z)$, így $y = \dfrac{\partial c_1(y,z)}{\partial z} = y + c_2'(z)$, ahol $c_2'(z)$ a $c_2(z)$-nek z szerinti deriváltját jelenti. Ebből $c_2(z) = c$ $(c \in \mathbf{R})$. A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ potenciálfüggvényei: $u(x,y,z) = xy + yz + zx + c$ $\quad (c \in \mathbf{R})$.

40. $u(x,y,z) = xyz - \dfrac{x^2y}{2} + \dfrac{y^2z^2}{2} + c \quad (c \in \mathbf{R})$.

41. $u(x,y) = 2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} + c \quad (c \in \mathbf{R})$.

42. Az AB szakasz egy paraméteres egyenletrendszere (l. Szász G., Matematika I., 5.3.4. példáját):

$$x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 3 + t, \quad 0 \le t \le 1,$$

ennek megfelelő paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + (3t-2)\mathbf{j} + (3+t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1;$$

$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ezért **T 18.11** szerint:

$$\int_{AB} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt =$$

$$\int_0^1 ((1+4t)\mathbf{i} + (4+2t)\mathbf{j} + (4t-1)\mathbf{k})(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt = \int_0^1 (14t+12)\,dt = 19.$$

43. 1. megoldás: Az integrálás útja az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ paraméteres vektoregyenlettel megadott kör (l. a **17.139** feladat megoldását).Az integrálás iránya megegyezik a paraméter növekedésének irányával. A **T 18.11** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t)(-\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t)\,dt = 0.$$

2. megoldás: A vektortér potenciálos, így **T 18.12** szerint az integrál értéke 0.

44. A **T 18.11** tételben szereplő speciális formula szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_1^{-2} (x^2 + (3-2x)^2 + (x^2 - (3-2x)^2)(-2))\,dx = -168.$$

(Természetesen az eredmény az általános formulából is megkapható.)

45. $\frac{17}{105}$.

46. 1. megoldás: **T 18.11** szerint

$$\int_0^{\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = \left[\sin 2t - \frac{1}{2}\cos^4 t - \frac{1}{2}\sin^4 t\right]_0^{\pi} = 0.$$

2. megoldás: $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}(t)$ folytonosan differenciálható. Mivel $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(\pi) = \mathbf{k}$, ezért a $\mathcal{G}$ görbe zárt. A **T 18.12** szerint a görbementi integrál 0. (L. még a **17.144** feladatot!)

47. 1. megoldás: Az integrálás útja az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}3\cos t + \mathbf{j}4\sin t + 2\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ paraméteres vektoregyenletű ellipszis (l. **17.140** feladatot), amelynek irányítása a paraméter növekedésének iránya. A számítást végezzük el **T 18.11** szerint. Az integrál értéke 0.

2. megoldás: $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ miatt — **T 18.12** alapján — az integrál értéke 0.

48. Az OA szakasz egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t$ $(0 \le t \le 1)$. Az OA szakaszon $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = 0$, ezért ezen a szakaszon az integrál értéke 0. Az AB szakasz egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 1)$. **T 18.11**-et is felhasználva:

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{OA} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \frac{2}{3}.$$

49. $e - 2.$

50. Az AB szakasz, a BC szakasz, az AB negyedkörív és az ABC félkörív egy paraméteres vektoregyenlete rendre a következő:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1), \qquad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1),$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2}),$$

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\mathbf{i} + (1+\sin t)\mathbf{j} \quad (\frac{3\pi}{2} \ge t \ge \frac{\pi}{2}).$$

Mind a három esetben az integrál értéke: $\frac{\ln 5}{2}$. Ez a következő módon is megkapható: A vektormező potenciálos, mert $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (l. a **18.** és **32.** feladatokat), ezért **T 18.12** szerint bármely két pont közötti görbementi integrál a potenciálfüggvénynek csak a végpontokban felvett értékeitől függ. Így:

$$\int_{AC} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \ln\sqrt{1^2+2^2} - \ln\sqrt{1^2+0^2} = \frac{\ln 5}{2}.$$

51. $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{OA} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} - \int_{BA} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} - \int_{OB} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3} \approx 3{,}90413.$

52. 0 (l. a **38.** feladatot!)

53. $6 - \frac{3\pi}{8} - 9\ln 2 \approx -9{,}66310.$ **54.** $\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0{,}72377.$

55. $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, ezért **T 18.12** alapján a $\mathcal{G}$ görbementi integrál megegyezik az AC szakaszon vett integrállal: $2\sqrt{3}$.

56. Megoldható a feladat a **T 18.10** alapján is, de a megoldás elég hosszadalmas. (Az OA szakaszon az integrál 0, az AB köríven $\frac{3\ln 2}{32}$, végül a BC szakaszon $-\frac{3\ln 2}{32}$, azaz a $\mathcal{G}$ görbén 0. Megjegyezzük, hogy érdemesebb a CB szakaszon integrálni, s a kapott eredmény -1-szeresét venni. Ezen a szakaszon még egy parciális integrálást is kell végezni.) Mivel $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, ezért **T 18.12** alapján jóval egyszerűbb, ha az OC szakaszon integrálunk. (Az OC szakasz egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 1)$, ezért $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{0}$, így az integrál értéke is 0.) A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ egy potenciálfüggvénye $u = x^3y^2\ln(z+2)$, ezért **T 18.12** alapján a következő módon is meg lehet oldani a feladatot:

$$\int_{OC} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = u(C) - u(O) = 0.$$

57. Az $u = \operatorname{div}(\mathbf{r}^2\mathbf{r}) = 5(x^2+y^2+z^2)$ a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény potenciálfüggvénye, ezért **T 18.12** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = u(1,1,\sqrt{2}) - u(2,0,0) = 0.$$

58. $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (t^4 - t^2)\mathbf{i} + 2t^5\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$ és $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, ezért **T 18.11** szerint

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \int_0^1 (\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t))\, dt =$$

$$2\mathbf{i}\int_0^1 (3t^7 + t^3)\, dt - \mathbf{j}\int_0^1 (3t^6 - 3t^4 + t^2)\, dt - 2\mathbf{k}\int_0^1 t^3\, dt = \frac{5}{4}\mathbf{i} - \frac{17}{105}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}.$$

59. $-\frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{10}\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}.$

60. $\pi(-2\pi\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}).$

61. $\frac{1}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$

62. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, és a **17.190** feladatot is figyelembe véve, a $\mathcal{G}$ görbe egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 1)$.
Az integrál értéke: $-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{12}\mathbf{j} + \frac{11}{30}\mathbf{k}.$

63. $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (u+2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$, $\mathbf{r_u} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{r_v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, ezért

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))\mathbf{r_u}\mathbf{r_v} = \begin{vmatrix} u+2v & -v & u-v \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6v,$$

így **T 18.15** szerint: $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \int_0^3 \int_0^1 (-6v)\, dv\, du = -9.$

64. $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))\, d\mathbf{F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2u^2 \sin v\, du\, dv = \frac{2}{3}.$

65. $-\frac{27\pi^2}{2}.$

66. $-6.$

67. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ és az $\mathcal{F}$ félgömbfelület egy paraméteres vektoregyenlete (l. a **17.210** feladatot!):
$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}2\cos u \sin v + \mathbf{j}2\sin u \sin v + \mathbf{k}2\cos v$ $\left(0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}\right)$
Ezért a **T 18.15** alapján az integrál értéke: -128π.

68. $\frac{a^4\pi}{2}$ (l. az előző feladat megoldását!).

69. $-6\pi \ln 2.$

70. Ha a gömbfelületet az

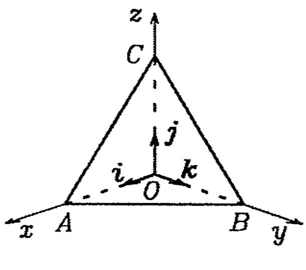
$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}a\cos u \sin v + \mathbf{j}a\sin u \sin v + \mathbf{k}a\cos v \ (0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v \le \pi)$$

paraméteres vektoregyenlettel adjuk meg (**17.210**), akkor az $\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}$ felületi normálvektor mindig a gömb középpontja felé mutat, ezért **D 18.13** és **T 18.15** szerint az

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))\mathbf{r_u}\mathbf{r_v}\, du\, dv$$

képletet kell alkalmazni. Az integrál értéke: $4\pi a^3$.

71. A tetraédert az ábra mutatja, amelynek csúcspontjai az origó, az $A(a,0,0)$, a $B(0,a,0)$ és a $C(0,0,a)$ pontok. Az OBC háromszöglap egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(u,v) = a(u\mathbf{j} + v\mathbf{k})$ $(u+v \le 1,\ 0 \le u,\ 0 \le v$, ebből $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = a^2\mathbf{i}$. Az OBC háromszöglap minden pontjában egy kifelé mutató normálvektor $-a^2\mathbf{i}$, ezért az OBC háromszöglapon az integrál: $-\int_0^1\int_0^{1-u} a^4uv\,dv\,du = -\frac{a^4}{24}$. Hasonlóan kapható, hogy az OAB és az OAC háromszöglapokon az integrál értéke szintén $-\frac{a^4}{24}$. Az ABC háromszöglap egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(u,v) = a(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1-u-v)\mathbf{k})$ $(u \ge 0,\ v \ge 0,\ u+v \le 1)$. Ebből $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = a^2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, és ez kifelé mutató normálvektor az ABC háromszöglap minden pontjában. Így a kiszámítandó integrál:



$$\int_0^1\int_0^{1-u} a^4(v - uv - v^2 + u - u^2)\,dv\,du = \frac{a^4}{8}.$$

Felhasználva **T 18.14**-öt is, a tetraéder külső felületén az integrál értéke 0. (Az ABC háromszöglap fenti paraméteres vektoregyenlete például az alábbi módon kapható meg: A rajz alapján látható, hogy a háromszöglap minden pontjához pontosan egy olyan (u,v) számpár tartozik, hogy a pont $\mathbf{r}(u,v)$ helyvektora egyenlő például az $\overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{CA} + v\overrightarrow{CB}$ vektorral, azaz $\mathbf{r}(u,v) = a(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1-u-v)\mathbf{k})$, ahol $u, v, 1-u-v \ge 0$. Fordítva, minden ilyen helyvektor végpontja rajta van a háromszöglapon. Ugyanígy kapható meg a többi háromszöglap paraméteres vektoregyenlete, csak a C pont szerepét az O veszi át.)

72. $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \times (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = \mathbf{i}(2v-3u) - \mathbf{j}(2u+v) + \mathbf{k}(3u+5v)$, ezért **T 18.15** szerint: $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{F} =$

$$\int_0^3\int_0^1 (\mathbf{i}(2v-3u) - \mathbf{j}(2u+v) + \mathbf{k}(3u+5v))\,dv\,du = \frac{21}{2}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}).$$

73. $\frac{1}{2}(\mathbf{k}-\mathbf{i})$.

74. $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{8}\mathbf{j}$.

75. $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, ezért Stokes tétele szerint a görbementi integrál értéke 0.

76. 0.

77. Tekintsük a $\mathcal{G}$-nek az xy koordinátasíkra eső merőleges vetületét. Mivel a $\mathcal{G}$ tetszőleges $P(x,y,z)$ pontjára (l. következő oldal bal oldali ábrája)

$$x = a\sin t, \quad y = a\cos t, \quad z = a(\sin t + \cos t) = x + y,$$

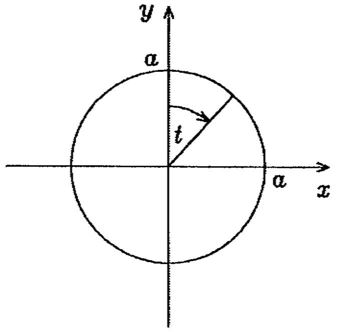
ezért a $\mathcal{G}$ görbe az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű hengerfelület és az $x+y-z=0$ egyenletű sík metszésvonalaként előálló ellipszis, azaz zárt görbe; irányítása negatív. Alkalmazható Stokes tétele úgy, hogy az $\mathcal{F}$ felületdarabként az $x+y-z=0$ egyenletű síkban az előbbi ellipszis által határolt síkrészt választjuk. Az $\mathcal{F}$ egy paraméteres vektoregyenlete:

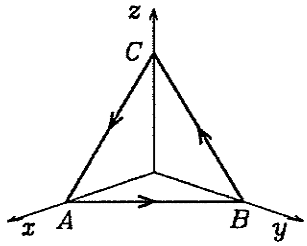
$$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k},\ x^2+y^2\le a^2.$$

Mivel $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ és $\mathbf{r_x}\times\mathbf{r_y}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{r_x}\times\mathbf{r_y}$ irányából visszanézve az ellipszis iránya negatív forgásiránynak felel meg, ezért

$$\oint_{\mathcal{G}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=-\int_{\mathcal{F}}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F}=-\iint_{x^2+y^2\le a^2}dx\,dy=-a^2\pi.$$

Megjegyezzük,hogy a feladat görbementi integrállal egyszerűbben megoldható.





78. Az ABC háromszöglap egy paraméteres vektoregyenlete (l. a **71.** feladat megoldását): $\mathbf{r}(u,v)=a(1-u-v)\mathbf{i}+av\mathbf{j}+au\mathbf{k}$, $0\le u$, $0\le v$, $u+v\le 1$. $\mathbf{r_u}\times\mathbf{r_v}=-a^2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})=2(z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k})$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))=-2a(u\mathbf{i}+(1-u-v)\mathbf{j}+v\mathbf{k})$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))(\mathbf{r_u}\times\mathbf{r_v})=2a^3$. Stokes tételét alkalmazva ($\mathbf{r_u}\times\mathbf{r_v}$ irányából visszanézve a görbe forgásiránya negatív, l. jobb oldali ábra):

$$\oint_{\mathcal{G}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=-\int_{\mathcal{F}}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F}=-\int_0^1\int_0^{1-u}2a^3\,dv\,du=-a^3.$$

79. Az integrálás útja a csavarvonal $A(a,0,0)$ kezdőpontú és $B(a,0,b)$ végpontú nem zárt íve, ezért nem alkalmazható Stokes tétele. Mivel $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{0}$, ezért az integrál értéke független az úttól (**T 18.12**). Ez azt jelenti, hogy integrálhatunk az A kezdőpontú és B végpontú szakaszon, amelynek egy paraméteres vektoregyenlete, $\mathbf{r}(t)=a\mathbf{i}+t\mathbf{k}$ $(0\le t\le b)$;

$$\int_{AB}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\int_0^b t^2\,dt=\frac{b^3}{3}.$$

80. Green tételét alkalmazhatjuk: ha $v_1(x,y)=2(x^2+y^2)$ és $v_2(x,y)=(x+y)^2$, akkor

$$\oint_{\mathcal{G}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\int_1^2\int_x^{4-x}2(x-y)\,dy\,dx=-\frac{4}{3}.$$

81. Green tételét, majd a síkbeli polárkoordinátás helyettesítést (**T 16...**) alkalmazva, az integrál értéke: $\frac{a^4\pi}{2}$.

82. 8.

83. Alkalmazzuk Green tételét rendre a $v_1(x,y) = 0$ és $v_2(x,y) = x$, $v_1(x,y) = -y$ és $v_2(x,y) = 0$, $v_1(x,y) = -y$ és $v_2(x,y) = x$ függvényekre.

84. Mivel $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}b\cos t$, ezért az előző feladat és **T 18.11** szerint:

$$A(T) = \oint_G x\mathbf{j}\,d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{j}a\cos t(-\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}b\cos t)\,dt = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = ab\pi.$$

Egyszerűb a megoldás, ha az $A(T) = \frac{1}{2}\oint_G(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})\,d\mathbf{r}$ képletet alkalmazzuk. Ebben az esetben:

$$A(T) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\mathbf{i}b\sin t + \mathbf{j}a\cos t)(-\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}b\cos t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = ab\pi.$$

85. A **83.** feladat és **T 18.11** szerint:
$A(T) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3ab(\sin^4 t\cos^2 t + \cos^4 t\sin^2 t)\,dt = \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3ab\pi}{8}$.

86. $6a^2\pi$.

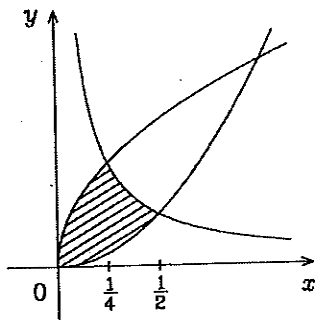
87. Az OA, az AB és a BO ív egy paraméteres vektoregyenlete rendre:

$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} \quad (0 \le x \le \frac{1}{2})$,

$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + \frac{1}{8x}\mathbf{j} \quad (\frac{1}{2} \ge x \ge \frac{1}{4})$,

$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + \sqrt{x}\mathbf{j} \quad (\frac{1}{4} \ge x \ge 0)$.

Ezért **T 18.10** és a **83.** feladat alapján: $A(T) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx - \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{0}\sqrt{x}\,dx = \frac{1+3\ln 2}{24} \approx 0,12831.$



88. 1.

89. Mivel $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, ezért a Gauss-Osztrogradszkij-tétel szerint az integrál értéke is 0.

90. Mivel $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ezért **D 18.1** szerint $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3$. Hengerkoordinátákra áttérve (**T 16...**):

$$\oint_{\mathcal{F}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,dV = \int_{-1}^{2}\int_0^2\int_0^{2\pi} 3r\,d\varphi\,dr\,dm = 36\pi$$

(V az $\mathcal{F}$ által körülzárt térbeli tartomány).

91. **D 18.1** szerint $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3(x^2+y^2+z^2)$. Térbeli polárkoordinátákra áttérve (**P 16.19**), és a befelé mutató felületi normális miatti negatív előjelet is kitéve:

$$\oint_{\mathcal{F}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F} = -3\int_0^a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^4\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr = -\frac{12a^5\pi}{5}.$$

92. Az $\mathcal{F}$ felület az $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$ egyenletű gömbfelület; $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 5y - 4x$. A számítás során a következő integráltranszformációt hajtjuk végre:

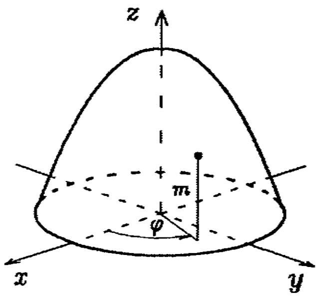
$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = 2 + r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = 1 + r\cos\vartheta,$$

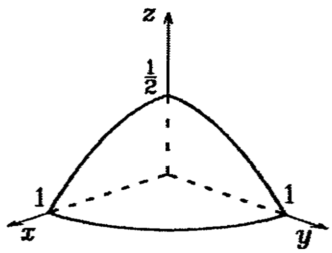
$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi.$$

A Jacobi-determináns (**D 16...**) abszolút értéke: $r^2 \sin\vartheta$. Az integrál értéke: $\dfrac{40\pi}{3}$.

93. Az $\mathcal{F}$ felületet a mellékelt bal oldali ábrán vázoltuk; $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2xy^2 + 1$. Hengerkoordinátákra áttérve:

$$\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \int_0^a \int_0^{a^2-r^2} \int_0^{2\pi} (2r^3 \sin^2\varphi\cos\varphi + 1) r\, d\varphi\, dm\, dr = \frac{a^4\pi}{2}.$$





94. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2(x+y+z)$; hengerkoordinátákra áttérve: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 1$, $0 \le m \le \dfrac{1-r^2}{2}$. Az integrál értéke: $\dfrac{4}{15} + \dfrac{\pi}{48} \approx 0{,}33212$ (l. jobb oldali ábra).

95. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = x + y + z$; térbeli polárkoordinátákra áttérve, és a befelé mutató felületi normálvektor miatti negatív előjelet is figyelembe véve: $\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} =$
$-\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (r\cos\varphi\sin\vartheta + r\sin\varphi\sin\vartheta + r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr = -\dfrac{\pi}{4}$.
(A feladat megoldható a Gauss-Osztrogradszkij-tétel nélkül is. A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvényt integráljuk az

$$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = \mathbf{i}\sin\vartheta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\vartheta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\vartheta \quad \left(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

paraméteres vektoregyenlettel megadott felületen megfelelő irányítással. Az integrál értéke: $-\dfrac{\pi}{4}$. Második lépésben integráljuk a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$-t az

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v \quad (0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi)$$

egyenlettel megadott felületen. Az integrál értéke: 0. Végül alkalmazzuk **T 18.14**-et.)

96. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2xy \ln z + \dfrac{1}{(z+1)^2}$; hengerkoordinátákra áttérve:

$$\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \int_1^4 \int_0^{\frac{\sqrt{m}}{2}} \int_0^{2\pi} \left(2r^2 \sin\varphi \cos\varphi \ln m + \frac{1}{(m+1)^2}\right) r\, d\varphi\, dr\, dm$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\ln\frac{5}{2} - \frac{3}{10}\right) \approx 0,48403.$$

97. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$; térbeli polárkoordinátákra áttérve:

$$\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\cos\vartheta}} \int_0^{2\pi} (r^2 - 3) r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, dr\, d\vartheta = -\frac{3\sqrt{3}\pi}{10} \approx -1,63241.$$

98. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{2\sqrt{z+2}} + 2xy + \dfrac{2\ln z}{z}$; hengerkoordinátákra áttérve: $\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} =$
$$\int_0^1 \int_{r^2+1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{m+2}} + 2r^2 \sin\varphi\cos\varphi + \frac{2\ln m}{m}\right) r\, d\varphi\, dm\, dr =$$
$dsp\pi\left(4\ln 2 - \ln^2 2 + 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}\right) \approx 1,32859$. Megjegyezzük, hogy a megoldás közben szerepel az $\int r \ln^2(r^2+1)\, dr$ integrál is, amelyet az $u = r^2 + 1$ helyettesítéssel, majd kétszeres parciális integrálással számíthatunk ki.

99. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\dfrac{2yz}{(x^2+y^2)^2}$; gömbi koordinátákra áttérve: $\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} =$
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^2 \int_0^{\pi} \frac{-2r\sin\vartheta \sin\varphi r\cos\vartheta}{r^4 \sin^4\vartheta} r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, dr\, d\vartheta = 8(\sqrt{3} - 2).$$

100. 1. megoldás: **A 18.20** és **T 18.11** alapján:
$$W = \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} b^2 t\, dt = 2\pi^2 b^2.$$

2.megoldás: Az erőtér potenciálos (**D 18.7**), a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ egy potenciálfüggvénye: $u(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2} = \dfrac{\mathbf{r}^2}{2}$, így **T 18.12** szerint $W = \int_{\mathcal{G}} \mathbf{r}\, d\mathbf{r} = u(B) - u(A)$, ahol $A(a,0,0)$ a kezdőpont és $B(a,0,2\pi b)$ a végpont.

3.megoldás: Mivel az erőtér potenciálos, ezért az erő munkája csak a kezdő- és végponttól függ (**A 18.21**), integrálhatunk tehát az AB szakasz mentén: $W = \int_0^{2\pi b} t\, dt = 2\pi^2 b^2$.

101. $W = \dfrac{3}{4}e^4 - \dfrac{3}{e^2} + \dfrac{9}{4}$.

102. $W = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$, illetve $W = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t)\, dt = 2\pi$.

103. $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, ezért az erőtér potenciálos (**T 18.8**). A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ egy potenciálfüggvénye: $u(x,y,z) = xyz(x+y+z)$. Így **A 18.21** és **T 18.12** szerint: $W = \int_{OA} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = u(1,1,1) - u(0,0,0) = 3$.

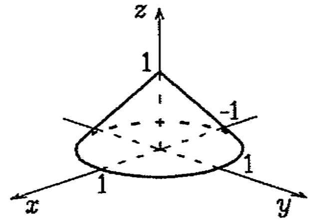
104. A felületdarabot az ábra mutatja, egy paraméteres vektoregyenlete: $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1 - \sqrt{x^2+y^2})\mathbf{k}$ $(x^2 + y^2 \le 1)$.

$$\mathbf{r_x} \times \mathbf{r_y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$\mathbf{v}(\mathbf{r}(x,y))\mathbf{r_x}\mathbf{r_y} = 1,$

ezért **A 18.22** és **T 18.15** szerint:

$$\Phi = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F} = \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy = \pi.$$

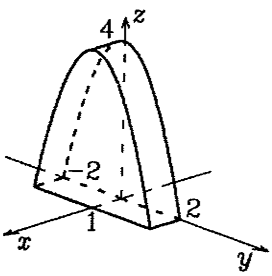


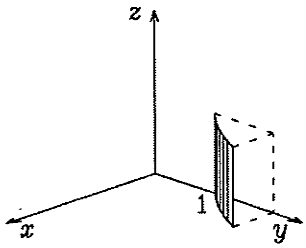
105. $\Phi = 4\pi m \neq 0$, ezért **A 18.22** szerint vannak a gömb belsejében források.

106. Mivel $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -3$, ezért **T 18.18**-at alkalmazva:

$$\Phi = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{F} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2}\int_{0}^{1}(-3)\,dx\,dz\,dy = -32.$$

(l. bal oldali ábra)





107. $\mathbf{v}(\mathbf{r}(x,z)) = -2\mathbf{i} + 2e^x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ és $\mathbf{r_x} \times \mathbf{r_z} = \mathbf{i}e^x - \mathbf{j}$, ezért **A 18.22** és **T 18.15** alapján: $\Phi = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{F} = \int_0^{\ln 2}\int_0^1 (-4e^x)\,dz\,dx = -4.$

(l. jobb oldali ábra)

19. Mátrix és determináns (megoldások)

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Nem végezhető el.

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 16 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} n(n+1)/2 \\ n(n+3)/2 \\ \vdots \\ n(3n-1)/2 \end{bmatrix}$.

7. $[-2]$.

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

9. $[2 \quad 4 \quad 6]$.

10. Nem végezhető el.

11. a) —, b) 5×2, c) 4×5, d) 4×2.

12. $m \times n$.

14. $\mathbf{C}_3^{3k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_3^{3k} = \mathbf{E}_3$, $\mathbf{C}_3^{3k+1} = \mathbf{C}_3$, $k \in \mathbf{N}$.

15. $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{E}_2$.

16. $\mathbf{A}^m = \begin{bmatrix} a_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^m \end{bmatrix}$.

17. $\mathbf{C}_n^{nk+i}$ $(k, i \in \mathbf{N},\ i < k)$ az a mátrix lesz, melynek bal alsó sarkában az $\mathbf{E}_i$, jobb felső sarkában az $\mathbf{E}_{n-i}$ egységmátrix van, egyebütt 0. Így tehát $\mathbf{C}_n^{nk} = \mathbf{E}_n$.

18. Teljes indukcióval mindkét összefüggés bizonyítható. Például igazoljuk a második összefüggést! $n = 1$ esetén az egyenlőség fennáll, amiről az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_2 = 1$ értékek behelyettesítésével meggyőződhetünk. Tegyük fel, hogy az egyenlőség fennáll valamely n értékre, bebizonyítjuk, hogy fennáll $n+1$-re is.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

21. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos típusú négyzetes mátrixok, továbbá $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2$. Tehát az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

22. $c_3 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i3}$.

23. $z_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} y_i$.

24. $a_{24} = \sum_{i=1}^{4} b_{2i} c_{i4}$.

25. $a_{23} = \sum_{j=1}^{l} x_{2j} d_{j3} = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} b_{2i} c_{ij} \right) d_{j3} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} b_{2i} c_{ij} d_{j3}$,
ahol x_{2j} a $\left([b_{ij}]_{n \times k} [c_{ij}]_{k \times l}\right)$ mátrix második sorának j-edik eleme.

26. $a_{23} = \sum_{i=1}^{k} b_{2i} \left(\sum_{j=1}^{l} c_{ij} d_{j3} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} b_{2i} c_{ij} d_{j3}.$

27. Az előző két feladat eredményét is figyelembe véve:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{l} \sum_{t=1}^{k} b_{it} c_{ts} d_{sj} = \sum_{t=1}^{k} \sum_{s=1}^{l} b_{it} c_{ts} d_{sj}.$$

28. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$, így $c = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$.

29. $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, amiből

$$[2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [4 \quad 1 \quad 0],$$

azaz $\mathbf{A}^2$ második sorát megkaphatjuk, ha $\mathbf{A}$ második sorát (mint mátrixot) megszorozzuk $\mathbf{A}$-val.

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$,

azaz $\mathbf{A}$ megszorozva $\mathbf{B}$ első oszlopával az $\mathbf{AB}$ első oszlopát adja.

31. $[-2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1].$

32. $[-2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0]$,

azaz $\mathbf{B}$ harmadik sora megszorozva $\mathbf{A}$-val a $\mathbf{BA}$ harmadik sorát adja.

33. Az állítás helyességéről egyszerű behelyettesítéssel győződhetünk meg.

34. Az $\mathbf{AB}$ szorzat főátlójában az i-edik helyen $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ik}$ áll, így a főátlóbeli elemek összege $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ik}$. Ugyanennyi a $\mathbf{BA}$ szorzat főátlójában levő elemek összege is, így az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ főátlójában levő elemek összege 0. Mivel az $\mathbf{E}$ mátrix főátlójában csupa 1 áll, melyek összege n, ezért az egyenlőség valóban nem teljesülhet.

36. $-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 9 = -3.$

(Az első és a negyedik tagot le sem írtuk, mivel ezekben 0-val kellett szorozni a megfelelő aldeterminánst.)

37. $-1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$

38. A második sora szerint kifejtve: $1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6.$

39. A determinánst a negyedik oszlopa, majd a kapott negyedrendű determinánst a második oszlopa szerint kifejtve:

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -75.$$

40. a) 24. b) 0, mert második sora nullákból áll. c) 0, mert első és harmadik oszlopa azonos. d) 0, mert első sora a harmadik sor (-1)-szerese.

41. Az 1. és 2., azután az 1. és 3., végül az 1. és 5. sorokat felcserélve:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -120.$$

42. $-1, -1, 1.$ **43.** 24, 24.

44. Az első sort cseréljük fel az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, …, így $\mathrm{Ent}(\frac{n}{2})$ sorcserét hajtottunk végre, tehát a determináns értéke $(-1)^{\mathrm{Ent}(n/2)}$. Ennek értéke 1, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k+1$, és -1, ha $n = 4k+2$ vagy $n = 4k+3$ valamilyen k természetes számra. Más alakban kapjuk meg az eredményt, ha csak szomszédos sorokat cserélünk: először az első sort visszük (szomszédos sorok cseréjével) az utolsóba, majd az eredeti determináns második sorát az utolsó előttibe, …, azaz az alábbi sorpárok cseréjét hajtjuk végre:

$(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $\ldots, (n-1, n)$,
$(1,2)$, $(2,3)$, $\ldots, (n-2, n-1)$,
. . . .
$(1,2)$, $(2,3)$,
$(1,2)$.

Ez összesen $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ sorcsere. Minden sorcserével (-1)-szeresére változik a determináns értéke, így a végeredmény $(-1)^{n(n-1)/2}$. Természetesen e hatvány értéke is akkor 1, ha $n = 4k$ vagy $4k+1$, és akkor -1, ha $n = 4k+2$ vagy $4k+3$.

(Ugyanilyen gondolatmenettel kimutatható, hogy ha egy determináns mellékátlója felett csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a mellékátlóbeli elemek szorzatának $(-1)^{\mathrm{Ent}(n/2)}$-szerese [vagy $(-1)^{n(n-1)/2}$-szerese].)

45. Az előző feladathoz hasonló számítással $(-1)^{n(n-1)/2}n!$.

46. Az első és a harmadik, majd a második és a negyedik oszlopok cseréje után kapjuk, hogy a determináns értéke:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

47. Megfelelő sorcserék után kapjuk, hogy a determináns egyenlő az alábbi determinánssal:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 240.$$

48. Az első sort kivonva a többi sorból, majd a második sor kétszeresét kivonva a harmadikból, kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

49. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

50. 24. **51.** 144.

52. Ha $n = 1$ ill. $n = 2$, a determináns értéke 1 ill. -1, ha $n \geq 3$, akkor a determináns értéke 0 (az utóbbi esetben vonjuk ki az első sort a másodikból és a harmadikból).

53. Vonjuk ki az első sor a^{n-1}-szeresét a második sorból, a^{n-2}-szeresét a harmadik sorból, …, a-szorosát az utolsó sorból: így a főátló alatt csak nullák lesznek, a determináns értéke: $(1-a^n)^{n-1}$.

54. A determináns a 2, -1, -2, 1 számokból képezett Vandermonde-féle determináns, így értéke:

$$(-1-2)(-2-2)(1-2)(-2-(-1))(1-(-1))(1-(-2)) = 72.$$

55. Vandermonde-féle determináns; értéke -2880.

56. A determináns két Vandermonde-determináns összegére bomlik:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\left[(d-a)(d-b)(d-c) + (e-a)(e-b)(e-c)\right].$$

57. Az utolsó oszlop $b_1, b_2, \dots, b_n$-szeresét vonjuk ki rendre az első, második, …, n-edik oszlopból. A determináns értéke: $(a-b_1)(a-b_2)\dots(a-b_n)$.

58. Az első oszlop vagy az első sor szerinti kifejtéssel számoljunk. A determináns értéke: $a^n + (-1)^{n-1}b^n$, ahol n a determináns sorainak (oszlopainak) száma.

59. Az összes oszlopot adjuk az elsőhöz, majd az első sort vonjuk ki az összes többiből. Így azt kapjuk, hogy a determináns $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$, ahol n a determináns sorainak (oszlopainak) száma.

60. $n=1$ esetén $1+x_1y_1$, $n=2$ esetén $x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1$ a determináns értéke. Ha $n \geq 3$, akkor a determináns értéke 0. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy először a determinánst két determináns összegére bontjuk, majd mindkettőről belátjuk, hogy értékük 0. Az első determináns csupa 1-esből álló első sorát kivonjuk az összes többi sorból, az így kapott determináns értéke pedig valóban 0, hisz ha $x_2 = 0$, akkor a második sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_2 \neq 0$, akkor a második sorának x_3/x_2-szerese egyenlő a harmadik sorral. A második determináns értéke is 0, hiszen ha $x_1 = 0$, akkor az első sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_1 \neq 0$, akkor az első sor x_i/x_1-szeresét kivonva az i-edik sorból egy olyan determinánst kapunk, amelyben a második sortól kezdve minden sor 1-esekből áll, tehát a determinánsnak van két azonos sora.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

61. Ha $pqrs \neq 0$, akkor szorozzuk be az első sort p-vel, a másodikat q-val, a harmadikat r-rel, a negyediket s-sel, majd a negyedik oszlopból emeljünk ki $pqrs$-t; így egy Vandermonde-determinánst kapunk:

$$D = \frac{pqrs}{pqrs}\begin{vmatrix} p^3 & p^2 & p & 1 \\ q^3 & q^2 & q & 1 \\ r^3 & r^2 & r & 1 \\ s^3 & s^2 & s & 1 \end{vmatrix} = (q-p)(r-p)(s-p)(r-q)(s-q)(s-r).$$

Ha $pqrs = 0$, például $s = 0$, akkor az eredeti determináns negyedik oszlopa szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy:

$$D = pqr\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 \\ q^2 & q & 1 \\ r^2 & r & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezekből rövid átalakítás után látható, hogy az összefüggés ebben az esetben is fennáll.

62. Lineárisan összefüggő sorvektorok közül mindig kiválasztható olyan, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az első sor ilyen, azaz az i-edik sorvektort $\mathbf{v}_i$-vel jelölve $\mathbf{v}_1$ felírható az alábbi alakban:

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Ekkor az első sorhoz hozzáadva a második sor $(-c_2)$-szeresét, a harmadik sor $(-c_3)$-szorosát, ..., az utolsó sor $(-c_n)$-szeresét, az első sorban csupa zérust kapunk, azaz a determináns értéke zérus. (A következő fejezetben látni fogjuk, hogy egy determináns értéke pontosan akkor zérus, ha sorvektorai lineárisan összefüggőek.)

63. $\sin(\xi+\delta) = \sin\xi\cos\delta + \cos\xi\sin\delta$, így a harmadik oszlop az első és a második oszlop lineáris kombinációja, vagyis az oszlopvektorok lineárisan összefüggőek, tehát a determináns értéke 0.

64. Az első és második oszlop összege a harmadik oszlop (ill. az első és a második sor különbsége a harmadik sor), tehát az oszlopvektorok (ill. sorvektorok) lineárisan összefüggőek.

65. A determinánst az első oszlopa szerint kifejtve, majd a (-1)-hez tartozó aldeterminánst ismét az első oszlopa szerint kifejtve, stb... igazolhatjuk a feladat állítását.

66. $a_1 = \det[1] = 1$, $a_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, az $(n \times n)$-es determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

67. Fejtsük ki P_n-t az első sora szerint; azt kapjuk, hogy $P_n = a_nP_{n-1} + P_{n-2}$. Így $\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}}$, amiből következik az állítás.

68. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, és elvégezve az ajánlott oszlop-, majd sorműveleteket kapjuk, hogy $D_n = D_{n-1}$. Tehát, $D_n = D_{n-1} = \ldots = D_1 = 1$. Részletesebben:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \ldots & \binom{n-1}{0} \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \ldots & \binom{n}{1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \ldots & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \ldots & \binom{n-2}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \ldots & \binom{n-1}{1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-2} & \ldots & \binom{2n-4}{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{0}{0} \end{vmatrix} = 1.$$

69. Az első sort kivonjuk az összes többiből, majd a determinánst kifejtjük az első oszlopa szerint.

70. Mivel $F(1) = F(2) = \ldots = F(n) = 0$ és $F(n+1) = n!$, ezért a determináns mellékátlója fölött csak 0 áll, a mellékátlóban csupa $n!$, így a **41.** feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel a determináns értéke $(-1)^{n(n+1)/2}(n!)^{n+1}$.

71. Mivel $F(x)$ n-edfokú polinom, és a legmagasabb kitevőjű tagja x^n, ezért $F^{(n)}(x) = n!$ és $F^{(i)}(x) = 0$, ha $i > n$. Így a determináns mellékátlójában $(n!)$-ok állnak, alatta nullák. A determináns értéke az előző feladathoz hasonlóan itt is $(-1)^{n(n+1)/2}(n!)^{n+1}$.

72. Egyszerű számítással ellenőrizhető. A feladatbeli összefüggés általánosítható: Függvényekből álló, n-edrendű determináns deriváltja felbomlik n olyan determináns összegére, melyekben ugyanazok a függvények szerepelnek, mint az eredeti determinánsban, kivéve az i-edik determináns i-edik sorát, melyben az eredeti determináns i-edik sorában lévő függvények deriváltjai szerepelnek ($i = 1, 2, \ldots, n$).

73. Adjuk a harmadik sorhoz az első 100-szorosát és a második 10-szeresét. Így az utolsó sorban a megadott, 7-tel osztható számok szerepelnek. Ha e sor szerint fejtjük ki a determinánst, akkor minden összeadandó osztható lesz 7-tel, tehát a determináns is.

74. $630 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$. A harmadik oszlop minden eleme osztható 5-tel, a negyedik sor minden eleme osztható 2-vel, a megadott ötjegyű számok oszthatóak 9-cel is. Így az előző feladat megoldásának módszerét is felhasználva kapjuk, hogy a determináns osztható 630-cal.

75. Legyen a háromszög két oldalvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, mégpedig $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$; ekkor $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = c$. A háromszög területének négyzete:

$$\left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - (\mathbf{ab})^2\right) = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}\right)^2\right),$$

ugyanis a koszinusz tétel szerint $c^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{ab}$, azaz $\mathbf{ab} = (c^2 - a^2 - b^2)/2$. Másrészt, a determináns második, harmadik, negyedik sorát az elsőhöz adva, onnan $(a+b+c)$-t kiemelve, majd az első oszlopot a többiből kivonva, végül az első sor szerint kifejtve olyan alakot kapunk, ahonnan közvetlen számolással adódik, hogy

$$-\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}(a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-a & b-a \\ c-b & -b & a-b \\ b-c & a-c & -c \end{vmatrix}.$$

76. Vonjuk ki a negyedik sort a többiből, majd fejtsük ki a determinánst a negyedik oszlopa szerint:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 & 0 \\ a_2 - a_4 & b_2 - b_4 & c_2 - c_4 & 0 \\ a_3 - a_4 & b_3 - b_4 & c_3 - c_4 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \\ a_2 - a_4 & b_2 - b_4 & c_2 - c_4 \\ a_3 - a_4 & b_3 - b_4 & c_3 - c_4 \end{vmatrix},$$

ez pedig éppen a $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$ vektorok vektori szorzatának hatoda, vagyis a tetraéder előjeles térfogata.

77. A determináns első oszlopának kétszeresét hozzáadva a harmadik oszlophoz kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

így az előző feladatbeli állítást felhasználva, a négy pont által meghatározott tetraéder térfogata nulla, tehát a négy pont egy síkban van.

78. Mindhárom determinánst a következőképpen számítjuk ki. Legyen $\mathbf{A}$ a determinánshoz tartozó mátrix. Tekintsük az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrix determinánsát. Ezt könnyű kiszámítani (hisz a főátlón kívül csak nullák állnak), s ennek négyzetgyöke lesz a determináns értéke, ugyanis:

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2.$$

Ezek alapján a három determináns értéke: $a^2 + b^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4$.

79. A determinánsok szorzási szabályát is felhasználva:

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_2y_1 - x_1y_2 & -x_2y_2 + x_1y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

A négy illetve a nyolc négyzet összegére vonatkozó analóg összefüggések hasonlóan bizonyíthatóak. (Hurwitz bebizonyította, hogy ha n négyzetszám összegére igaz a feladatbelivel analóg összefüggés, akkor $n = 1, 2, 4$ vagy 8.)

80. Mivel az adott mátrix determinánsa $-12 \neq 0$, azaz a mátrixból kiválasztható nem zérus értékű determinánsok rendszámának maximuma 3, ezért a mátrix rangja 3.

81. Mivel az adott mátrix determinánsa 0, de például $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, azaz a mátrixból kiválasztható nem zérus értékű determinánsok rendszámának maximuma 2, ezért a mátrix rangja 2.

82. Mivel az első sornak a második és a harmadik sor is konstansszorosa, ezért minden másodrendű aldetermináns 0, de van elsőrendű nem-0 aldetermináns (sőt, mind ilyen); tehát a rang 1.

83. Ha $ad - bc \neq 0$, akkor a rang 2; ha $ad - bc = 0$, de a, b, c, d legalább egyike nem 0, akkor a rang 1; ha $a = b = c = d = 0$, akkor a rang 0.

84. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \quad \begin{matrix} -2S_1 \to S_2 \\ +S_1 \to S_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \quad -S_2 \to S_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen már leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, de az átalakítás folytatható is a következőképpen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \qquad \begin{matrix} -O_1 \to O_2 \\ -2O_1 \to O_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \qquad -2O_3 \to O_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

85. $\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; a rang 2.

86. Az átalakítások: $-3S_1 \to S_2$, $-4iS_1 \to S_3$, $+iS_2 \to S_3$; a rang 2.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

87. $\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; a rang 4.

88. $\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; a rang 2.

89. Vonjuk ki az utolsó oszlopot a többiből. A kapott mátrixból leolvasható, hogy a rang 4.

90. Mivel $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, azaz a mátrixnak van másodrendű nem zérus értékű aldeterminánsa, ezért a rang legalább 2. A mátrix determinánsa $b(1+2a) - 25$; ezért a rang 3, ha $b(1+2a) - 25 \neq 0$.

91. Vonjuk ki az első sor kétszeresét a második sorból, háromszorosát a harmadikból. Kapjuk, hogy a rang 1, ha $a = 6$, $b = 9$; a rang 2, ha $a = 6$, $b \neq 9$; a rang 3, ha $a \neq 6$.

92. A rang 1, ha $a = b = 0$; a rang 2, ha $a \neq 0$, $b = 0$; a rang 3, ha $b \neq 0$.

93. A rang 0, ha $a = b = 0$; a rang 2, ha $a \neq 0$ és $b = -a$; a rang 3, ha $b \neq -a$.

94. A rang 1, ha $a = b = 1$; a rang 2, ha $a + b + 1 = 0$; egyébként 3.

95. A rang 1, ha $a = \pm 2$, $b = 0$; a rang 2, ha $a \neq \pm 2$, $b = 0$, vagy $a \neq \pm 2$, $a \neq 4$, $b = 3(a^2 - 4)/(4 - a)$; minden más esetben a rang 3.

96. Az első és a második sort felcserélve, majd az új mátrixban az első sor megfelelő többszörösét a többihez hozzáadva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & (1-\lambda^2) & (1-\lambda) & (1-\lambda^2) \\ 0 & (1-\lambda) & (\lambda-1) & (\lambda^2-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Az első oszlop (-1)-szeresét a harmadik oszlophoz, $(-\lambda)$-szorosát a második és a negyedik oszlophoz adva:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda^2) & (1-\lambda) & (1-\lambda^2) \\ 0 & (1-\lambda) & (\lambda-1) & (\lambda^2-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Jelöljük a legutóbbi mátrixot $\mathbf{B}$-vel. Ha $\lambda = 1$, akkor $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tehát $\mathbf{B}$ rangja 1, és így $\mathbf{A}$ rangja is 1.

Ha $\lambda \neq 1$, akkor a 2. és 3. sort oszthatjuk $(1 - \lambda)$-val, és így azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 1 & (1+\lambda) \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Az 1., 3. és 4. oszlopból képzett determináns értéke 1, nemnulla, tehát $\mathbf{A}$ rangja 3.

97. Hasonló feladatokra érvényes elv, hogy ha valamelyik elem sorába és oszlopába is nullákat kívánunk behozni, úgy olyan elemet válasszunk, ha lehet, ami 1 vagy -1 és amelynek sorában és oszlopában sincsen paraméter. Legyen az első ilyen elem az 1. sor 2. eleme (ezt félkövér szám jelzi)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ \lambda & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

A második ilyen elemnek választhatjuk a 2. sor 3. elemét:

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-15) & 0 & 0 & -1 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-15) & 0 & 0 & -1 & -15 \end{bmatrix}.$$

A következő ilyen elemnek a 3. sor 4. elemét célszerű választani:

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tehát a mátrix rang definíciója (**D 19.12**) szerint rang $\mathbf{A} \geq 3$. A kérdés az, hogy kiválasztható-e nemnulla értékű negyedrendű determináns. Ez az utolsó oszlopot biztosan nem tartalmazhatja.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\cdot 1 = -\lambda+1.$$

Tehát, ha $\lambda \neq 1$, akkor rang $\mathbf{A} = 4$, illetve $\lambda = 1$ esetén rang $\mathbf{A} = 3$.

98. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & a & b & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & (a+3) & (b-3) & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & (b-3) \end{bmatrix}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & (a+3) & (b-3) & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & (b-3) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & (b-7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b-8) \end{bmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tehát rang $\mathbf{A} \geq 3$ minden a-ra és b-re.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & (b-7) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a$, így ha $a \neq 0$, akkor rang $\mathbf{A} = 4$.

Ha $a = 0$, akkor $\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b-7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b-8) \end{bmatrix}$..

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b-7) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (b-8) \end{vmatrix} = 2\cdot(b-7)\cdot(b-8) \neq 0$, ha $b \neq 7$, és $b \neq 8$, és ekkor rang $\mathbf{A} = 4$. Ha $a = 0$ és $b = 7$, vagy $a = 0$ és $b = 8$, akkor $\mathbf{A}$-ból csak nulla értékű negyedrendű determinánsok választhatók ki, tehát rang $\mathbf{A} \leq 3$, vagyis rang $\mathbf{A} \geq 3$ miatt rang $\mathbf{A} = 3$.

Összefoglalva: a rang 4, ha $a \neq 0$, vagy $a = 0$ és $b \neq 7$ és $b \neq 8$; a rang 3, ha $a = 0$ és $b = 7$, vagy $a = 0$ és $b = 8$.

99. A rang α és β tetszőleges értékére 5.

100. Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\det \mathbf{A} = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}$.

101. Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\det \mathbf{A} = 16$, ezért $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

102. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{19}\begin{bmatrix} 1 & 15 & -13 \\ 5 & -39 & 30 \\ -5 & 20 & -11 \end{bmatrix}$.

103. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{abc}\begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$, ha $abc \neq 0$. Az $abc = 0$ esetben inverz nem létezik.

104. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, ha $ad - bc \neq 0$.

105. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

106. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

107. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}$.

108. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

109. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} -S_1 \to S_2 \\ -S_1 \to S_3 \end{matrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} -S_3 \to S_1 \ \frac{1}{2}S_3 \\ -S_3 \to S_2 \end{matrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \begin{matrix} -3S_2 \to S_1 \\ S_2 \leftrightarrow S_3 \end{matrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$. Tehát $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

110. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{6} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

111. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

112. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

113. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

114. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} i & 3-2i & -3-6i \\ -1 & 2+2i & 4-3i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

115. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{smallmatrix} -S_1 \to S_3 \\ -4S_2 \to S_3 \end{smallmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$.

A bal oldali mátrixban egy csupa nullából álló sor keletkezett, tehát nem létezik az inverz. Valóban, $\det \mathbf{A} = 0$.

116. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

117. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{a}{b^2} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{b}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$.

118. b), e), g) nem, a többi igen.

119. Könnyen ellenőrizhető, hogy az állítás mindhárom elemi sorátalakítással igaz. Az egyszerűség kedvéért a bizonyítást csak $n = 3$ esetére írjuk fel, és arra az elemi átalakításra, amely felcseréli a második és harmadik sort, de a bizonyítás tetszőleges n-re és a másik két elemi átalakításra is hasonlóan írható fel. Legyen $\mathbf{A}$ egy teszőleges 3×3-as mátrix, és jelölje $\mathbf{E}'$ azt az elemi mátrixot, melyet $\mathbf{E}$-ből a második és harmadik sor felcserélésével, $\mathbf{A}'$ azt a mátrixot, melyet A-ból ugyanezzel az átalakítással kapunk, azaz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & j\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a & b & c\\ g & h & j\\ d & e & f\end{bmatrix},\qquad \mathbf{E}'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

A feladat szerint meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{E}'\mathbf{A}=\mathbf{A}'$. Valóban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c\\ g & h & j\\ d & e & f\end{bmatrix}.$$

120. Alakítsuk át elemi sorátalakításokkal az invertálandó **A** mátrixot az egységmátrixszá. Mivel minden elemi sorátalakításnak megfelel egy elemi mátrixszal balról való szorzás, ezért ha az alkalmazott átalakítások mátrixait rendre $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2,\dots,\mathbf{T}_k$ jelöli, akkor az átalakítások az alábbi mátrixszorzásokkal is elvégezhetőek:

$$\mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1}\dots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\mathbf{T}_k\dots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1=\mathbf{A}^{-1}$, vagyis $\mathbf{A}^{-1}$ megkapható az **E**-n elvégzett azonos elemi sorátalakításokkal, hisz $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{T}_k\dots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_k\dots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{E}$.

121. $(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})=\mathbf{E}-\mathbf{A}^k=\mathbf{E}.$

122. $\mathbf{T}_\alpha\mathbf{T}_\beta=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}=\mathbf{T}_{\alpha+\beta}$$

$$\mathbf{T}_\alpha^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}=\mathbf{T}_{-\alpha}.$$

123. A determinánsok szorzási szabálya szerint $\det\mathbf{A}\det\mathbf{A}^T=\det\mathbf{E}$, azaz $\det\mathbf{A}\det\mathbf{A}^T=1$, másrészt $\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}^T$, tehát $(\det\mathbf{A})^2=1$.

124. Legyen a tekintett mátrix $\mathbf{A}=\left[\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right]$. Az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$ egyenlőségből, és abból, hogy $\det\mathbf{A}=1$, az alábbi egyenletek adódnak:

$$a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0,\ ad-bc=1.$$

Az első két egyenletből adódik, hogy a $(-\pi,\pi]$ intervallumban egyértelműen léteznek olyan α és ϕ számok, hogy $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, $c=\sin\phi$, $d=\cos\phi$. A harmadik és negyedik egyenletből azt kapjuk, hogy $\sin(\alpha+\phi)=0$ és $\cos(\alpha+\phi)=1$. Mivel $\alpha=\phi=\pi$ nem lehetséges, ezért $\alpha+\phi\in(-\pi,\pi)$, és ebben az intevallumban csak az $\alpha=-\phi$ az egyetlen megoldás. Ez pedig bizonyítja a feladat állítását.

125. Ha **A** és **B** unitérek, akkor
$(\mathbf{AB})^*(\mathbf{AB})=(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB})=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{E}$,
tehát **AB** is unitér. Másrészt az $\det(\mathbf{A}^*)=\det(\mathbf{A})$ és $\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})=\det(\mathbf{E})=1$ egyenlőségekből következik, hogy $(\det\mathbf{A})^2=1$, ami bizonyítja állításunkat.

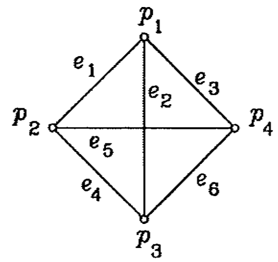
126. Legyen a társaság n fős, és jelölje k_i azt, hogy az i-edik résztvevő hány másik résztvevővel fogott kezet ($i=1,2,\dots,n$). A $k_1+k_2+\cdots+k_n$ összeg éppen a kézfogások számának kétszerese, tehát páros szám, hisz minden egyes kézfogást mindkét kezet fogó embernél számba vettünk. Egész számok összege pedig csak úgy lehet páros, ha benne a páratlan összeadandók száma páros, vagyis a fenti összegben csak páros sok k_i szám lehet páratlan.

127. E feladat, matematikai tartalmát tekintve azonos az előzővel. Jelölje a gráf szögpontjait $p_1, p_2, \ldots, p_n$, és jelölje $d(p_i)$ a p_i pont fokát. A $d(p_1) + d(p_2) + \cdots + d(p_n)$ összeg épp az élek számának kétszeresét adja, vagyis páros szám, így a benne lévő páratlan összeadandók száma páros.

128. Adjuk össze a szögpontok fokszámait, az összeg nk. Ez kétszerese az élek számának, tehát az élek száma $\frac{1}{2}nk$.

129. Minden szögpontból $n-1$ másikhoz vezet él, ezeket összeszámolva $n(n-1)$-et kapunk, de ebben az összegben minden élt kétszer számoltunk, így az élek száma $\frac{1}{2}n(n-1)$. (Mondhatjuk azt is, hogy a teljes gráf $n-1$-reguláris, mivel minden szögpontra $k = n-1$ él illeszkedik, így az előző feladat szerint az élek száma $\frac{1}{2}n(n-1)$.)

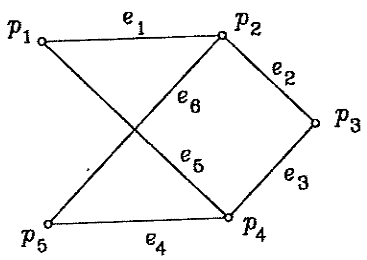
130. Teljes gráf szomszédsági mátrixában minden elem 1, kivéve a főátlóbelieket, amelyek értéke 0, mivel bármely két különböző szögpontot összeköt egy él. Az ábra szerinti számozás esetén:



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

133. $$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ (l. ábra)



134. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

135. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

136. Az szomszédsági mátrix a_{ij} eleme akkor 1, ha az i-edik pontból vezet él a j-edikbe, egyébként 0. Tehát az $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$ összeg azt adja meg, hogy az i-edik pontból hány pontba vezet él, ez pedig épp a pont foka. Mivel irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa szimmetrikus, ezért ugyanez az összefüggés igaz az oszlopokra is.

137. Az előző feladat állítását felhasználva, a szomszédsági mátrixot egy csupa egyesből álló $n \times 1$-es mátrixszal kell megszorozni:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(p_1) \\ d(p_2) \\ \vdots \\ d(p_n) \end{bmatrix}.$$

138. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad XX^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

139. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad XX^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

140. Jelölje az $\mathbf{X}$ mátrix i-edik sorának j-edik elemét $(\mathbf{X})_{ij}$. E jelöléssel:

$$\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{X})_{ik}(\mathbf{X}^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{X})_{ik}(\mathbf{X})_{jk},$$

ami az $\mathbf{X}$ mátrix i-edik és j-edik sorának skaláris szorzata. Az $i \neq j$ esetben e skaláris szorzat 1, ha fut él az i-edik és j-edik pont között, és 0, ha nem. Az $i = j$ esetben pedig e skaláris szorzat épp az i-edik pont fokát adja, ami k. Ez bizonyítja állításunkat.

141. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{A}^3 = [b_{ij}]_{4\times4}$. Például $b_{21} = 4$, mert a 2 jelű pontból az 1 jelűbe vezető 3-hosszú séták száma 4, éspedig e séták a következők: 2121, 2421, 2321, 2141.

142. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \left(\mathbf{A}^2\right)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{A}^4 = [b_{ij}]_{4\times4}$. Például $b_{33} = 6$, mert 6 különböző, a 3 jelű pontból önmagába vezető irányított séta van: 32323, 34343, 32343, 34323, 32143, 34213.

143. Tekintsük az irányítatlan gráf esetét. Használjuk az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és az $\mathbf{A}^m = [a_{ij}^{(m)}]$ jelöléseket. Vizsgáljuk meg az $\mathbf{A}^2$ mátrix egy elemét. A mátrixszorzás definíciója szerint:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj}.$$

Az $a_{i1}a_{1j}$ szorzat megadja az i-edik pontból az első ponton át a j-edik pontba vezető 2-hosszú séták számát, az $a_{i2}a_{2j}$ szorzat a második ponton át vezető séták számát, stb. Összegük tehát az összes 2-hosszú séták számát adja. Mivel $\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{A}$, ezért hasonló okoskodással, az

$$a_{ij}^{(m)} = a_{i1}^{(m-1)}a_{1j} + a_{i2}^{(m-1)}a_{2j} + \cdots + a_{in}^{(m-1)}a_{nj}$$

képletet használva, teljes indukcióval adódik az állítás. Az irányított gráf esete hasonlóan vizsgálható.

144. Használjuk az $\mathbf{A}^2 = [a_{ij}^{(2)}]$ jelölést. Az $\mathbf{A}^2$ mátrix főátlójának egy eleme a mátrixszorzás definíciója szerint:

$$a_{ii}^{(2)} = a_{i1}a_{1i} + a_{i2}a_{2i} + \cdots + a_{in}a_{ni}.$$

Mivel a gráf irányítatlan, ezért $a_{ij} = a_{ji}$, és mivel egyszerű gráfról van szó, ezért $a_{ij} = 0$ vagy $a_{ij} = 1$, és így $a_{ij}^2 = a_{ij}$. Ezt felhasználva, az előző összeg az alábbiak szerint alakítható át:

$$a_{ii}^{(2)} = a_{i1}a_{i1} + a_{i2}a_{i2} + \cdots + a_{in}a_{in} =$$

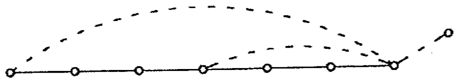
$$= a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}.$$

Ez utóbbi összeg pedig valóban az i-edik pont fokát adja, hisz azt fejezi ki, hogy az i-edik pont hány másik ponttal van összekötve. (Másik megoldás: az előző feladat szerint $a_{ii}^{(2)}$ az i-edik pontból önmagába vezető 2-hosszú séták számát adja, ami egyszerű gráf esetén épp a fokszám.)

145. Ha $l > k$ és $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^l = \mathbf{0}$ ugyancsak fennáll. Ha a gráfban volna irányított kör, akkor volna tetszőlegesen hosszú irányított séta is, vagyis $\mathbf{A}$ tetszőlegesen nagy hatványában is találnánk nemnulla elemet. Tehát, ha valamely k-ra $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$, akkor a gráfban nincs irányított kör. Fordítva: ha a gráfban nincs irányított kör, akkor a leghosszabb irányított séta hossza $n-1$, ahol n a szögpontok száma. Így, a **143.** feladat szerint, $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ biztosan fennáll.

146. Ha a p_i és p_j pontokat nem köti össze k hosszú út, és így séta sem, akkor $a_{ij}^{(k)} = 0$, ha összeköti, akkor $a_{ij}^{(k)} \neq 0$.

147. Tekintsük a fában található leghosszabb utat. Megmutatjuk, hogy ennek mindkét végpontja elsőfokú. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamelyik végpont nem elsőfokú, azaz vezet ki belőle még egy él a fa valamelyik pontjába. Az út többi pontjába nem vezethet, hiszen akkor kört tartalmazna a fa. Ha pedig egy másik pontba vezetne az él, akkor az eredeti utat ezzel megtoldva egy hosszabb utat kapnánk, ami ellentmond feltevésünknek.



148. Bizonyítsunk a pontszámra vonatkozó teljes indukcióval. Az $n = 2$ esetben az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden k szögpontú fára, azaz mindegyiküknek $k-1$ éle van. Tekintsünk egy $k+1$ pontú fát. Az előző feladat szerint ennek van egy elsőfokú pontja. Hagyjunk el egy ilyen pontot a hozzá illeszkedő egyetlen éllel együtt. A maradék k pontú gráfnak $k-1$ éle van, így a $k+1$ pontúnak k éle.

149. Ha $\mathcal{G}$-ben van kör, akkor hagyjuk el a kör egy élét. Ha a maradék gráfban még mindig van kör, akkor ennek is hagyjuk el egy élét, és ezt az eljárást addig folytassuk, amíg marad a gráfban kör. Ha már nincs több kör a gráfban, akkor fát kaptunk, ugyanis mindig csak egy körből hagytunk el élt, tehát a gráf összefüggőségét nem rontottuk el, és a gráfnak nem hagytuk el egyetlen pontját sem.

150. Legyen v_1 az $\mathcal{F}$ fa egy elsőfokú pontja, e_1 a hozzá illeszkedő egyetlen él (l. **147.** feladat). Legyen v_2 az $\mathcal{F}$-ből v_1 elhagyása után visszamaradó fa egy elsőfokú pontja, e_2 a hozzá illeszkedő egyetlen él, stb. Soroljuk fel az illeszkedési mátrix sorait a $v_1, v_2, \ldots, v_n$, oszlopait az $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ sorrendnek megfelelően (l. **148.** feladat). E mátrix első $n-1$ sorában egy olyan $(n-1) \times (n-1)$ méretű mátrix áll, melynek főátlójában minden elem 1 (irányított gráf esetén 1 vagy -1), fölötte pedig csupa 0 áll. Az illeszkedési mátrix rangja tehát legalább $n-1$, de több nem is lehet. (Általánosabban megmutatható az is, hogy egy n pontú, összefüggő, hurokélmentes gráf illeszkedési mátrixának $n-1$ oszlopvektora pontosan akkor lineárisan független, ha az oszlopoknak megfelelő élek a gráf egy fáját alkotják.)

151. Az n pontú, összefüggő, hurokélmentes irányított $\mathcal{G}$ gráf mátrixának n sora van. Mivel $\mathcal{G}$ hurokélmentes, ezért minden oszlopában egy $+1$ és egy -1 áll, vagyis a sorvektorok összege a zérusvektor. Ez pedig azt jelenti, hogy az illeszkedési mátrix rangja legföljebb $n-1$. Másrészt legyen $\mathcal{F}$ egy n pontú (és így $(n-1)$-élű) fa ebben a gráfban (l. **149** feladat). Az $\mathcal{F}$ éleinek megfelelő oszlopok alkotta mátrix éppen $\mathcal{F}$ illeszkedési mátrixa, aminek az előző feladat szerint $n-1$ a rangja, tehát ennyi a rangja $\mathcal{G}$ illeszkedési mátrixának is.

20. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszerek (megoldások)

1. Írjuk át az egyenletrendszert $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ mátrixszorzatos alakba:

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

T 19.17 szerint az $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & -8 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 20 & -16 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tehát **T 20.2** szerint

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & -8 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 20 & -16 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$ és ebből $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

2. $\det \mathbf{A} = 1$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -23 \\ -2 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

3. $\det \mathbf{A} = -2$, $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

4. $\det \mathbf{A} = 9$, $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 3 & 10 \\ 4 & 14 & -3 & -22 \\ 0 & 9 & 0 & -9 \\ -3 & -15 & 0 & 30 \end{bmatrix}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

5. $\det \mathbf{A} = -5abc \neq 0$, $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{5abc} \begin{bmatrix} -2ac & a^2 & -3ab \\ 3bc & ab & -3b^2 \\ 2c^2 & -ac & -2bc \end{bmatrix}$, $x_1 = -a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$.

6. Jelölje a keresett inverz mátrixot $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. A **D 19.16** definíció szerint ekkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a kijelölt mátrixszorzást

$$\begin{bmatrix} (x_{11}+2x_{21}) & (x_{12}+2x_{22}) \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A mátrixok egyenlőségéből következik, hogy

$$\begin{aligned} x_{11}+2x_{21} &= 1, \\ x_{12}+2x_{22} &= 0, \\ x_{21} &= 0, \\ x_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_{11} = 1$, $x_{12} = -2$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 1$. Az inverz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. A Cramer-szabály alkalmazhatóságának az a feltétele, hogy az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezzék, teljesül.
Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0.$$

A Cramer-szabály szerint $x_1 = \dfrac{D_1}{\det \mathbf{A}}$, ahol D_1 az első módosított determináns:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180; \quad \text{ebből } x_1 = \frac{180}{60} = 3. \text{ Hasonlóan}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60 \quad \text{és } x_2 = \frac{D_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{60}{60} = 1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60 \text{ és } x_3 = \frac{D_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{60}{60} = 1.$$

8. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. ($\det \mathbf{A} = 12$, $D_1 = 24$, $D_2 = -24$, $D_3 = 36$.)

9. $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$. ($\det \mathbf{A} = -27$, $D_1 = -81$, $D_2 = -108$, $D_3 = -135$.)

10. Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0.$$

A Cramer-szabály szerint $x_1 = \dfrac{D_1}{\det \mathbf{A}}$, ahol D_1 az első módosított determináns: $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$; ebből $x_1 = \dfrac{153}{-153} = -1$. Hasonlóan

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{D_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{153}{-153} = -1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad x_3 = \frac{D_3}{\det \mathbf{A}} = 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -153 \quad \text{és} \quad x_4 = \frac{D_4}{\det \mathbf{A}} = \frac{-153}{-153} = 1.$$

11. $\det \mathbf{A} = -20, \ x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1, \ x_4 = -1.$

12. Az egyenletrendszer és az ismeretlenek száma egyenlő, és az egyenletrendszer determinánsa $16 \neq 0$; a Cramer-szabály tehát alkalmazható. Mindegyik módosított determináns értéke 0 (mert bennük az egyik oszlop minden eleme 0); ezért $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

13. $x_4 = -2$ $(\det \mathbf{A} = 324, \ D_4 = -648)$.

14. $x_1 = 1$ $(\det \mathbf{A} = 98, \ D_1 = 98)$.

15. **Első megoldás.** $D = \det \mathbf{A} = -20 \neq 0$, tehát a Cramer-szabály alkalmazható; $D_1 = 40$, $D_2 = -40$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; $x_1 - x_2 = -4$.

Második megoldás. Vezessük be x_1 helyett az $x_1^* = x_1 - x_2$ új ismeretlent. Ekkor $x_1 = x_1^* + x_2$; így az egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} x_1^* + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1^* + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1^* + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1^* + 7x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5. \end{aligned}$$

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 80;$$

ezekből $x_1^* = \dfrac{80}{-20} = -4$. Az első megoldással összehasonlítva: három determináns helyett elég volt kettőt kiszámítani.

16. 1. megoldás: Kövessük a Gauss-módszert az egyenletrendszer kiegészített mátrixán:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & 3 & 17 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right].$$

Adjuk hozzá az első sor 2-szeresét a másodikhoz, -2-szeresét a harmadikhoz, 1-szeresét a negyedikhez, -3-szorosát az ötödikhez. Ekkor az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer kiegészített mátrixához jutunk:

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right].$$

Azért, hogy a 2. sor 2. együtthatója nemnulla lehessen, cseréljük fel az egyenletrendszerben a 2. és 3. ismeretlen szerepét, tehát cseréljük fel a mátrixban a 2. és 3. oszlopot. Ha a kapott mátrix 2. sorának 2. együtthatója 1 vagy -1 lenne, úgy biztosan elkerülhetnénk a törtekkel való számolást. Adjuk ezért a 3. sor (-1)-szeresét a 2. sorhoz:

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 2 & 14 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right].$$

A 2. sor (-1)-szeresét adjuk az 1. sorhoz, 5-szörösét a 3., (-2)-szeresét a 4., (-3)-szorosát pedig az 5. sorhoz:

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Hogy a 3. sor 3. együtthatója 0-tól különbözzön, cseréljük fel a 3. és 5. oszlopot (felcserélve a 3. és 5. ismeretlen szerepét):

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Szorozzuk meg a 3. sort $1/6$-dal, majd az így kapott sor (-1)-szeresét adjuk a 2. sorhoz, (-3)-szorosát a 4. sorhoz, (-2)-szeresét az 5. sorhoz:

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az átalakítás során az oszlopok cseréjével együtt a változók is cserélődtek, éspedig a következőképp: a 2. és 3. oszlop cseréje után a sorrend x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, a 3. és 5. oszlop cseréje után a sorrend x_1, x_3, x_5, x_4, x_2. Így az előbbi mátrix a következő lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixa:

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1 \qquad\qquad &+1\cdot x_4+1\cdot x_2 = 1\\ 1\cdot x_3 \qquad &+1\cdot x_4 \qquad\quad = -2\\ 1\cdot x_5 & \qquad\qquad\qquad = 3. \end{aligned}$$

Az egyenletekből az x_1, x_3, x_5 ismeretleneket kifejezve:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 - x_2\\ x_3 &= -2 - x_4\\ x_5 &= 3, \end{aligned}$$

ahol x_4 és x_2 tetszőlegesen választható.

2. megoldás: Az előző megoldás módosítható úgy is, hogy az oszlopcseréket elhagyjuk, de ugyanazokat a sorműveleteket hajtjuk végre. Így ugyanarra az egyenletrendszerre jutunk, mint az 1. megoldásban. Tehát a lépések a következők:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -6 & -8 & 0 & 10\\ 2 & 2 & -3 & -1 & 3 & 17\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 9\\ 3 & 3 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 & 14\\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 11\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 11\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Minden sorban az első nemnulla együtthatónak megfelelő változót kifejezve:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 - x_4,\\ x_3 &= -2 - x_4,\\ x_5 &= 3. \end{aligned}$$

3. megoldás: A módosított Gauss-módszerben csak sorműveleteket végzünk, és a kiválasztott elem oszlopában csak az elem alatt nullázunk. Ennek megfelelően a lépések a következők:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -6 & -8 & 0 & 10\\ 2 & 2 & -3 & -1 & 3 & 17\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 9\\ 3 & 3 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 & 14\\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 11\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 11\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az így kapott egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5&=2\\ x_3+\ x_4+x_5&=1\\ x_5&=3 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $x_5 = 3$, ezt a második egyenletbe helyettesítve és x_4-et paraméternek választva kapjuk, hogy $x_3 = -2-x_4$, végül ezeket az első egyenletbe helyettesítve és x_2-t paraméternek választva kapjuk, hogy $x_1 = 1-x_2-x_4$.

1. Megjegyzés. A megoldásainkban x_2, x_4 tetszőleges értéket vehetnek fel, vagyis paraméter szerepet játszanak. Az x_2 és x_4 helyett azonban más is lehet paraméter; például a megoldást $x_4 = -3+x_1+x_2$, $x_4 = 1-x_1-x_2$, $x_5 = 3$ alakba rendezve át, x_1 és x_2 lesz a paraméter. Általában is igaz, hogy ha végtelen sok megoldás van, a paraméterek kiválasztása nem egyértelmű.

2. Megjegyzés. Az egyenletrendszer ún. megoldásvektora

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] &= [1-x_2-x_4,x_2,-2-x_4,x_4,3] =\\ &= [1,0,-2,0,3]+x_2[-1,1,0,0,0]+x_4[-1,0,-1,1,0].\end{aligned}$$

17. Az előző példa megoldása szerint járunk el, de most a módosított Gauss-módszert alkalmazzuk. A kiegészített mátrix:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

Cseréljük fel az első és harmadik sort:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1\\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right].$$

Adjuk az első sor (-2)-szeresét a másodikhoz, (-5)-szörösét a harmadikhoz:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 & 0\\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1\\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right].$$

Adjuk a második sor (-2)-szeresét a harmadik sorhoz:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 & 0\\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Ez a mátrix annak a lineáris egyenletrendszernek a kiegészített mátrixa, amelyben a harmadik egyenlet: $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4 = 5$. Mivel ez egyetlen x_1, x_2, x_3, x_4 számnégyessel sem teljesíthető, ennek az egyenletrendszernek nincsen megoldása (és ezért a vele ekvivalens eredetinek sincs).

Megjegyzés. Ebből a példából a következő gyakorlati tanulságot vonhatjuk le: Ha a Gauss-módszer, vagy a módosított Gauss-módszer alkalmazásánál olyan kiegészített mátrixhoz jutunk, amelyben valamelyik sor utolsó eleme nem 0, de az összes többi elem 0, akkor a vizsgált egyenletrendszernek nincsen megoldása.

18. Most a Gauss-módszer szerint járunk el. A kiegészített mátrix:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right],$$

az utóbbi mátrixot úgy kaptuk, hogy a kiegészített mátrix az első sorának (-3)-szorosát a másodikhoz, (-1)-szeresét a harmadikhoz, (-2)-szeresét a negyedikhez adtuk hozzá.

Azért, hogy a második sor második elemével jól lehessen számolni, adjuk a harmadik sor (-3)-szorosát a második sorhoz:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \\ 0 & 0 & -12 & -36 \end{array}\right].$$

Ezt úgy kaptuk, hogy a baloldali mátrixban hozzáadtuk a második sor kétszeresét az elsőhöz, (-2)-szeresét a harmadikhoz, (-3)-szorosát a negyedikhez. Osszuk el a harmadik sort 10-zel, majd adjuk a harmadik sor 9-szeresét az elsőhöz, 5-szörösét a másodikhoz, (-12)-szeresét a negyedikhez:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -36 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ebből: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ adódik.

19. $x_1 = -1 + x_4$, $x_2 = x_5$, $x_3 = x_4 = 1 - \dfrac{x_5}{2}$, x_5 tetszőleges. Törtmentesen írhatjuk fel a megoldást, ha x_5 helyett x_4-et választjuk paraméternek: $x_1 = -1 + x_4$, $x_2 = 2 - 2x_4$, $x_3 = x_4$, $x_5 = 2 - 2x_4$, ahol x_4 tetszőleges.

20. Nincs megoldás.

21. $x_1 = 1 - 2x_2$, $x_3 = 0$, x_2 tetszőleges.

22. Nincs megoldás.

23. Nincs megoldás.

24. $x_1 = \dfrac{19}{3}$, $x_2 = -2$, $x_3 = \dfrac{2}{3}$.

25. $x_1 = 2 - x_3 - x_4$, $x_2 = 1 + x_3 - 3x_4$, x_3 és x_4 tetszőleges.

26. $x_1 = 5 - x_4 + x_5$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_5$, $x_3 = 2 + x_4 + 2x_5$, x_4 és x_5 tetszőleges. A megoldásvektor $\mathbf{x} = \left(5, \frac{1}{2}, 2, 0, 0\right) + x_4(-1, 0, 1, 1, 0) + x_5\left(1, \frac{1}{2}, 2, 0, 1\right)$.

27. $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$, x_3, x_4, x_5 tetszőleges.

28. $x_1 = -\frac{1}{2} - x_2 + \frac{3}{2}x_5$, $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_5$, $x_4 = 1$.

29. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

30. $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

31. Nincs megoldás.

32. Az egyenletrendszer mátrixában az első és a harmadik sort felcserélve:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Az első sor megfelelő többszöröseit a többi sorhoz hozzáadva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A legutóbbi mátrix második sorának (-1)-szeresét a többi sorhoz hozzáadva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az átalakítások utáni kiegészített mátrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A továbbiakban kétféleképpen járhatunk el.
I. Felírjuk a legutóbbi mátrixnak megfelelő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 - 11x_3 &= 0 \\ x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
II. Befejezzük a Gauss-módszer szerinti átalakítást, a 3. sor 11-szeresét hozzáadjuk az elsőhöz, (-7)-szeresét a másodikhoz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ebből (közvetlenül) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ adódik.

33. $x_1 = -\frac{2}{7}x_3$, $x_2 = -\frac{6}{7}x_3$, x_3 tetszőleges.

34. Csak a triviális megoldás létezik, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

35. $x_1 = \dfrac{3}{17}x_3 - \dfrac{13}{17}x_4$, $x_2 = \dfrac{19}{17}x_3 - \dfrac{20}{17}x_4$, x_3, x_4 tetszőleges.
Az $u = \dfrac{x_3}{17}$, $v = \dfrac{x_4}{17}$ új ismeretlenek bevezetésével:
$x_1 = 3u - 13v$, $x_2 = 19u - 20v$, $x_3 = 17u$, $x_4 = 17v$, u és v tetszőleges.
A megoldásvektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = u(3, 19, 17, 0) + v(-13, -20, 0, 17)$.

36. I. megoldás. Az egyenletrendszer mátrixának rangja 3; ez megegyezik az ismeretlenek számával, így **T 20.7** szerint csak triviális megoldás van: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
II. megoldás. Az egyenletrendszer determinánsa $84 (\neq 0)$, így **T 20.7** miatt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ adódik.

37. Az egyenletrendszer mátrixának (csak 4 sora van, és ezért) rangja legfeljebb 4; ez kisebb az ismeretlenek számánál, tehát **T 20.7** miatt létezik nemtriviális megoldás.

38. I. megoldás. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 2$ kisebb az ismeretlenek számánál, végtelen sok megoldás van, nemcsak triviális megoldás létezik.
II. megoldás. Minthogy $\det \mathbf{A} = 0$, így **T 20.7** szerint van nemtriviális megoldás, és ezért végtelen sok megoldás létezik.

39. Olyan c_1, c_2, c_3 konstansokat keresünk, melyekre

$$c_1(x^2+1) + c_2(x^2+x+1) + c_3(x-2) = x^2 - 3x + 5.$$

Az egyenlet mindkét oldalán összehasonlítva x^2, x, 1 együtthatóit, a $c_1+c_2 = 1$, $c_2+c_3 = -3$, $c_1+c_2-2c_3 = 5$ egyenletekből álló egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldásai $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = -2$.

40. Keresünk olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számokat, hogy

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

legyen. Írjuk fel az $f_i(x)$ polinomot $f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \cdots + a_{i(n-2)}x^{n-2}$ alakban. Ezután tekintsük a $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$ egyenlet mindkét oldalán az x^k együtthatóját ($k = 0, 1, \ldots, n-2$). A következő egyenletet kapjuk:

$$a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \cdots + a_{nk}c_n = 0.$$

Így egy $n-1$ homogén egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszert kapunk, melynek van nem-triviális megoldása, tehát a polinomok lineárisan összefüggőek.

41. n darab legfeljebb $(n-2)$-edfokú polinom lineárisan összefüggő (lásd az előző feladatot), vagyis van olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, mely 0, azaz vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok, hogy legalább egyikük 0-tól különbözik, és

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0.$$

Legyen például $c_1 \neq 0$. Szorozzuk meg a determináns első sorát c_1-gyel (ettől a determináns zérus volta nem változik, hisz $c_1 \neq 0$), majd adjuk hozzá a második sor c_2-szeresét, ..., az utolsó sor c_n-szeresét. Így az első sorban csupa nullát kapunk, tehát a determináns értéke 0.

42. Az egyenletrendszer kiegészített mátrixában (a számítások egyszerűsítése végett) az első és második sort felcserélve, majd az új sor megfelelő többszörösét a többi sorhoz adva:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & -6 & 18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & -10 \\ 0 & 5 & 0 & 14 & -23 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 9 \end{array}\right].$$

A negyedik sorból a másodikat levonva, majd a kapott mátrix második sorát 5-el, harmadik sorát 7-tel megszorozva:

$$\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 35 & -25 & 65 & -50 \\ 0 & 35 & 0 & 98 & -161 \\ 0 & 0 & -2 & -13 & 19 \end{array}\right].$$

A harmadik sorból a másodikat levonva, majd az új harmadik sort 2-vel megszorozva

$$\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 35 & -25 & 65 & -50 \\ 0 & 0 & 25 & 33 & -111 \\ 0 & 0 & -2 & -13 & 19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 35 & -25 & 65 & -50 \\ 0 & 0 & 50 & 66 & -222 \\ 0 & 0 & -2 & -13 & 19 \end{array}\right].$$

Végül, a harmadik és negyedik sort felcserélve és az új harmadik sor 25-szörösét az új negyedik sorhoz adva:

$$\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 35 & -25 & 65 & -50 \\ 0 & 0 & -2 & -13 & 19 \\ 0 & 0 & 50 & 66 & -222 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 35 & -25 & 65 & -50 \\ 0 & 0 & -2 & -13 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -259 & 253 \end{array}\right].$$

Ebből leolvasható, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 35 & -25 & 65 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -259 \end{vmatrix} = 1 \cdot 35 \cdot (-2) \cdot (-259) \neq 0,$$

tehár $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 4$ és $\operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$, tehát **T 20.6** szerint az egyenletrendszer megoldható. Minthogy a közös rang az ismeretlenek számával is egyenlő, a megoldás egyértelmű.

43.

$$\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 32 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -80 & 10 & -25 \end{array}\right].$$

Ebből $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$, és ez kisebb az ismeretlenek számánál; az egyenletrendszernek tehát végtelen sok megoldása van.

44. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 2$, $\operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$; nincs megoldás.

45. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 2$; az egyenletrendszer megoldható, és végtelen sok megoldás létezik.

46. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 2$; az egyenletrendszer megoldható, és végtelen sok megoldás létezik.

47. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 2$; az egyenletrendszer megoldható, és végtelen sok megoldás létezik.

48. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$; az egyenletrendszer megoldható, és végtelen sok megoldás létezik.

49. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$, és az ismeretlenek száma is 4, tehát az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

50. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 2$, $\operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$, tehát nincs megoldás.

51. $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$, $\operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$; nincs megoldás.

52. A **T 20.7** tétel alkalmazható, így akkor és csak akkor van csak triviális megoldás, ha az egyenletrendszer determinánsa nem nulla.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Tehát a keresett feltétel: $a \neq 2$.

53. a tetszőleges valós szám.

54. $c = 1$ vagy $c = -3$.

55.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & | & 0 \\ \lambda & 1 & \mu & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & | & 0 \\ 0 & (1-2\lambda) & (\mu-\lambda^2) & | & 0 \\ 0 & 0 & (-\lambda-1) & | & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & (1-2\lambda) & (\mu-\lambda^2) \\ 0 & 0 & (-\lambda-1) \end{vmatrix} = (2\lambda-1)\cdot(\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$ és $\lambda \neq -1$.

1. eset. Ha $\lambda \neq \frac{1}{2}$ és $\lambda \neq -1$, ekkor csak a triviális megoldás létezik; $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (l. **T 20.7**).

2. eset. Ha $\lambda = \frac{1}{2}$, akkor bármely μ-re

$$\mathbf{A}' \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & (\mu-\frac{1}{4}) & | & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{3}{2}) & | & 0 \end{bmatrix};$$

ebből $-\frac{3}{2}x_3 = 0$, azaz $x_3 = 0$, és ezért $x_1 = -2x_2$; x_2 tetszőleges (végtelen sok megoldás van).

3. eset. Ha $\lambda = -1$, akkor bármely μ-re

$$\mathbf{A}' \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & (\mu-1) & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix};$$

$3x_2 = (-\mu+1)x_3$, $x_2 = \dfrac{-\mu+1}{3}x_3$, $x_1 = -2x_2 + x_3 = \dfrac{2\mu-2}{3}x_3 + x_3 = \dfrac{2\mu+1}{3}x_3$, x_3 tetszőleges.

56. Az előző feladatnál alkalmazott gondolatmenettel kapjuk:

1. Ha $\lambda \neq -3$ és $\lambda \neq 1$, akkor $x = y = z = 0$.
2. Ha $\lambda = -3$, akkor $x = 0$, $y = z$, z tetszőleges.
3. Ha $\lambda = 1$, akkor $x = -2z$, $y = -z$, z tetszőleges.

57. Adjuk a második sor (-1)-szeresét a harmadik sorhoz, majd az első sort a második sorhoz:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} (2a+1) & -a & (a+1) & a-1 \\ (a-2) & (a-1) & (a-2) & a \\ (2a-1) & (a-1) & (2a-1) & a \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} (2a+1) & -a & (a+1) & a-1 \\ (3a-1) & -1 & (2a-1) & (2a-1) \\ (a+1) & 0 & (a+1) & 0 \end{array}\right].$$

Adjuk a második sor $(-a)$-szorosát az első sorhoz:

$$\mathbf{A}' \sim \mathbf{B}' = \left[\begin{array}{ccc|c} (-3a^2+3a+1) & 0 & (-2a^2+2a+1) & (-2a^2+2a-1) \\ (3a-1) & -1 & (2a-1) & (2a-1) \\ (a+1) & 0 & (a+1) & 0 \end{array}\right].$$

Az elemi sorműveletek nem változtatnak a megfelelő determinánson, így:
$\det \mathbf{A} = -[(-3a^2+3a+1)(a+1)-(-2a^2+2a+1)(a+1)] = a\cdot(a+1)\cdot(a-1)$.
1. Ha $a \neq 0, -1, 1$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$, ami egyenlő az ismeretlenek számával, és **T 20.6** szerint egyértelmű megoldás létezik.
2. Legyen $a = 0$. Ekkor

$$\mathbf{A}' \sim \mathbf{B}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ha a mátrixrang definícióját alkalmazzuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{így } \operatorname{rang} \mathbf{A} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{miatt } \operatorname{rang}\mathbf{A}' = 3, \text{ tehát } \operatorname{rang} \mathbf{A} \neq \operatorname{rang} \mathbf{A}',$$

T 20.6 szerint nincs megoldás.
3. Legyen $a = 1$. Az $a = 0$ esethez hasonlóan ugyancsak az adódik, hogy nincs megoldás.
4. $a = -1$-re a második sor (-1)-szeresét az első sorhoz, majd az így kapott első sor (-4)-szeresét a második sorhoz adva:

$$\mathbf{B}' = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -3 & -5 \\ -4 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Innen $r = \operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang}\mathbf{A}' = 2$. Minthogy az ismeretlenek száma $n = 3$ nagyobb, mint a közös rang, **T 20.6** szerint végtelen sok megoldás létezik és 1 ismeretlen lesz tetszőlegesen választható ($n - r = 1$).

58. Az egyenletrendszer mátrixát (most is) $\mathbf{A}$-val, kiegészített mátrixát $\mathbf{A}'$-vel jelöljük. $\det \mathbf{A} = 1 - \lambda$.
1. Ha $\lambda \neq 1$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$; egyértelmű megoldás létezik.
2. Ha $\lambda = 1$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$, ami kisebb az ismeretlenek számánál; végtelen sok megoldás létezik.
Útmutatás. Megfelelő elemi mátrixátalakítások után (például $+1S_1 \to S_2$, $+1S_1 \to S_3$, $-2S_2 \to S_1$, $-4S_2 \to S_3$, $-5S_2 \to S_4$, $-2S_3 \to S_1$, $1S_3 \to S_2$, $-1S_3 \to S_4$) $\mathbf{A}'$ a következő alakúra hozható:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 23 & -1 & 0 & 0 & 18 \\ -11 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ -14 & 0 & 0 & -1 & -15 \\ (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

1. Ha $\lambda \neq 1$, akkor $\det \mathbf{A} = -(\lambda - 1) \neq 0$, így $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$, és egyértelmű megoldás létezik.
2. Ha $\lambda = 1$, úgy $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3 < n = 4$, és végtelen sok megoldás létezik.

59. $\det \mathbf{A} = (a+1) \cdot (a-1)^2$. Ha $a = -1$, akkor nincs megoldás. $a = 1$ esetén végtelen sok, $a \neq \pm 1$ esetén pedig egy megoldás van.

60.

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -u & 2 \\ 1 & v & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -(u+2) & 1 \\ 0 & v-2 & 1 \end{array}\right]; \text{ emiatt } \det \mathbf{A}' = -(u+v).$$

Ezt felhasználva:
1. Egy megoldás van, ha a) $u \neq -2$ és $v = -u$.
2. Nincs megoldás, ha b) $u = -2$, vagy c) $u \neq -2$ és $v \neq -u$.

61. 1. Ha $v \neq 7$, akkor nincs megoldás.
2. Ha $v = 7$, és $u \neq -2$, akkor egy megoldás van.
3. Ha $v = 7$, $u = -2$, akkor végtelen sok megoldás van.

62. 1. Ha $u \neq -2$, akkor egyértelmű megoldás létezik.
2. Ha $u = -2$ és $v \neq -3$, akkor nincs megoldás.
3. Ha $u = -2$, $v = -3$, akkor végtelen sok megoldás létezik.

63. Igazolható, hogy például:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & a & b & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & a & b-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b-8 \end{array}\right].$$

Eszerint:
1. Ha $a \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$; egyértelmű a megoldás.
2. Ha $a = 0$ és $b = 7$, vagy ha $a = 0$ és $b = 8$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$; mivel az ismeretlenek száma 4, végtelen sok megoldás van.
3. Ha $a = 0$, $b \neq 7$ és $b \neq 8$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3 \neq \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 4$; nincs megoldás.

64. Elemi mátrixátalakításokkal belátható, hogy

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & \beta \\ 3 & -1 & 4 & \alpha & \beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right].$$

Eszerint:
1. Ha $\beta \neq 0$, nincs megoldás.
2. Ha $\beta = 0$ és $\alpha = 0$, akkor nincs megoldás.
3. Ha $\beta = 0$, de $\alpha \neq 0$, akkor végtelen sok megoldás van.

65. Ha $\beta \neq 8$, akkor nincs megoldás; ha $\beta = 8$, akkor végtelen sok megoldás van. (Ha $\beta = 8$ és $\alpha \neq 5$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$; ha $\beta = 8$ és $\alpha = 5$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 2$.)

66. $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow a = -1/2$. Ha $a \neq -\frac{1}{2}$ és $b \neq 0$, akkor nincs megoldás; minden más esetben végtelen sok megoldás van.

67. Ha $a \neq 0$ és $b \neq a$, akkor egyértelmű a megoldás. Ha $a = b = 1$, akkor végtelen sok megoldás van. Más esetben nincs megoldás.

68.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ a & -2 & 1 & b & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & (-a-2) & (-a+1) & b & (-2a+c) \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & (a+5) & (6+3a+b) & (-a+c+2) \end{array}\right].$$

Az egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixának 3 sora van, így $\operatorname{rang} \mathbf{A} \leq 3$ és $\operatorname{rang} \mathbf{A}' \leq 3$.
1. Ha $a \neq -5$ vagy $b \neq 9$, akkor $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}\mathbf{A}' = 3$, ami kisebb, mint az ismeretlenek száma, tehát végtelen sok megoldás van.
2. Ha $a = -5$ és $b = 9$, akkor

$$\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7+c \end{array}\right],$$

tehát $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$ (a c értékétől függetlenül), ugyanakkor $\operatorname{rang}\mathbf{A}' = 2$, ha $c = -7$ és $\operatorname{rang}\mathbf{A}' = 3$, ha $c \neq -7$. Eszerint az $a = -5$, $b = 9$; $c = -7$ esetben végtelen sok megoldás van, az $a = -5$, $b = 9$, $c \neq -7$ esetben nincs megoldás.

69. $\det \mathbf{A} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$. Ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor egy megoldás van.

Ha $a = -2$, akkor $\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b+c+d \\ 1 & -2 & 1 & c \\ 1 & 1 & -2 & d \end{array}\right]$,

ha $a = 1$, akkor $\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right]$. Ezek szerint, ha $a = -2$ és

$b + c + d = 0$, illetve $a = 1$ és $b = c = d$, akkor végtelen sok megoldás van. Más esetben az egyenletrendszer nem oldható meg.

70. Vonjuk le például a 2. sorból a 3. sort, majd a kapott -1-el nullázzuk ki az 1. oszlopot, fejtsük ki $\det \mathbf{A}$-t és végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket. $\lambda \neq -1$-re egyértelmű megoldás, $\lambda = 1$-re végtelen sok megoldás van.

71. Járjunk el az **57**. feladat megoldása szerint.
Ha $\lambda \neq 1$, akkor

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 1 & (1+\lambda) \\ 0 & (2+\lambda) & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 1 \\ 0 & (2+\lambda) & 0 \end{vmatrix} = -(2+\lambda).$$

1. Ha $\lambda \neq 1$ és $\lambda \neq -2$, akkor $-(2+\lambda) \neq 0$, így $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$; emiatt a rendszer egyértelműen megoldható és

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \qquad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \qquad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2. Ha $\lambda = -2$,

$$\mathbf{A}' \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$ **T 20.6** szerint $\operatorname{rang} \mathbf{A} (=2) \neq \operatorname{rang} \mathbf{A}' = 3$, nincs megoldás.

3. Ha $\lambda = 1$, akkor $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, x_2 és x_3 tetszőleges.

72. Ha $\lambda \neq 16$, akkor nincs megoldás.
Ha $\lambda = 16$, úgy $x_1 = 4 - x_3 - 2x_4$, $x_2 = 2 - x_3 - x_4$ és x_3, x_4 tetszőleges.

73. 1. Ha $u \neq 1$, (v tetszőleges), akkor egyértelmű a megoldás:

$$x_1 = \frac{u-v}{u-1}, \qquad x_2 = \frac{v-1}{u-1}.$$

2. Ha $u = 1$, $v \neq 1$, akkor nincsen megoldás.
3. Ha $u = 1$, $v = 1$, akkor végtelen sok megoldás létezik: $x_1 = 1 - x_2$ és x_2 tetszőleges.

74. 1. Ha $b \neq -2a$, akkor

$$x = 0, \quad y = -\frac{(a+b)b}{2(2a+b)}, \quad z = \frac{b}{2a+b}.$$

2. Ha $b = -2a$ és $a \neq 0$, akkor nincs megoldás.
3. Ha $a = b = 0$, akkor $x = y = 0$, z tetszőleges.

75. Az egyenletrendszer determinánsa: $-ab(-a+1)(a^2+b^2)$.

1. Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, akkor egyértelmű megoldás létezik: $x_1 = -\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$,

$$x_2 = \frac{a^3 - a^2b + ab^2 + b^3}{a^2+b^2}, \quad x_3 = \frac{a^3 + ab^2 + b^3}{a^3 + ab^2}, \quad x_4 = \frac{a(a^2 - ab + b^2)}{b(a^2+b^2)}.$$

2. Ha $a = b = 0$, akkor $x_2 = 0$; x_1, x_3, x_4 tetszőleges.
3. Ha $a = 0$, $b \neq 0$, vagy $a \neq 0$ és $b = 0$, úgy nincs megoldás.

76. $\det \mathbf{A} = (a-1)6b$.
1. Ha $a \neq 1$ és $b \neq 0$, c tetszőleges, akkor egyértelmű a megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{c-18}{6(a-1)}$, $x_3 = -\frac{c}{16}$, $x_4 = \frac{c}{16}$.
2. Ha $a \neq 1$ és $b = 0$, c tetszőleges, úgy végtelen sok megoldás van; x_3-al kifejezve: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3+(3/2)c+8x_3}{a-2}$, $x_4 = \frac{c}{2} + 2x_3$, x_3 tetszőleges.
3. Ha $a = 1$ és $b = 0$, c tetszőleges, akkor $x_1 = 0$, $x_3 = \frac{6-c}{16}$, $x_4 = \frac{c+6}{8}$, x_2 tetszőleges.
4. Ha $a = 1$, b tetszőleges és $c = 18$, akkor $x_1 = 0$, $x_3 = -\frac{3}{4}$, $x_4 = 3$, x_2 tetszőleges. 5. Ha $a = 1$, $b \neq 0$ és $c \neq 18$, akkor nincs megoldás.

77. Az egyenletrendszer kiegészített mátrixából kiválasztható összes harmadrendű determináns Vandermonde-féle determináns, így **T 19.10** szerint akkor és csak akkor nem nulla, ha a benne előforduló megfelelő paraméterek páronként különböznek. Ezt figyelembe véve:
1. Ha a, b, c különböznek, akkor egyértelmű a megoldás.

$$x_1 = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}; \quad x_2 = \frac{(a-d)\cdot(c-d)}{(a-b)\cdot(c-b)}; \quad x_3 = \frac{(a-b)(b-d)}{(a-c)(b-c)},$$

2. Ha a, b, c közül legalább kettő egyenlő, d pedig az a, b, c valamelyikével egyenlő, akkor végtelen sok megoldás van, az $a = b = d \neq c$ esetben $x_1 = 1 - x_2$, x_2 tetszőleges, $x_3 = 0$, az $a = b \neq d = c$ esetben $x_1 = 1 - x_2$, x_2 tetszőleges, $x_3 = 1$.
3. Ha a, b, c közül legalább kettő egyenlő, de d az a, b, c mindegyikétől különbözik, akkor nincs megoldás.

78. **T 20.9** alapján írjuk fel a mátrix karakterisztikus egyenletét:

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 3 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns kifejtése után a következőt kapjuk: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$.
Ennek gyökei a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.
A λ_1-hez tartozó $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0$ sajátvektorra

$$\begin{cases} (4-\lambda_1)x + 3y = 0 \\ x + (2-\lambda_1)y = 0, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $y = -x$, így tetszőleges $x \neq 0$-ra $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$. A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sajátvektorra hasonlóan adódik, hogy $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3x \\ x \end{bmatrix}$, ahol $x \neq 0$ tetszőleges.

79. A karakterisztikus egyenlet $(2-\lambda)^2=0$; $\lambda_1=\lambda_2=2$. A $\lambda=2$-höz tartozó $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ sajátvektorra

$$\begin{cases}(2-\lambda)x+0y=0\\0x+(2-\lambda)y=0,\end{cases}\quad\text{azaz}\quad\begin{cases}0x+0y=0\\0x+0y=0\end{cases}$$

egyenletrendszer adódik, amelynek bármely x, y számpár megoldása. Tehát a koordinátasík bármely nem nullvektora sajátvektor.

80. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2-4\lambda+6=0$.
A sajátértékek: $\lambda_1=2+\sqrt{2}i$, $\lambda_2=2-\sqrt{2}i$.
A λ_1-hez tartozó $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ sajátvektorra

$$\begin{cases}\left(0-(2+\sqrt{2}i)\right)x-3y=0\\2x+\left(4-(2+\sqrt{2}i)\right)y=0;\end{cases}$$

ebből $x=\left(-1+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)y$, így

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)y\\y\end{bmatrix},\quad y\neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

A $\lambda=2-\sqrt{2}i$ esetében hasonló módon adódik:

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)y\\y\end{bmatrix},\quad y\neq 0 \text{ tetszőleges.}$$

81. $\lambda_1=-3$ és $\lambda_2=14$, a λ_1-hez tartozó sajátvektorok $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-4t_1\\t_1\end{bmatrix}$, $t_1\neq 0$. Minthogy a mátrix szimmetrikus, a λ_2-höz tartozó sajátvektorokat a megfelelő egyenletrendszer megoldása helyett azon az alapon is megkaphatjuk, hogy a **T 20.13** főtengely tétel szerint a mátrixnak van $\mathbf{v}_1$-re merőleges sajátvektora. Így
$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}t_2\\4t_2\end{bmatrix}$, $t_2\neq 0$.

82. $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=8$; $\mathbf{v}_1=t_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=t_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $t_1, t_2\neq 0$ tetszőleges.

83. $\lambda_1=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $\mathbf{v}_1=t_1\begin{bmatrix}1\\-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\end{bmatrix}$, $t_1\neq 0$ tetszőleges és
$\mathbf{v}_2=t_2\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{bmatrix}$, $t_2\neq 0$ tetszőleges.

84. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=12$; $\mathbf{v}_1=t_1\cdot\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$, $t_1\neq 0$ és $\mathbf{v}_2=t_2\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $t_2\neq 0$.

85. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix}(1-\lambda)&0&2\\4&(2-\lambda)&0\\6&3&-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Kifejtve $(1-\lambda)\cdot[-(2-\lambda)\cdot\lambda]+2\cdot[12-6(2-\lambda)]=-\lambda^3+3\lambda^2+10\lambda=0$. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=-2$. A $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ sajátvektorra **T 20.9** szerint

$$\begin{cases}(1-0)x+0\cdot y+2z=0\\4x+(2-0)y+0\cdot z=0\\6x+3y-0\cdot z=0.\end{cases}$$

Gauss-módszerrel megoldva:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\4&2&0\\6&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&-8\\0&3&-12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&1&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix},\text{ amiből}$$

$x=-2z$, $y=4z$, tehát $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-2z\\4z\\z\end{bmatrix}=z\cdot\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$, $z\neq0$.

A $\lambda_2=5$-re és a $\lambda_3=-2$-re hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{v}_2=t_2\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\6\end{bmatrix}$, $t_2\neq0$ és $\mathbf{v}_3=t_3\cdot\begin{bmatrix}-2\\2\\3\end{bmatrix}$, $t_3\neq0$.

86. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3+27\lambda+54=0$. Rolle-tétele (**T 10.x**) szerint racionális gyök lehet $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18,\pm27$. Sorban kipróbálva a számokat kapjuk, hogy -3 gyök. A $(\lambda+3)$ tényezővel való osztást elvégezhetjük például a Horner-módszerrel:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 27 & 54\\ \hline -3 & -1 & 3 & 18 & 0\end{array}$$

vagyis $-\lambda^3+27\lambda+54=(\lambda+3)(-\lambda^2+3\lambda+18)$, ahonnan a gyökök: $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$.

A $\lambda_3=6$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}_3$ sajátvektorra a szokott módon adódik

$$\mathbf{v}_3=t_3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix},\quad t_3\neq0.$$

A $\lambda=-3$ kétszeres sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ sajátvektorra

$$(1)\qquad\begin{cases}(1+3)x+2y-4z=0\\2x+(-2+3)y-2z=0\\-4x-2y+(1+3)z=0.\end{cases}$$

A

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elemi mátrixátalakítások alapján $2x + y - 2z = 0$; ebből $y = -2x + 2z$, és így

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ -2x + 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ és $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorok síkjának tetszőleges nem nullvektora sajátvektor.

Megjegyzés. Minthogy a mátrix szimmetrikus, így a $\lambda = -3$-hoz tartozó sajátvektorok a következők szerint is meghatározhatóak. Mivel $\lambda = -3$ kétszeres gyök, (1)-nek könnyen megkaphatjuk egy megoldását, ha két változót konkrétan rögzítünk. Ha például $x = 0$, $z = 1$, akkor $y = 2$ adódik; tehát

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\lambda = -3$ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektor.

Minthogy $\mathbf{v}_1$ merőleges $\mathbf{v}_3$-ra, és a mátrix szimmetrikussága miatt fennáll, hogy van 3 egymásra páronként merőleges sajátvektor, így

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ is a $\lambda = -3$-hoz tartozó sajátvektor lesz;

a $\lambda = -3$-hoz tartozó összes sajátvektor pedig: $t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$; t_1 és t_2 egyszerre nem nulla, de egyébként tetszőleges. (A fentebbi $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ sajátvektor a $t_1 = -4/5$, $t_2 = -1/5$ paraméterértékekhez tartozik.)

87. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$.

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$.

A $\lambda_2 = 1 + i$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sajátvektorra

$$\begin{aligned} (0 - 1 - i)x + {} & 3y + {} & 1 \cdot z &= 0 \\ x + (1 - 1 - i)y + {} & & 0 \cdot z &= 0 \\ -5x + {} & 3y + (2 - 1 - i)z & &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kiegészített mátrixában az első és második sort felcserélve, majd az (új) első sor megfelelő többszörösét a második és a harmadik sorhoz hozzáadva, végül utolsó lépésként a második sor $(1 - i)$-szeresét a harmadik sorból kivonva kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}' \sim \begin{bmatrix} (-1-i) & 3 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ -5 & 3 & (1-i) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ (-1-i) & 3 & 1 \\ -5 & 3 & (1-i) \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & (4-i) & 1 \\ 0 & (3-5i) & (1-i) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & (4-i) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint

$$\begin{cases} x - iy = 0, \\ (4-i)y + z = 0, \end{cases}$$

amiből $x = iy$, $z = (-4+i)y$, tehát a $t_2 = y$ paraméterválasztással

$$\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ (-4+i) \end{bmatrix}, \; t_2 \neq 0.$$

Hasonlóan kapható meg $\mathbf{v}_3$: $\mathbf{v}_3 = t_3 \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ (-4-i) \end{bmatrix}, \; t_3 \neq 0.$

88. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Innen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. A sajátvektorok:

$$\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

89. A karakterisztikus egyenlet: $(1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda) = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.
A sajátvektorok: $\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = t_3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
$t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$, $t_3 \neq 0$.

90. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 + 14\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -i\sqrt{14}$, $\lambda_3 = i\sqrt{14}$.
A sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; t_1 \neq 0. \quad \mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{14} \cdot i \\ 13 \\ 2 - 3\sqrt{14} \cdot i \end{bmatrix}, \; t_2 \neq 0.$$

$$\mathbf{v}_3 = t_3 \cdot \begin{bmatrix} 3 - 2\sqrt{14} \cdot i \\ 13 \\ 2 + 3\sqrt{14} \cdot i \end{bmatrix}, \; t_3 \neq 0.$$

(Figyeljük meg, hogy a mátrix ferdén szimmetrikus, l. **D 20.10**, és minden sajátértéke **T 20.12**-el összhangban képzetes szám.)

91. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$; $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
A $\lambda_1 = 5$-höz tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$.

A $\lambda_2 = 1$-hez tartozó $\mathbf{v}_2$ sajátvektorok: $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, t_2 és t_3 egyszerre nem nulla, de egyébként tetszőleges.

92. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.
A sajátvektorok: $\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

93. $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 12$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$, illetve $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $t_2 \neq 0$. (L. a **81.** feladatot.) Tetszőleges t_1 és t_2-re $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0$, tehát bármely $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ merőleges egymásra.

94. A sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$,
$\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = t_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$, $t_3 \neq 0$.
A sajátvektorok skaláris szorzatai: $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0$, $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 = 0$, $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = 0$, így a sajátvektorok páronként merőlegesek egymásra.

95. A sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda = 0$, $\mathbf{v} = t_1 \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $t_1 \neq 0$ és $\lambda = 9$, $\mathbf{v} = t_2(\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) + t_3(\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, ahol $t_2^2 + t_3^2 \neq 0$. Válasszunk ki egyet-egyet a $\lambda = 0$ és a $\lambda = 9$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok közül; legyen $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, illetve $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$. Tekintsük a $\mathbf{v}_1$-re és $\mathbf{v}_2$-re egyaránt merőleges $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektort:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Mivel $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 45 \\ -18 \end{bmatrix} = 9\mathbf{v}_3$, ezért $\mathbf{v}_3$ is sajátvektor; így pl. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ valóban páronként egymásra merőleges sajátvektorok.

96. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -5$ és $\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0$. $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0$; ez a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ merőlegességét jelenti.

97. $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{v}_1 = t_1(\mathbf{i} - \mathbf{k})$, $t_1 \neq 0$ és $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}_2 = t_2(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + t_3\mathbf{j}$, $t_2^2 + t_3^2 \neq 0$. Látható, hogy $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ és $\mathbf{j}$ egyaránt a $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok. Mivel $(\mathbf{i} - \mathbf{k})(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = (\mathbf{i} - \mathbf{k})\mathbf{j} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})\mathbf{j} = 0$, az $\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{j}$ sajátvektorok páronként egymásra merőlegesek.

98. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 + 49\lambda^2 = 0$; $\lambda_1 = 49$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
A sajátvektorok: $\mathbf{v}_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $t_1 \neq 0$ és $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ tetszőleges t_2, t_3-ra, ha $t_2^2 + t_3^2 \neq 0$. A továbbiakban kövessük a **95.** feladat

megoldását. Páronként merőleges sajátvektorok például: $6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $-4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+15\mathbf{k}$.

99. Ha $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 8 & -6 & 5\end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 8\\ 2 & -1 & -6\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$. **T 20.11** szerint

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & 1{,}5 & 5{,}5\\ 1{,}5 & -1 & -2\\ 5{,}5 & -2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & -2{,}5\\ -0{,}5 & 0 & 4\\ 2{,}5 & -4 & 0\end{bmatrix},$$

ahol az első mátrix valóban szimmetrikus; a második ferdén szimmetrikus.

100. $$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1{,}5 & -1 & 2{,}5\\ 1{,}5 & -1 & 0{,}5 & 1{,}5\\ -1 & 0{,}5 & 1 & 2\\ 2{,}5 & 1{,}5 & 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1{,}5 & 1 & -2{,}5\\ 1{,}5 & 0 & -0{,}5 & -1{,}5\\ -1 & 0{,}5 & 0 & -2\\ 2{,}5 & 1{,}5 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

101. $(\mathbf{X}+i\mathbf{Y})^*=\mathbf{X}+i\mathbf{Y}$, mivel $\mathbf{A}$ Hermite-féle. Másrészt $(\mathbf{X}+i\mathbf{Y})^*=\mathbf{X}^*+(i\mathbf{Y})^*=\mathbf{X}^T-i\mathbf{Y}^T$, így $\mathbf{X}+i\mathbf{Y}=\mathbf{X}^T-i\mathbf{Y}^T$, azaz $\mathbf{X}=\mathbf{X}^T$ és $\mathbf{Y}=-\mathbf{Y}^T$.

102. Kifejtés után a karakterisztikus egyenlet: $(1-\lambda)^2((1-\lambda)^2+1)=0$.
$\lambda_1=1,\ \ \lambda_2=1+i,\ \ \lambda_3=1-i$.

A $\lambda_3=1-i$-hez tartozó $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}$ sajátvektorra az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned}ix-y&=0\\ x+iy&=0\\ 2x+iz&=0\\ x+2y+z+iu&=0.\end{aligned}$$

Ennek megoldása $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}t\\ it\\ 2it\\ (i-4)t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ alakra hozható.

103. A karakterisztikus egyenlet:

$$0=\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 1 & -1 & -1\\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0\\ 1 & 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 2 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}(1-\lambda) & -1 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)((1-\lambda)(\lambda^2-1)-(\lambda+1)+(-1-\lambda))=$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)((\lambda-1)^2+2);$$

ebből $\lambda_1=1,\ \ \lambda_2=-1,\ \ \lambda_3=1+\sqrt{2}i,\ \ \lambda_4=1-\sqrt{2}i$.
A legnagyobb valós értékű sajátértékhez, $\lambda_1=1$-hez tartozó sajátvektorra

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, ekkor $|\mathbf{v}| = |t|\sqrt{62}$, $t = \pm 2/\sqrt{62}$; így a keresett sajátvektorok:
$\pm\frac{2}{\sqrt{62}}(-6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4)$.

104.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A és $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértékei: $\frac{1}{2}$, 1, 2; a legkisebb az $\frac{1}{2}$.
A-nak a $\lambda = \frac{1}{2}$ sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorai:
$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{A}^{-1}$ megfelelő sajátvektorai: $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

105. Jelölje **A** egy sajátértékét és a hozzá tartozó sajátvektorát λ, illetve **v**. A **D 20.8** definíció szerint $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Innen

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{v}),$$

és ebből

$$\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}).$$

A $\lambda \neq 0$ (mert $\lambda = 0$-ra $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ következne), ezért oszthatunk vele:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}.$$

Eszerint **v** sajátvektora $\mathbf{A}^{-1}$-nek is, $\frac{1}{\lambda}$ sajátértékkel.
Azt a mellékeredményt is kaptuk, hogy reguláris mátrix minden sajátértéke 0-tól különbözik.

106. A x. feladat állítását felhasználva $\mathbf{A}^{-1}$ összetartozó sajátértékei és sajátvektorai: $1/3$, $t_1[1,-1,1]^T$; $1/6$, $t_2[1,2,1]^T$; $-1/2$, $t_3[-1,0,1]^T$, ahol t_1, t_2, t_3 0-tól különböző tetszőleges valós számok.

107. λ pontosan akkor sajátérték, ha $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. $\lambda = 0$ esetén ez azt jelenti, hogy $\det \mathbf{A} = 0$.

108. $\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot u$, tehát **u** az **A** sajátvektora 1 sajátértékkel. Hasonlóan igazolható, hogy **v** és **w** is sajátvektora **A**-nak 2, illetve 11 sajátértékkel.
A **105.** feladat alapján $\mathbf{A}^{-1}$-nek is sajátvektorai **u**, **v**, **w**, mégpedig az 1, 1/2, illetve 1/11 sajátértékhez tartozó sajátvektorok.

109. A szimmetrikus, így a **T 20.13** főtengelytétel alkalmazható. A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó (egyik) $\mathbf{v}_1 = [x, y, z]^T$ sajátvektort **T 20.9** szerint kaphatjuk: $\mathbf{v}_1 = [1, 2, 2]^T$. A $\mathbf{v}_2 = [2, 1, -2]^T$ sajátvektorra $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = 6\mathbf{v}_2$, tehát $\lambda_2 = 6$ adódik. A főtengely tétel szerint a $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = [-6, 6, -3]^T$ is sajátvektor. λ_3 a λ_2-éhez hasonlóan kapható: $\lambda_3 = 9$.

110. A karakterisztikus egyenletbe $\lambda = -1$-et helyettesítve $0 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & (a+1) & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, amiből $a = 2$ adódik.
A sajátértékek $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$.
A $\lambda_2 = 4$-hez tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v}_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

111. Minthogy $\mathbf{A}_{2\times2}$ szimmetrikus, így **T 20.12** szerint **A** sajátértékei valósak, tehát a sajátértékeket szolgáltató $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = 0$ másodfokú egyenletnek csupa valós megoldása van. Ezért az egyenlet diszkriminánsa vagy nagyobb nullánál, vagy egyenlő nullával. Az állítás igaz.

112.
$$(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$
karakterisztikus egyenlete $-\lambda^3 + 76\lambda = 0$. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{76}$, $\lambda_3 = -\sqrt{76}$.

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

113. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$. A $\lambda_1 = -4$-hez tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7t_1 \\ -t_1 \end{bmatrix}$, a $\lambda_3 = 5$-höz tartozó sajátvektorok: $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2t_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $t_1, t_2 \neq 0$.

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ által bezárt α szögre $\cos\alpha = \dfrac{13t_1t_2}{\sqrt{50t_1^2} \cdot \sqrt{5t_2^2}} = \dfrac{t_1}{|t_1|} \cdot \dfrac{t_2}{|t_2|} \dfrac{13}{\sqrt{250}} = \pm\dfrac{13}{\sqrt{250}}$, ahonnan $\alpha = 34{,}7^\circ$ vagy $\alpha = 145{,}3^\circ$.

114. **B** sajátértékei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

A **B**-nek a λ_2-höz tartozó egységnyi hosszú sajátvektorai: $\mathbf{v}_2 = \dfrac{\pm1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{\pm1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \lambda\mathbf{v}_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{17}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nem egyállású vektorok, $\mathbf{v}_2$ nem sajátvektora **A**-nak.

115.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

AB karakterisztikus egyenlete: $-\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$. Az **AB** mátrix $\lambda_3 = -3$-hoz tartozó sajátvektorai: $t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

116. Határozzuk meg egyenletenként a legnagyobb abszolút értékű együtthatót. a harmadik egyenletben az x együtthatója, a második egyenletben y együtthatója, az első egyenletben z együtthatója a legnagyobb abszolút értékű. Ennek megfelelően cseréljük fel az első és harmadik egyenletet:

$$3x + 0{,}03y + 0{,}06z = 12,$$
$$-0{,}01x + 5y - 0{,}02z = 10,$$
$$0{,}02x + 0{,}02y - 4z = 8.$$

Fejezzük ki a megfelelő egyenletekből x-et, y-t, illetve z-t:

$$x = -0{,}01y - 0{,}02z + 4,$$
$$y = 0{,}002x + 0{,}004z + 2,$$
$$z = 0{,}005x + 0{,}005y - 2,$$

így a közelítő megoldások (2) sorozata:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$
$$x_{n+1} = -0{,}01y_n - 0{,}02z_n + 4,$$
$$y_{n+1} = 0{,}002x_n + 0{,}004z_n + 2, \quad n = 0, 1, \ldots.$$
$$z_{n+1} = 0{,}005x_n + 0{,}005y_n - 2.$$

Ellenőrizzük most a **T 20.14** iterációs módszer alkalmazhatóságának a **T 20.15** feltételeit annak figyelembevételével, hogy most $a_1 = 3$, $b_2 = 5$, $c_3 = -4$:

$$\frac{|b_1| + |c_1|}{|a_1|} = \frac{0{,}03 + 0{,}06}{3} = 0{,}03 < 1,$$
$$\frac{|a_2| + |c_2|}{|b_2|} = \frac{0{,}01 + 0{,}02}{5} = 0{,}006 < 1,$$
$$\frac{|a_3| + |b_3|}{|c_3|} = \frac{0{,}02 + 0{,}02}{4} = 0{,}001 < 1.$$

Minthogy mindegyik tört 1-nél kisebb, a módszer alkalmazható.

$n = 0$-ra

$x_1 = -0{,}01y_0 - 0{,}02z_0 + 4 = 4, \quad |x_1 - x_0| = 4$
$y_1 = 0{,}002x_0 + 0{,}004z_0 + 2 = 2, \quad |y_1 - y_0| = 2$
$z_1 = 0{,}005x_0 + 0{,}005y_0 - 2 = -2, \quad |z_1 - z_0| = 2.$

$n = 1$-re

$$\begin{aligned}
x_2 &= -0{,}01y_1 - 0{,}02z_1 + 4 = 4{,}02, & |x_2 - x_1| &= 0{,}02\\
y_2 &= 0{,}002x_1 + 0{,}004z_1 + 2 = 2, & |y_2 - y_1| &= 0\\
z_2 &= 0{,}005x_1 + 0{,}005y_1 - 2 = -1{,}97, & |z_2 - z_1| &= 0{,}03;
\end{aligned}$$

a maximális hiba: 0,03.

$n = 2$-re

$$\begin{aligned}
x_3 &= -0{,}01y_2 - 0{,}02z_2 + 4 = 4{,}0194, & |x_3 - x_2| &\le 6 \cdot 10^{-4}\\
y_3 &= 0{,}002x_2 + 0{,}004z_2 + 2 = 2{,}0001, & |y_3 - y_2| &\le 1 \cdot 10^{-4}\\
z_3 &= 0{,}005x_2 + 0{,}005y_2 - 2 = -1{,}9699, & |z_3 - z_2| &\le 1 \cdot 10^{-4};
\end{aligned}$$

a maximális hiba: $6 \cdot 10^{-4}$. Tehát 3 tizedes jegyre kerekítve: $x \approx x_3 = 4{,}019$; $y \approx y_3 = 2$; $z \approx z_3 = -1{,}97$.
Az egyenletbe helyettesítve, az i-edik ($i = 1, 2, 3$) egyenlet két oldala közötti eltérés abszolút értékeire az alábbi h_i értékek adódnak:

$$\begin{aligned}
h_1 &= |3x_3 + 0{,}03y_3 + 0{,}06z_3 - 12| = |12{,}057 + 0{,}06 - 0{,}1182 - 12| =\\
&= 0{,}0012;\\
h_2 &= |-0{,}01x_3 + 5y_3 - 0{,}02z_3 - 10| = |-0{,}04019 + 10 + 0{,}0394 - 10| =\\
&= 0{,}00079;\\
h_3 &= |0{,}02x_3 + 0{,}02y_3 - 4z_3 - 8| = |0{,}08038 + 0{,}04 + 7{,}88 - 8| =\\
&= 0{,}00038.
\end{aligned}$$

Ezek szerint az közelítő megoldás hibája: $h = \max(h_1, h_2, h_3) = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$.

117. Cseréljük fel a 2. és 3. egyenletet, hogy a legnagyobb abszolút értékű y együttható a 2., és a legnagyobb abszolút értékű z együttható a 3. egyenletben lépjen fel. A kapott egyenletrendszerre **T 20.15** szerint a **T 20.14** iterációs módszer alkalmazható. Az n, (x_n, y_n, z_n) értékek és az n-edik közelítés hibájának táblázata:

n	x_n	y_n	z_n	közelítés hibája
0	0	0	0	
1	1,9065	1,3892	1,4926	1,9065
2	1,4411	1,1099	1,377	0,4654
3	1,5151	1,1648	1,4032	0,074
4	1,5002	1,1556	1,3987	0,015
5	1,5027	1,1574	1,3995	0,0025
6	1,5023	1,1571	1,3994	0,0004

A közelítő megoldás: $x \approx 1{,}502$, $y \approx 1{,}157$, $z \approx 1{,}399$. A közelítő megoldás hibája: $h = \max(h_1, h_2, h_3) = \max(0{,}0015; 0{,}0011; 0{,}0023) = 0{,}0023$.

118.

n	x_n	y_n	z_n	közelítés hibája
0	0	0	0	
1	2	3	5	0,57
2	1,92	3,1899	5,04	0,19
3	1,9094	3,1944	5,0445	0,106
4	1,9092	3,1949	5,0447	0,0005
5	1,9092	3,1949	5,0448	0,0001

$x \approx 1{,}909$, $y \approx 3{,}195$, $z \approx 5{,}045$. A közelítő megoldás hibája: $h = 0,00081$.

119.

n	x_n	y_n	z_n	közelítés hibája
0	0	0	0	
1	6,7133	2,8639	0,5928	6,72
2	6,6254	2,3889	1,4689	0,88
3	6,6126	2,3735	1,4679	0,016
4	6,6130	2,3744	1,4664	0,0015
5	6,6131	2,3744	1,4665	0,0002

$x \approx 6{,}613$, $y \approx 2{,}374$, $z \approx 1{,}467$. A közelítő megoldás hibája: $h = 0,004$.

120. Legnagyobb abszolút értékű az x együtthatója a 3. egyenletben, az y együtthatója a 2., a z együtthatója az 1. egyenletben. Cseréljük meg tehát az 1. és a 3. egyenletet:

$$\begin{aligned} &4{,}23x - 1,21y + 1{,}09z = 3{,}22 \\ (1) \qquad &2{,}12x - 3{,}52y + 1{,}62z = -1{,}26 \\ &1{,}22x - 1{,}32y + 3{,}96z = 2{,}12\,. \end{aligned}$$

Első megoldás. A **T 20.15** iterációs feltételek teljesülnek az 1. és 3. egyenletre:

$$\frac{|b_1| + |c_1|}{|a_1|} = \frac{1{,}21 + 1{,}09}{4{,}23} < 1, \qquad \frac{|a_3| + |b_3|}{|c_3|} = \frac{1{,}22 + 1{,}32}{3{,}96} < 1,$$

de nem teljesül a 2. egyenletre:

$$\frac{|a_2| + |c_2|}{|b_2|} = \frac{2{,}12 + 1{,}62}{3{,}52} = \frac{3{,}74}{3{,}52} > 1.$$

Próbáljunk az y változó helyett $y^* = \frac{1}{\beta} \cdot y$ új változót bevezetni, ahol β-t később választjuk meg. (1) a következő alakú rendszerbe megy át:

$$\begin{aligned} &4{,}23x - 1{,}21\beta y^* + 1{,}09z = 3{,}22 \\ (2) \qquad &2{,}12x - 3{,}52\beta y^* + 1{,}62z = -1{,}26 \\ &1{,}22x - 1,32\beta y^* + 3{,}96z = 2{,}12. \end{aligned}$$

Válasszuk meg β-t – ha lehet – úgy, hogy a (2) rendszerre az iterációs feltételek már teljesüljenek. A szóbanforgó feltételek:

$$\frac{|-1{,}21\beta| + |1{,}09|}{|4{,}23|} < 1, \qquad \frac{|2{,}12| + |1{,}62|}{|-3{,}52\beta|} < 1, \qquad \frac{|1{,}22| + |1{,}32\beta|}{|3{,}96|} < 1.$$

Innen $|\beta| < 2{,}595$, $|\beta| > 1{,}0625$, illetve $|\beta| < 2{,}076$. Válasszuk például a $\beta = 1{,}5$-et, és ezzel a β-val írjuk fel a (2)-t:

$$4{,}23x - 1{,}815y^* + 1{,}09z = 3{,}22$$
$$2{,}12x - 5{,}28y^* + 1{,}62z = -1{,}26$$
$$1{,}22x - 1{,}98y^* + 3{,}96z = 2{,}12.$$

Alkalmazva az iterációs módszert, a 21. lépés után $x \approx 0{,}944$, $y^* \approx 0{,}663$, $z \approx 0{,}654$ adódik, és így $y = \beta * y^* \approx 1{,}227$-hoz jutunk.

Második megoldás. Megjegyezzük, hogy ha az iterációs módszer (**T 20.15**) feltételei nem teljesülnek, attól még a közelítő megoldások sorozata lehet konvergens, és ekkor az egyenletrendszer megoldásához fog tartani. Tekintsük az eredeti (1) rendszerhez tartozó **T 20.14** szerinti közelítő megoldások sorozatát:

n	x_n	y_n^*	z_n	közelítés hibája
0	0	0	0	
1	0,7612	0,3579	0,5353	0,7612
⋮				
23	0,9439	1,2269	0,6537	0,00041
24	0,9437	1,2272	0,6535	0,00031

$x \approx 0{,}944$, $y \approx 1{,}227$, $z \approx 0{,}654$. Eredményünk azonos az előző számítás eredményével, az iterációs lépések száma azonban – most jelentéktelenül – megnőtt.

121. Vezessünk be új változót $x = \alpha x^*$ alakban, és α-t határozzuk meg úgy, hogy az x^*, y, z-re kapott egyenletrendszerre a **T 20.15** tétel feltételei már teljesüljenek; α lehet például 5. Erre $x^* \approx x_5^* = 4{,}0441$, $y \approx y_5 = 5{,}618$, $z \approx z_5 = 1{,}982$. $x \approx 5x^* = 20{,}221$ és a közelítő megoldás hibája: 0,0005.

122. Nullára rendezve az egyenleteket, majd x, y, z együtthatójának (-1)-szeresével osztva a megfelelő egyenleteket:

$$-x + 0{,}2y + 0{,}2z + 0{,}6 = 0$$
$$0{,}1x - y + 0{,}2z + 0{,}7 = 0$$
$$0{,}1x + 0{,}1y - z + 0{,}8 = 0.$$

1. közelítés. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$-ra

$$R_{10} = -x_0 + 0{,}2y_0 + 0{,}2z_0 + 0{,}6 = 0{,}6$$
$$R_{20} = 0{,}1x_0 - y_0 + 0{,}2z_0 + 0{,}7 = 0{,}7$$
$$R_{30} = 0{,}1x_0 + 0{,}1y_0 - z_0 + 0{,}8 = 0{,}8.$$

$\max(|R_{10}|, |R_{20}|, |R_{30}|) = 0{,}8$ a harmadik egyenlethez tartozik. (Az alábbi táblázat szerinti jelöléssel $s = 3$), így $m_0 = R_{30}$ és $x_1 = x_0 = 0$, $y_1 = y_0 = 0$, $z_1 = z_0 + m_0 = 0{,}8$.

Az iterációt addig kell folytatni, amíg két szomszédos közelítő megoldás eltérése kisebb nem lesz mint 10^{-3}, tehát amíg $|m_0| < 10^{-3}$ nem teljesül.

2. közelítés. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0{,}8$-ra

$$R_{10} = -x_1 + 0{,}2y_1 + 0{,}2z_1 + 0{,}6 = 0{,}16 + 0{,}6 = 0{,}76$$
$$R_{20} = 0{,}1x_1 - y_1 + 0{,}2z_1 + 0{,}7 = 0{,}16 + 0{,}7 = 0{,}86$$
$$R_{30} = 0{,}1x_1 + 0{,}1y_1 - z_1 + 0{,}8 = -0{,}8 + 0{,}8 = 0.$$

$\max(|R_{10}|, |R_{20}|, |R_{30}|) = 0{,}86$ a második egyenletnél lép fel ($s = 2$), így $m_0 = R_{20} = 0{,}86$, továbbá $x_2 = x_1 = 0$, $y_2 = y_1 + m_0 = 0 + 0{,}86 = 0{,}86$, $z_2 = z_1 = 0{,}8$.

Az eddigi és a további számításokat táblázatba foglalva:

n	x_n	y_n	z_n	R_{10}	R_{20}	R_{30}	m_0	s
0	0	0	0	0,6	0,7	0,8	0,8	3
1	0	0	0,8	0,76	0,86	0	0,86	2
2	0	0,86	0,8	0,932	$-6 \cdot 10^{-8}$	0,086	0,932	1
3	0,932	0,86	0,8	0	0,0932	0,1792	0,1792	3
4	0,932	0,86	0,9792	0,036	0,129	0	0,129	2
5	0,932	0,989	0,9792	0,0616	0	0,0129	0,0616	1
6	0,9936	0,989	0,9792	0	0,0062	0,0191	0,0191	3
7	0,9936	0,989	0,9983	$3{,}81 \cdot 10^{-3}$	$9{,}97 \cdot 10^{-3}$	$5{,}96 \cdot 10^{-3}$	$9{,}98 \cdot 10^{-3}$	2
8	0,9936	0,999	0,9983	$5{,}81 \cdot 10^{-3}$	0	$9{,}98 \cdot 10^{-4}$	$5{,}81 \cdot 10^{-3}$	1
9	0,9995	0,999	0,9983	0	$5{,}81 \cdot 10^{-4}$	$1{,}58 \cdot 10^{-3}$	$1{,}58 \cdot 10^{-3}$	3
10	0,9995	0,999	0,9998	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$	$8{,}9 \cdot 10^{-4}$	$-5{,}9 \cdot 10^{-8}$	$8{,}9 \cdot 10^{-4}$	2
11	0,9995	0,9999	0,9998					

s azt mutatja meg, hogy hányadik egyenletre lesz a relaxációs maradék abszolút értéke a legnagyobb, vagyis melyik ismeretlen értéke nő meg m_0-lal. A keresett közelítő megoldás: $x \approx 1$, $y \approx 1$, $z \approx 1$. Valójában $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ az egyenletrendszernek pontos megoldása.

123. Minthogy minden iterációs lépésben csak egy ismeretlen értéke változik meg, így csupán a megváltozott ismeretlen értékét tüntetjük fel.
$x_0 = y_0 = z_0 = 0$; $y_1 = 1{,}5$; $x_2 = 0{,}875$; $z_3 = 0{,}875$; $y_4 = 1{,}9375$; $x_5 = 0{,}9844$; $z_6 = 0{,}9844$; $y_7 = 1{,}9922$; $x_8 = 0{,}9980$; $z_9 = 0{,}9980$; $y_{10} = 1{,}9990$; $x_{11} = 0{,}9998$; $z_{12} = 0{,}9998$.
$x \approx x_{12} = x_{11} = 1$; $y \approx y_{12} = y_{10} = 1{,}9990$; $z \approx z_{12} = 1$.

124. $x \approx x_6 = 4{,}019$; $y \approx y_6 = 2$; $z \approx z_6 = -1{,}97$. (Láthatjuk, hogy kétszer több lépés kellett a megoldáshoz, mint az iterációs módszernél.)

125. $x \approx x_{11} = 1{,}502$; $y \approx y_{11} = 1{,}157$; $z \approx z_{11} = 1{,}399$.

126. $x \approx x_{15} = 1{,}909$; $y \approx y_{15} = 3{,}195$; $z \approx z_{15} = 5{,}045$.

127. $x \approx x_8 = 6{,}613$; $y \approx y_8 = 2{,}374$; $z \approx z_8 = 1{,}466$.

128. A relaxációs módszer nem konvergens, akárhogy változtatjuk is meg az egyenletek sorrendjét.

129. $x \approx x_9 = 4{,}044$; $y \approx y_9 = 5{,}618$; $z \approx z_9 = 1{,}982$.

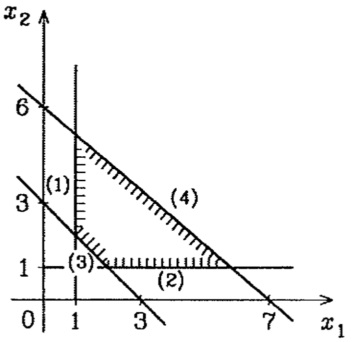
130. A harmadik feltétel egyenletét cseréljük ki egy $\geq$ és egy $\leq$ típusú egyenlőtlenségre:
$4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \iff \{4x_1 - x_2 + x_3 \leq 8$ és $4x_1 - x_2 + x_3 \geq 8\}$.
A $\geq$ típusú egyenlőségeket szorozzuk meg (-1)-gyel, továbbá vegyük figyelembe, hogy ha valamely $\mathbf{x}$ helyen a célfüggvény minimális, akkor a (-1)-szerese

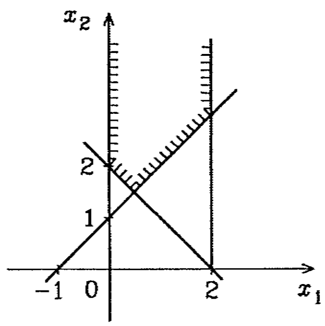
maximális.

$$
\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3 &\le 40,\\
x_1+x_2-x_3 &\le -6,\\
4x_1-x_2+x_3 &\le 8,\\
-4x_1+x_2-x_3 &\le -8,\\
x_1,\ x_2,\ x_2 &\ge 0,\\
(3x_1+4x_2+2x_3) &\to \max,
\end{aligned}
\qquad \text{illetve} \qquad
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 40\\ -6\\ 8\\ -8\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\
&[3,\ \ 4,\ \ 2]\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \to \max.
\end{aligned}
$$

131. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -7\\ 7\\ 6\\ 20\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ [2,1,-1,-3]\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \to \max.$

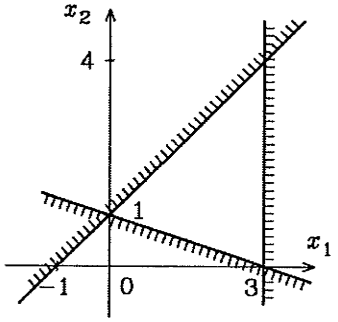
132. Az egyenlőtlenségek speciálisan egyenlőségekkel teljesülnek a bal oldali ábrán ábrázolt, $x_1-1=0$, $x_2-1=0$, $x_1+x_2-3=0$, ill. $6x_1+7x_2-42=0$ egyenletű négy egyenes pontjaira. Hozzuk az adott egyenlőtlenségeket $x_1\ge 1$, $x_2\ge 1$, $x_2\ge -x_1+3$, $x_2\le(-6/7)x_1+6$ alakúra. A bevonalozás jelöli ki az egyenlőtlenségek megoldását ábrázoló félsíkokat. Az egyenlőtlenség-rendszer megoldásait ábrázoló pontok konvex négyszöget töltenek ki.

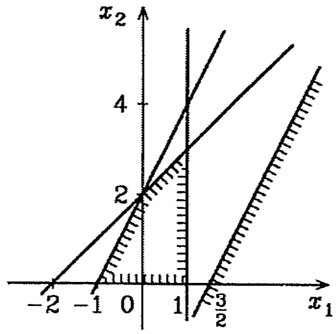




133. Az egyenlőtlenség-rendszer megoldásait ábrázoló pontok a jobb oldali ábrán látható nem korlátos konvex négyszöget töltik ki.

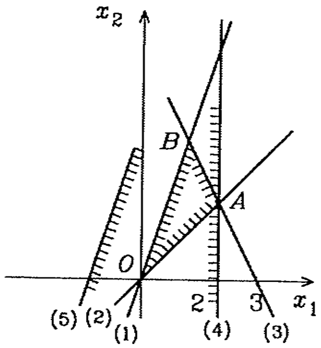
134. Határozzuk meg az egyes egyenlőtlenségeknek megfelelő félsíkokat. A következő bal oldali ábrából láthatjuk, hogy egyetlen olyan pont sincsen a síkon, amely mindhárom félsík közös pontja lenne. Ez azt jelenti, hogy az egyenlőtlenség-rendszernek nincs megoldása.

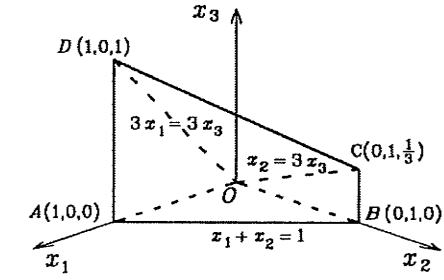




135. A megoldások halmaza üres, lásd a jobb oldali ábrát!

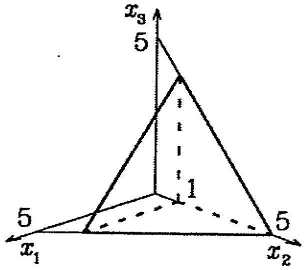
136. A megoldások halmazát a bal oldali ábra OAB háromszögtartománya ábrázolja. Látható, hogy a (4) és (5) egyenlőtlenség elhagyható: az ezeknek megfelelő félsíkok ugyanis részhalmazként tartalmazzák az OAB háromszöget.

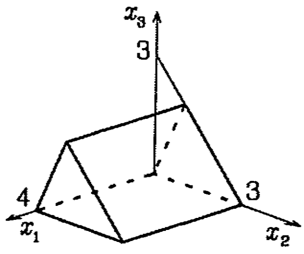




137. A megoldáshalmaznak megfelelő térbeli ponthalmazt a jobb oldali ábrán feltüntetett $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1+x_2-1 = 0$, $3x_1+x_2-3x_3 = 0$ egyenletű síkok határolják. Az egyenlőtlenség-rendszer megoldásait az O csúcspontú és $ABCD$ alaplapú gúla (konvex test) pontjai ábrázolják.

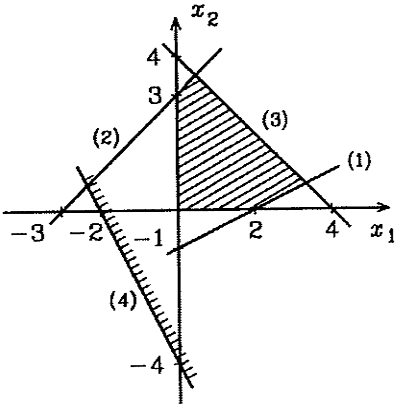
138. A megoldáshalmazt az $ABCD$ tetraéder tetraéder ábrázolja, l. következő bal oldali ábra.

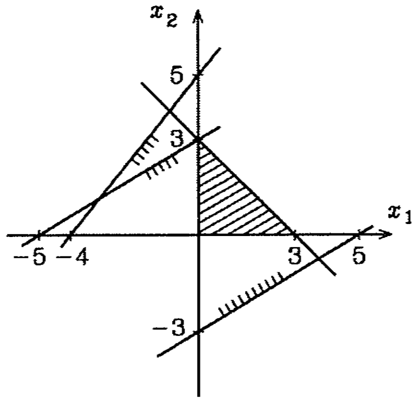




139. A megoldáshalmazt háromoldalú egyenes hasáb ábrázolja. L. bal oldali ábra.

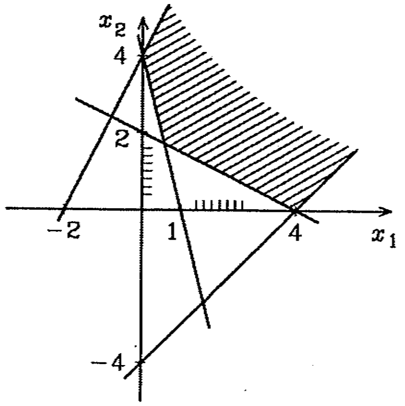
140. A (4) egyenlőtlenség elhagyható. (Ez azt jelenti, hogy a $-2x_1 - x_2 \leq 4$ egyenlőtlenség következik a rendszer többi egyenlőtlenségéből.) L. bal oldali ábra.

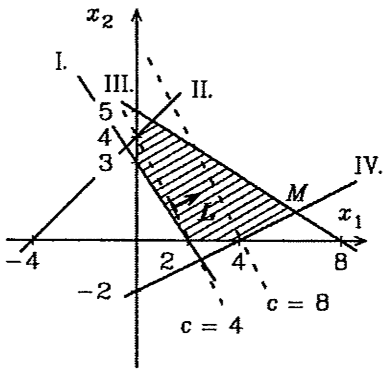




141. A jobb oldali ábra szerint elhagyható egyenlőtlenségek: $3x_1 - 5x_2 \leq 15$,
$-5x_1 + 4x_2 \leq 20$,
$-3x_1 + 5x_2 \leq 15$.

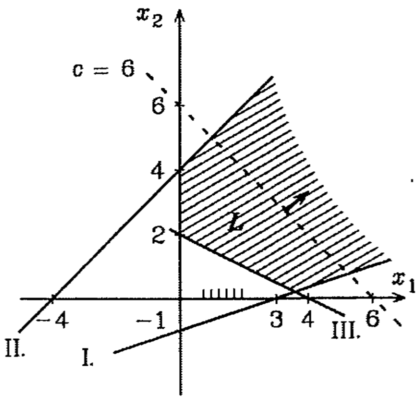
142. A $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ egyenlőtlenségek elhagyhatók. L. következő bal oldali ábra.





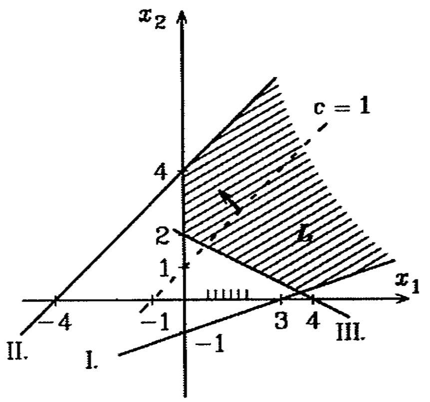
143. Az I.-V. feltételrendszer L megoldáshalmaza a megfelelő zárt félsíkok közös része (l. a bal oldali ábrán bevonalozva). Válasszunk tetszőleges c értéket, és az ábrát egészítsük ki a $g : 2x_1 + x_2 = c$ egyenessel; a c értéket válasszuk úgy, hogy a g egyenesnek legyen közös pontja az L megoldáshalmazzal. Ez most például $c = 4$-re teljesül. A kapott $2x_1 + x_2 = 4$ egyenletű egyenest önmagával párhuzamosan „jobbfelé" eltolva olyan $g : 2x_1 + x_2 = c$ egyeneseket kapunk, amelyek egyenletében $c > 4$; a c növekedésének ezt az irányát jelöljük meg nyíllal. Ezután a nyíl irányában toljuk el önmagával párhuzamosan a $2x_1 + x_2 = 4$ egyenletű egyenest a lehető legmesszebbre úgy, hogy még legyen közös pontja L-lel; ez az egyenes esetünkben a III. és IV. egyenesek M-mel jelölt csúcspontján halad át.
Az $5x_1 + 8x_2 = 40$ és $x_1 - 2x_2 = 4$ egyenletű III., ill. IV. egyenesek metszéspontja $M\left(\frac{56}{9}, \frac{10}{9}\right)$; ez adja a feladat optimális megoldását $c = 2x_1+x_2 = \frac{122}{9}$ maximális célfüggvényértékkel.
Megjegyzés. A kétváltozós lineáris programozási feladat most illusztrált grafikus megoldási módszeréből következik, hogy a megengedett megoldásokat ábrázoló konvex sokszögnek (legalább) egyik csúcsa optimális megoldást ad.

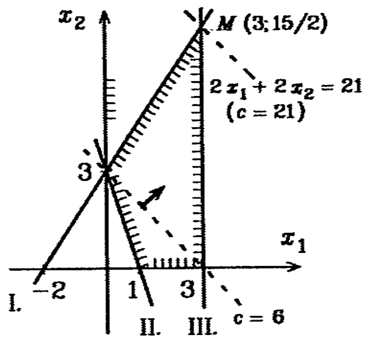
144. Ábrázoljuk az L halmazt és az $x_1 + x_2 = c$ egyenletű egyenesek közül például azt, amelyre $c = 6$. Minthogy maximumot keresünk, irányítsunk egy nyilat a c növekedésének megfelelő irány felé. Láthatjuk, hogy az L halmaz nem korlátos, és az $x_1 + x_2 = 6$ egyenes a nyíl irányában akkármekkora távolsággal eltolható úgy, hogy legyen közös pontja az L halmazzal. A feladatnak tehát nincs optimális megoldása, a célfüggvény az L halmazon felülről nem korlátos.



145. A feltételrendszer és a célfüggvény megegyezik az előző feladatéval. A minimumkeresés feltételnek megfelelően azonban a nyíl most az ellenkező irányba mutasson; ha az $x_1+x_2=6$ egyenletű egyenest ebben az irányban toljuk el a legmesszebbre úgy, hogy az L halmazzal még legyen közös pontja, akkor az L-nek $[0,2]$ koordinátájú pontját kapjuk optimális megoldásként $c=x_1+x_2=2$ optimummal. Láthatjuk, hogy ha az L halmaz nem korlátos, akkor még a célfüggvény az L halmazon lehet korlátos.

146. A feladatnak végtelen sok optimális megoldása van, mivel a $-x_1+x_2=c$ egyenletnek megfelelő egyenesek párhuzamosak a $-x_1+x_2=4$ egyenessel, amely az L halmaz egyik határoló egyenese (l. bal oldali ábra). (Ennek a II. egyenesnek az első síknegyedbe eső összes pontjában a $-x_1+x_2$ célfüggvény a maximális 4 értéket veszi fel.)





147. Az optimális megoldás az M pontnak megfelelő $x_1=3$, $x_2=\dfrac{15}{2}$; a maximum értéke 21. L. jobb oldali ábra.

148. A második és harmadik feltételből álló egyenletrendszer egyetlen megoldása $x_1=1$, $x_2=4$, ami kielégíti a többi korlátozó feltételt is. Egyetlen megengedett megoldás lévén, ez optimális megoldás is; az optimum értéke 23.

149. Végtelen sok optimális megoldás van, ezek a $P_1(0,3)$ és $P_2(2,2)$ pontokat összekötő szakasz pontjainak felelnek meg. Az optimum értéke 12.

150. A z_1 célfüggvény esetében nincs optimális megoldás, mert z_1 alulról nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.
A z_2 célfüggvényre $[0{,}5; 3]$ az optimális megoldás, és az optimum $=-2{,}5$.

151. A z_1-re optimális megoldás a $(2;6)$; az optimum értéke 62.
A z_2-re optimális megoldás a $(4;4)$; az optimum értéke 60.
A z_3 célfüggvény esetén az optimális megoldást a $P_1(2;6)$ és $P_2(4;4)$ pontok által meghatározott szakasz pontjai adják, tehát végtelen sok optimális megoldás van. A célfüggvény értéke ezekben a pontokban: 64.

152. z_1-re az optimális megoldást a $P_1(1{,}5;0)$ pont adja; a minimum értéke 10,5.
A z_2 célfüggvény nem korlátos az L megoldáshalmazon, tehát a feladatnak

nincs optimális megoldása.

A z_3 célfüggvény esetén is a P_1 pont adja az optimális megoldást, és az optimum értéke $-10{,}5$.

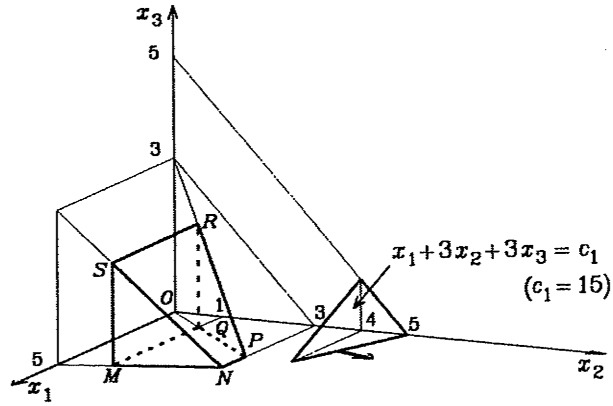
153. Az egyenlőtlenség-rendszer L megoldáshalmaza most az egyenlőtlenségeknek megfelelő síkok által közrezárt félterek közös része; az ábrán látható, M, N, P, Q, R, S csúcsú síklapú test,

az $SNPR$ sík egyenlete: $x_2 + x_3 = 3$,

az $OQRP$ sík egyenlete: $x_1 = x_2$.

Vegyünk fel egy $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = c$ egyenletű síkot; c lehet például 100. Ez a sík az L-en kívül halad. Toljuk el a síkot önmagával párhuzamosan úgy, hogy c értéke csökkenjen. Ekkor a síknak az x_1x_2 síkkal alkotott metszésvonala – egyenlete $x_1 + 3x_2 = c$ – először az $N(4;3;0)$ pontban éri el az L halmazt. Mivel N az $SNPR$ síknak, az MNS síknak és az $x_3 = 0$ egyenletű síknak a közös pontja (metszéspontja), ezért $N(4;3;0)$. A feladat optimális megoldása tehát: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, és az optimum (a célfüggvény maximális értéke L-en) 13.

Megjegyzés. A **143.** feladat utáni megjegyzés láthatóan itt is érvényes: háromváltozós lineáris programozási feladathoz tartozó megengedett megoldásokat ábrázoló konvex sokszögnek (legalább) egyik csúcsa optimális megoldást szolgáltat.



154. A célfüggvény az L-beli legnagyobb értékét az $M(2;0;0)$ és $R(16/11;0;9/11)$ pontokat összekötő szakasz pontjaiban veszi fel. A feladatnak tehát végtelen sok megoldása van.

155. A célfüggvény az L-beli legnagyobb értékét a $P(0;3;9)$ pontban veszi fel. A maximum értéke 33.

Megjegyzés. Bemutatunk egy másik módszert az optimum meghatározására. Nyilvánvaló, hogy az L megoldáshalmaz (mindig) zárt, és könnyen belátható, hogy a jelen esetben korlátos is: $x_1, x_2 > 0$ miatt $x_1 + x_3 \leq 3$-ból

$0 \le x_1 \le 3$ és $0 \le x_2 \le 3$ következik, továbbá a harmadik egyenlőtlenség miatt $0 \le x_3 \le 3(x_1 + x_2) \le 9$. A célfüggvény nyilvánvalóan folytonos, így a Weierstrass-tétel szerint felveszi L-en a maximumát. Másrészt a **153.** feladat megoldásához fűzött megjegyzés szerint minden megoldható lineáris programozási maximumfeladatnál van olyan csúcspontja L-nek, ahol a célfüggvény maximális.

Így a megoldás terve a következő. Határozzuk meg az L csúcsait, ott a célfüggvény értékeit, végül ezek maximumát.

A határsíkok metszéspontjai: $P(0,3,9)$, $B(0,3,3)$, $A(3,0,3)$, $E(3,0,9)$, $C(0,1,3)$, $D(1,0,3)$. A megfelelő célfüggvényértékek: $z(P) = 0 + 6 + 27 = 33$, $z(B) = 0 + 6 + 9 = 15$, $z(A) = 3 + 9 = 12$, $z(E) = 3 + 27 = 30$, $z(C) = 0 + 2 + 9 = 11$, $z(D) = 1 + 0 + 6 = 7$. A maximális függvényérték a $P(0,3,9)$ ponthoz tartozik és értéke 33.

156. A célfüggvény az L-beli legkisebb értékét a $P(2;0;0)$ pontban veszi fel. A minimum értéke 4.

157. Írjuk fel a határoló egyenesek egyenletét, majd célszerűen ábrázoljuk ezeket és végül csináljunk az egyenletekből olyan egyenlőtlenségeket, amelyeknek megfelelő síkok tartalmazzák az L megoldáshalmazt. Az így adódó feltételi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 2 \\ -2x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 2. \end{aligned}$$

A célfüggvény az L-en maximális értékét a $(2;0)$ és $(3;1)$ pontok által meghatározott szakasz pontjaiban veszi fel. Ezekben a pontokban a célfüggvény értéke 2.

A célfüggvény az L-beli minimális értékét, (-2)-t az $(1;3)$ pontban veszi fel.

158. Az egyenlőtlenség-rendszer:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\ge 9 \\ x_1 - x_2 &\le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 27 \\ -2x_1 + 3x_2 &\le 8 \\ 2x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

A **143.** feladat megoldása utáni megjegyzésből tudjuk, hogy a megengedett megoldásokat ábrázoló konvex sokszögnek (legalább) egyik csúcsa optimális megoldást ad. Ezért a b paraméter értékét abból a feltételből kapjuk, hogy a $3x_1 + bx_2$ célfüggvény kisebb, vagy legfeljebb annyi, mint a többi csúcspontban:

$$\begin{array}{lll} \text{az } (1;2) \text{ pontra} & 3\cdot 5 + b\cdot 6 \le 3\cdot 1 + b\cdot 2, & \text{ebből } b \le -3 \\ \text{az } (5;1) \text{ pontra} & 15 + 6b \le 15 + b, & \text{ebből } b \le 0 \\ \text{a } (7;3) \text{ pontra} & 15 + 6b \le 21 + 3b, & \text{ebből } b \le 2 \\ \text{a } (2;4) \text{ pontra} & 15 + 6b \le 6 + 4b, & \text{ebből } b \le -4{,}5. \end{array}$$

A b-re vonatkozó egyenlőtlenség-rendszer megoldása tehát: $b \leq -4{,}5$.

159. a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
(de az utóbbi két egyenlőtlenség tulajdonképp felesleges).

b) Az előző feladat megoldásának második felében alkalmazott meggondolással adódik, hogy a célfüggvény akkor veszi fel a $(6;3)$ pontban az L-beli maximumát, ha $6a + 3b \geq 2a$, $6a + 3b \geq 4a + b$, $6a + 3b \geq 3a + 6b$ és $6a + 3b \geq 5b$.

A második egyenlőtlenségből $6a + 3b \geq 4a + b$, ahonnan $2a \geq -2b$ és így $-a \leq b$ következik. A negyedikből: $6a \geq 2b$, majd $3a \geq b$.

Ezeket is figyelembe véve $-a \leq b \leq a$ és $a \geq 0$ adódik.

160. x_i jelölje azt, hogy a T_i termékből hány egységet állítsanak elő! A megoldandó matematikai feladat:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 360 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 &\leq 400 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 300 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \\ (18x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 20x_4) &\to \max \end{aligned}$$

161. Jelölje
x_1 azt, hogy hány kg lóhereszénát,
x_2 azt, hogy hány kg rétiszénát,
x_3 azt, hogy hány kg takarmányrépát,
x_4 azt, hogy hány kg burgonyát,
x_5 azt, hogy hány kg napraforgót,
x_6 azt, hogy hány kg koncentrátumot
használnak fel a takarmánykeverék előállításához. Az adott feltételeknek megfelelően a feladat matematikai modellje:

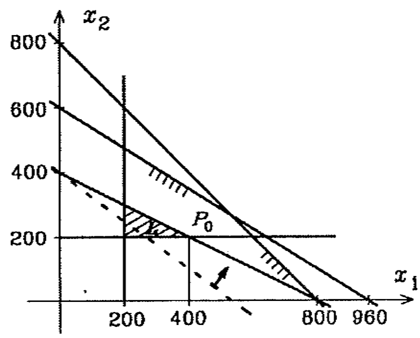
$$\begin{aligned} 0{,}54x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}30x_4 + 0{,}31x_5 + 1{,}32x_6 &\geq 18{,}26\,, \\ 56x_1 + 38x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 12x_5 + 198x_6 &\geq 1832\,, \\ 9{,}31x_1 + 6{,}02x_2 + 0{,}42x_3 + 0{,}16x_4 + 3{,}55x_5 + 2{,}72x_6 &\geq 118\,, \\ 1{,}96x_1 + 2{,}18x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}72x_4 + 0{,}68x_5 + 8{,}11x_6 &\geq 72\,, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0\,, \end{aligned}$$
$$(1{,}62x_1 + 1{,}45x_2 + 0{,}52x_3 + 1{,}54x_4 + 2{,}82x_5 + 8{,}02x_6) \to \min.$$

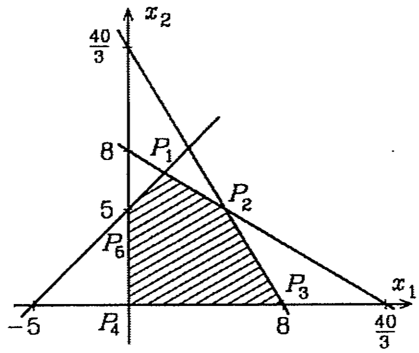
162. A feladat matematikai modellje az egynapi termelésre vonatkozik: x_i $(i = 1, 2)$

az egy nap alatt gyártandó A_i alkatrészek számát jelenti.

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 &\le 480 \\ 0{,}6x_1 + 1{,}2x_2 &\le 480 \\ x_1 &\ge 200 \\ x_2 &\ge 200 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \\ 5x_1 + 5x_2 &\le 4000 \\ (3x_1 + 4x_2) &\to \max \end{aligned}$$

Az L halmaz és az optimális megoldást adó P_0 pont a bal oldali ábrán látható. A helyi vállalat bruttó nyeresége akkor lesz maximális, éspedig 2000 Ft, ha az A_1 alkatrészből 400 darabot, az A_2 alkatrészből 200 darabot gyárt naponta. Ilyen termelési terv esetén a második gépet napi 8 órában kell üzemeltetni, tehát kapacitását 100 %-ig ki kell használni; míg az első gépnek (G_1-nek) napi 360 percet kell dolgoznia, és így kapacitását csak 75 %-ig kell kihasználni. Mivel a gépekkel naponta mindegyik alkatrészből tudnak 200 darabot termelni, azért a vállalat megkötheti a szerződést a fővárosi üzemmel.
Ha nem kötnék ki, hogy mindegyik alkatrészből naponta 200 darabot kell termelni, akkor a vállalat bruttó nyeresége növekedhetne úgy, hogy A_1-ből 800 darabot állítana elő, A_2-ből pedig nem termelne semmit sem. Ekkor a bruttó nyereség napi 2400 Ft.





163. Csak olyan élfüggvények jöhetnek szóba, amelyek „egyenesei" párhuzamosak az L halmaz valamelyik oldalegyenesével. Ha $t \neq 1$, akkor a célfüggvény egyenesének van iránytangense, mégpedig $\frac{t}{t-1}$; az L halmazt határoló oldalegyenesek iránytangensei pedig: $-3/5$; $-5/3$; 1; 0; ill. nem létezik. Ezekből adódik, hogy $t \neq 1$ esetén csak $t = 3/8$ és $t = 5/8$ jöhet szóba; ezek esetén valóban lesz a feladatnak végtelen sok optimálás megoldása. A $t = 1$ esetén a célfüggvény az L halmaznak csak egyetlen pontjában vesz fel maximális értéket. (L. a jobb oldali ábrát.)

164. a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 7 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

b) Azoknak a célfüggvényeknek nincs sem maximuma, sem pedig minimuma az adott L halmazon, amelyek grafikonja meredekebb az $x_1 - 2x_2 = 7$ egyenesnél és laposabb a $-x_1 + x_2 = 3$ egyenesnél. Ez pedig akkor áll fenn, ha
$$\frac{1}{2} < -\frac{a}{b} < 1.$$

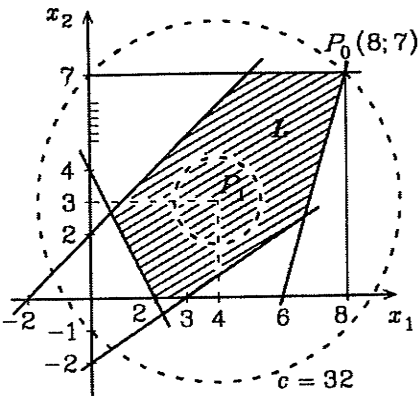
c) Az $ax_1 + bx_2$ alakú célfüggvénynek az L halmazon csak maximuma van (minimuma nincs), ha
$$-\frac{a}{b} \geq 1 \text{ és } a < 0; \text{ vagy}$$
$$0 < -\frac{a}{b} \leq \frac{1}{2} \text{ és } a > 0; \text{ vagy}$$
$$-\frac{a}{b} < 0 \text{ és } a < 0; \text{ vagy}$$
$$b = 0 \text{ és } a < 0; \text{ vagy}$$
$$a = 0 \text{ és } b < 0.$$
Ismert, hogy ahol az $ax_1 + bx_2$ függvény felveszi a maximumát, ott a (-1)-szerese (vagyis a $-ax_1 - bx_2$ függvény) a minimumát veszi fel. Ebből és az előző eredményből következik, hogy az $ax_1 + bx_2$ alakú célfüggvénynek az L halmazon csak minimuma van (de maximuma nincs), ha
$$-\frac{a}{b} \geq 1 \text{ és } a > 0; \text{ vagy}$$
$$0 < -\frac{a}{b} \leq \frac{1}{2} \text{ és } a < 0; \text{ vagy}$$
$$-\frac{a}{b} < 0 \text{ és } a > 0; \text{ vagy}$$
$$b = 0 \text{ és } a > 0; \text{ vagy}$$
$$a = 0 \text{ és } b > 0.$$

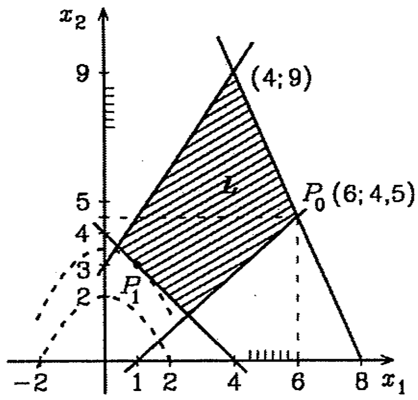
d) A c)-ből már adódik a válasz: ilyen lineáris függvény nincsen.

165. Az egyenlőtlenség-rendszer L-lel jelölt megoldáshalmazát a szokott módon kaphatjuk meg (l. például a **143**. feladat megoldását.) A feladat most az, hogy az $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = c$ egyenletű körök közül keressük meg azt a legnagyobb (ill. legkisebb) sugarút, amelynek van közös pontja az L halmazzal.

A maximumfeladat optimális megoldását a $P_0(8,7)$ pont adja (l. a következő bal oldali ábrát); a maximális függvényérték 32.

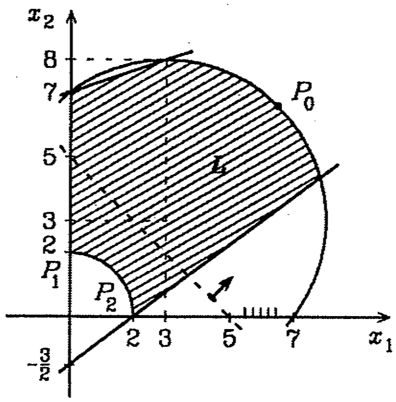
A minimumfeladat optimális megoldását a $P_1(4,3)$ pont adja; a minimális függvényérték 0.





166. Azt a maximális (ill. minimális) c-t keressük, amelyre az $x_1^2+2x_2=c$ egyenletű (lefelé nyíló) parabolának van közös pontja az L megoldáshalmazzal (l. az előző jobb oldali ábrát).
A célfüggvény az L-beli maximumát, 34-et a $P_0(4;9)$ pontban veszi fel.
Az $x_1^2+2x_2$ célfüggvény L-en ott veszi fel a minimumát, ahol az $x_1^2+2x_2=c$ egyenletű parabola érinti az $x_1+x_2=4$ egyenletű egyenest. Ez a minimum 7, és a minimum helye $P_1(1;3)$.

167. Az $x_1+x_2=5$ egyenletnek megfelelő egyenest az ábrán szaggatott vonallal jelöltük. Ennek megfelelő eltolásával határozható meg az L halmaznak az a pontja (vagy azok a pontjai), ahol a célfüggvény az L-beli maximális, illetve minimális értékét veszi fel.
A maximális értékét a célfüggvény az L halmaz P_0 pontjában veszi fel, melyben a célfüggvény értéke 13.
A minimális értékét, 2-t, a $P_1(0;2)$ és $P_2(2;0)$ pontban is felveszi.



168. A célfüggvény az L-beli maximumát, 8/3-ot a $P_0(8/9,8/3)$ pontban veszi fel. (A $8x_1-x_2^2=0$ egyenletű parabola P_0 pontjában húzott érintő lesz párhuzamos a $-3x_1+2x_2=0$ egyenessel.) A minimum értéke -9; ez a $P_1(6;4,5)$ ponthoz tartozik.

21. Tenzor (megoldások)

1. 1. megoldás: Az f függvény $\mathbf{R}^{(2)}$-ből $\mathbf{R}^{(2)}$-be képez, így elég megmutatni, hogy a **D 21.3** definíció 1. és 2. feltételei teljesülnek. Ehhez legyen $[x, y]$, $[x_1, y_1]$ és $[x_2, y_2]$ három teszőleges vektor, c tetszőleges valós szám.

$$\begin{aligned} f([x_1, y_1] + [x_2, y_2]) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= [2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), -2(x_1 + x_2)] \\ &= [2x_1 - y_1, -2x_1] + [2x_2 - y_2, -2x_2] \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2); \end{aligned}$$

$f(c[x, y] = f(cx, cy) = [2cx - cy, -2cx] = c[2x - y, -2y] = cf(x, y)$.
Tehát az f függvény egy kétdimenziós tenzor.
2. megoldás: Az 1. és 2. feltételek helyett ellenőrizzük a 3. feltételt. Ehhez legyen $[x_1, y_1]$ és $[x_2, y_2]$ két teszőleges vektor, c_1 és c_2 két tetszőleges valós szám.

$$\begin{aligned} f(c_1[x_1, y_1] + c_2[x_2, y_2]) &= f(c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= [2(c_1x_1 + c_2x_2) - (c_1y_1 + c_2y_2), -2(c_1x_1 + c_2x_2)] \\ &= c_1[2x_1 - y_1, -2x_1] + c_2[2x_2 - y_2, -2x_2] \\ &= c_1f(x_1, y_1) + c_2f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

2. f nem tenzor. Ezt megmutathatjuk akár azzal, hogy az 1. feltétel nem teljesül, akár azzal, hogy az 2. feltétel nem teljesül, akár azzal, hogy az 3. feltétel nem teljesül. Például a 2. feltétel nem teljesül, mert
$f(c[x, y]) = f(cx, cy) = [c^2x^2 + c^2y^2, 0] \neq c[x^2 + y^2, 0] = cf(x, y)$.
3. f tenzor, mert $f : \mathbf{R}^{(n)} \to \mathbf{R}^{(n)}$, továbbá fennáll a 3. feltétel:
$f(c_1[x_1, \ldots, x_n] + c_2[y_1, \ldots, y_n]) = f(c_1x_1 + c_2y_1, \ldots, c_1x_n + c_2y_n) = [c_1x_1 + c_2y_1, \ldots, n(c_1x_n + c_2y_n)] = c_1[x_1, \ldots, nx_n] + c_2[y_1, \ldots, y_n] = c_1f(x_1, \ldots, x_n) + c_2f(y_1, \ldots, y_n)$.
4. f a háromdimenziós zérustenzor.
5. f a kétdimenziós egységtenzor.
6. f nem tenzor, mert $f : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}^{(2)}$, de lineáris leképezés, mert teljesíti a 3. feltételt:
$f(c_1[x_1, y_1, z_1] + c_2[x_2, y_2, z_2]) = f(c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2, c_1z_1 + c_2z_2) = [c_1x_1 + c_2x_2 + c_1y_1 + c_2y_2, c_1y_1 + c_2y_2 + c_1z_1 + c_2z_2] = c_1[x_1 + y_1, y_1 + z_1] + c_2[x_2 + y_2, y_2 + z_2] = c_1f(x_1, y_1, z_1) + c_2f(x_2, y_2, z_2)$.
7. A egy kétdimenziós tenzor.
8. A nem lineáris leképezés (így nem is tenzor), mert nem teljesíti az 1. feltételt.
9. A nem lineáris leképezés (így nem is tenzor), mert nem teljesíti az 1. feltételt.
10. Mint ismeretes, r-nek a irányú összetevője kifejezhető e két vektor segítségével, így

$$G(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{r}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{r}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{r}|}.$$

Az 1. és 2. feltétel könnyen ellenőrizhető. Használjuk az $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ jelölést.
$G(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = ((\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0 = (\mathbf{r}_1\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0 + (\mathbf{r}_2\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0 = G(\mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}_2)$,
$G(c\mathbf{r}) = ((c\mathbf{r})\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0 = c(\mathbf{r}\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0 = cG(\mathbf{r})$.
Mivel $G : \mathbf{R}^{(3)} \to \mathbf{R}^{(3)}$, ezért G tenzor. Nyilvánvaló, hogy G értékkészlete az $\mathbf{a}$-val párhuzamos vektorokból áll, tehát G lineáris tenzor. (E transzformáció megegyezik a **P 21.4** példabeli P tenzorral, ha a egységvektor.)

11. Legyen $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ az $\mathbf{n}$ irányú egységvektor. Ekkor $G(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0$. G teljesíti az 1., 2. ill. 3. feltételt, így G tenzor, másrészt planáris, hisz értékkészlete az $\mathbf{n}$-re merőleges vektorokból áll.

12. Az $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ jelöléssel: $G(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - 2(\mathbf{r}\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0$. G teljes tenzor.

13. A $G(\mathbf{r}) = \mathbf{a} + \mathbf{r}$ transzformáció nem tenzor, mert az 1. feltételt nem teljesíti:
$G(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{a} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
$G(\mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}_2) = \mathbf{a} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{a} + \mathbf{r}_2$.

14. Ebben és a következő két feladatban az előző négy feladat megoldásai változtatás nélkül megismételhetőek.

17. Könnyen látható, hogy a $(0, 0, 0)$ pont transzformáltja a $(0, 0, 0)$-tól különböző pont lesz, vagyis vektoralakban $G(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, tehát G nem tenzor.

18. Két differenciálható függvény összege és differenciálható függvény konstansszorosa is differenciálható, két $\mathbf{R}$-en értelmezett függvény összege és $\mathbf{R}$-en értelmezett függvény konstansszorosa is $\mathbf{R}$-en értelmezett függvény, tehát H_1 és H_2 is eleget tesz a feltételnek.
$D(c_1 f_1 + c_2 f_2) = (c_1 f_1 + c_2 f_2)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' = c_1 D(f_1) + c_2 D(f_2)$,
tehát D lineáris leképezés.

19. $I(f_1 + f_2) = \int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 = I(f_1) + I(f_2)$,
$I(cf) = \int_a^b cf = c\int_a^b f = cI(f)$.

21. $A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = c_1 A(\mathbf{x}_1) + c_2 A(\mathbf{x}_2)$. Ha $n = m$, akkor A tenzor.

22. $\delta(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = \delta(f_1) + \delta(f_2)$,
$\delta(cf) = (cf)(0) = cf(0) = c\delta(f)$.

24. Ha $b = 0$, akkor a **D 21.1**-beli 1. és 2. (ill. 3.) egyenlőség teljesül, tehát a leképezés lineáris. Ha $b \neq 0$, akkor például $m(x_1 + x_2) + b \neq (mx_1 + b) + (mx_2 + b)$, vagy $m(cx) + b \neq c(mx + b)$. (Még egyszerűbben: egy lineáris leképezés a 0-t a 0-ba kell hogy képezze, az $x \mapsto mx + b$ pedig $b \neq 0$ esetén nem ezt teszi.) Vigyázzunk: ne keverjük össze a lineáris függvény (melynek grafikonja egy egyenes), és a lineáris leképezés fogalmát!

25. Legyen $f(1) = m$, ekkor $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = mx$. Az $f(x) = mx$ függvény pedig lineáris leképezés, ugyanis $f(x + y) = m(x + y) = mx + my = f(x) + f(y)$.

26. A megoldás során n és m végig legyen pozitív egész szám.
$c = n$: $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \ldots = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = nf(x)$.
$c = 0$: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, amiből $f(0) = 0$, azaz valóban $f(0x) = 0f(x)$.

$c=-1$: $0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$, azaz $f(-x)=-f(x)$.
$c=-n$: $f(cx)=f(-nx)=-f(nx)=-nf(x)=cf(x)$.
$c=\frac{1}{n}$: $f(x)=f(n\frac{x}{n})=nf(\frac{x}{n})$, amiből $f(\frac{1}{n}x)=\frac{1}{n}f(x)$.
$c=\frac{m}{n}$: $f(\frac{m}{n}x)=f(m\frac{x}{n})=mf(\frac{1}{n}x)=\frac{m}{n}f(x)$.
$c=-\frac{m}{n}$: $f(-\frac{m}{n}x)=-f(\frac{m}{n}x)=-\frac{m}{n}f(x)$.

27. Az előző feladat szerint e függvény racionális c számokkal teljesíti az $f(cx)=cf(x)$ összefüggést. Így racionális c számokra fennáll, hogy $f(c)=cf(1)=mc$, ahol $m=f(1)$. Ha $x\in\mathbf{R}$ és c_n olyan racionális sorozat, hogy $c_n\to x$, akkor f folytonossága miatt $f(c_n)\to f(x)$, azaz $f(c_n)=mc_n\to mx$, tehát $f(x)=mx$. Az mx függvény pedig teljesíti az $f(cx)=cf(x)$ feltételt tetszőleges valós c konstanssal is.

28. E tenzor teljes, mivel a tér minden $[a,b,c]$ vektora előáll valamely $[x,y,z]$ vektor képeként, ugyanis az

$$\begin{aligned}x+y&=a\\ y+z&=b\\ x+z&=c\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható.

29. E tenzor planáris, mivel az

$$\begin{aligned}x-y&=a\\ 2x+z&=b\\ 2y+z&=c\end{aligned}$$

egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&a\\2&0&1&b\\0&2&1&c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0&a\\0&2&1&b-2a\\0&0&0&2a-b+c\end{bmatrix}$$

miatt csak olyan $[a,b,c]$ vektorokra oldható meg amelyekre $2a-b+c=0$, azaz amelyek a $2a-b+c=0$ egyenletű síkon vannak.

30. f teljes tenzor.

31. f planáris tenzor.

32. f lineáris tenzor, ugyanis az

$$\begin{aligned}x-2y&=a\\ -x+2y&=b\\ 2x-4y&=c\end{aligned}$$

egyenletrendszer csak $a=-b=\frac{1}{2}c$ esetén oldható meg, ami egy egyenes egyenletrendszere.

33. f lineáris tenzor.

34. Az $\mathbf{A}$ vektorkoordinátái éppen az adott vektorok, így **T 21.7** szerint

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&5&0\\1&5&0\\3&5&-1\end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{r}$ vektor képe

$$A\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

35. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, A az egységtenzor, így bármely $\mathbf{r}$ vektorra $A\mathbf{r} = \mathbf{r}$.

36. Legyen T mátrixa $\mathbf{T} = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$. A feltételeket mátrixegyenletbe írva:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a mátrixegyenlet egyértelműen megoldható, mivel $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ invertálható:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ azaz } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

37. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

38. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & c \\ 1 & d \end{bmatrix}$, ahol c és d tetszőleges valós számok.

39. Legyen T mátrixa $\mathbf{T} = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$. A megoldandó mátrixegyenlet:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mely nem oldható meg egyértelműen. Egyenletrendszerré átírva kapjuk, hogy $2a + c = 1$, $2b + d = 0$, amiből $c = 1 - 2a$, $d = -2b$, azaz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & 1-2a \\ b & -2b \end{bmatrix},$$

ahol a és b tetszőleges valós számok. (Annak oka, hogy T nincs e két feltétel által egyértelműen meghatározva az, hogy a második egyenlőség következik az elsőből, ugyanis 2-vel szorozva az első egyenlőséget, a másodikat kapjuk: $2T[2,1] = 2[1,0]$, amiből $T(2[2,1]) = [2,0]$, azaz $T[4,2] = [2,0]$.)

40. Az

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mátrixegyenlet, illetve a belőle származó egyenletrendszer ellentmondó, így ilyen tenzor nincs. Ez látható onnan is, hogy ha $T[2,1] = [1,0]$, akkor kell, hogy $T[4,2] = [2,0]$ legyen (lásd az előző feladatot), ami ellentmond annak, hogy $T[4,2] = [3,0]$.

41. Ilyen tenzor nincs.

42. T vektorkoordinátái a megadott vektorok, melyek a $\mathbf{T}$ mátrix oszlopvektorai (**D 21.6** és **T 21.7**), azaz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

rang $\mathbf{T} = 3$, így T teljes tenzor (lásd **T 21.5** és **T 21.10**).

43. T hatását felírhatjuk egyetlen mátrixegyenletbe, ahol $\mathbf{T}$ a T mátrixa:

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}.$$

Ezt megoldhatjuk 9-ismeretlenes egyenletrendszerként, ahol a 9 ismeretlen a $\mathbf{T}$ mátrix 9 eleme, de ha a $\mathbf{T}$-t szorzó mátrix invertálható (márpedig mos invertálható), akkor egyszerűen

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&3&1\\3&1&-1\end{bmatrix}.$$

rang $\mathbf{T} = 3$, így T teljes tenzor (lásd **D 21.6**).

44. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, rang $\mathbf{T} = 2$, így T planáris tenzor.

45. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}$, rang $\mathbf{T} = 1$, így T lineáris tenzor.

46. A $\mathbf{T} = [x_{ij}]_{3\times 3}$ mátrixra vonatkozó mátrixegyenlet

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\3&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ez mátrixinvertálással nem oldható meg, mivel a $\mathbf{T}$ mátrixot szorzó mátrixnak 0 a determinánsa. A mátrixegyenletet átírva, egy $\mathbf{T}$ elemeire vonatkozó 9-ismeretlenes, pontosabban három darab 3-ismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ennek megoldásával, az $x_{13} = a$, $x_{23} = b$, $x_{33} = c$ jelöléseket használva, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1-3a&0&a\\-3b&0&b\\-3c&0&c\end{bmatrix};$$

ahol a, b és c tetszőleges valós számok. E tenzor planáris, ha $b \neq 0$, vagy $c \neq 0$, és lineáris, ha $b = c = 0$.

47. E transzformáció tenzor, hisz $\mathbf{R}^{(2)} \to \mathbf{R}^{(2)}$ leképezés, és bármely vektor c-szeresének tükörképe megegyezik a vektor tükörképének c-szeresével (**D 21.3** 1. feltétel), továbbá bármely két vektor összegének tükörképe megegyezik a vektorok tükörképének összegével (**D 21.3** 2. feltétel). T hatása az alapvektorokra:

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

tehát

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

48. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. **49.** $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. **50.** $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

51. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$. **52.** $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$. **53.** $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

54. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$.

55. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, illetve $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

56. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, illetve $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$.

57. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

58. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

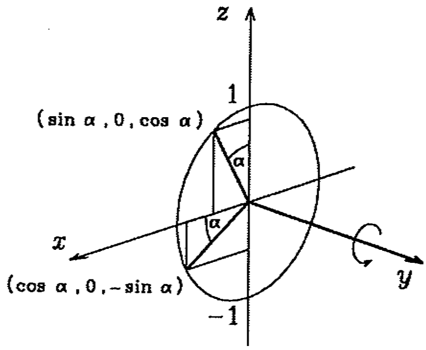
59. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, .

Például az y-tengely körüli elforgatáshoz:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\0\\-\sin\alpha\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{bmatrix},\ \text{amiből}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$



60. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

61. Legyen $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n$, így $A\mathbf{x}=A(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n)=$
$x_1A\mathbf{e}_1+x_2A\mathbf{e}_2+\ldots+x_nA\mathbf{e}_n=\begin{bmatrix}A\mathbf{e}_1 & \ldots & A\mathbf{e}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$. Ha az $A\mathbf{e}_i\in\mathbf{R}^{(m)}$ vektor koordinátás alakja $\begin{bmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}$.

(Ha $A : \mathbf{R}^{(2)} \to \mathbf{R}^{(3)}$, $\mathbf{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, és

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix},$$

továbbá $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, akkor $A\mathbf{x} = A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 =$ $x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.)

62. Az előző feladat szerint létezik egy olyan $(1 \times n)$-es $\mathbf{A}$ mátrix, amelyre $f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}\mathbf{r}$. Legyen $\mathbf{a}$ az a vektor, melynek k-adik koordinátája az $\mathbf{A}$ mátrix k-adik oszlopában álló egyetlen elem $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{a}\mathbf{r}$, ami bizonyítja állításunkat.

63. A **61.** szerint létezik egy olyan $(n \times 1)$-es $\mathbf{A}$ mátrix, amelyre $\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}t$. Legyen $\mathbf{a}$ az a vektor, melynek k-adik koordinátája az $\mathbf{A}$ mátrix k-adik sorában álló egyetlen elem $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}t = \mathbf{a}t$, ami bizonyítja állításunkat.

64. $L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $L \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, így $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

65. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

66. $L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$, $L \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0], \ldots, L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$, így $\mathbf{L} = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$.

67. $L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$, $L \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [1], \ldots, L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [1]$, így $\mathbf{L} = [1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]$.

68. Ez a leképezés nem lineáris.

69. A különböző leképezések szemléltetésére nyilakat használunk. Legyen $\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Szemléltetve:

$$\mathbf{u} \xrightarrow{\mathbf{T}} \mathbf{v}.$$

Ha e leképezést koordinátás alakban, mátrixműveletekkel adjuk meg, akkor a $\mathbf{T}_e\mathbf{u}_e = \mathbf{v}_e$, illetve a $\mathbf{T}_f\mathbf{u}_f = \mathbf{v}_f$ összefüggéseknek az

$$\mathbf{u}_e \xrightarrow{\mathbf{T}_e} \mathbf{v}_e, \text{ ill. az } \mathbf{u}_e \xrightarrow{\mathbf{T}_e} \mathbf{v}_e$$

diagram felel meg. Végül az áttérést szemléltetjük:

$$\mathbf{u}_f \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{v}_e, \ \mathbf{v}_f \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{v}_e \ \text{ ill. } \ \mathbf{v}_e \xrightarrow{\mathbf{C}^{-1}} \mathbf{v}_f.$$

Mindezeket egy közös diagramban ábrázolva:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u_e} & \xrightarrow{\mathbf{T_e}} & \mathbf{v_e} \\ \uparrow \mathbf{C} & & \downarrow \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{u_f} & \xrightarrow{\mathbf{T_f}} & \mathbf{v_f} \end{array}$$

Leolvasható, hogy $\mathbf{u_f}$-ből $\mathbf{v_f}$-et kétféleképpen kaphatjuk meg: egyrészt $\mathbf{v_f} = \mathbf{T_f u_f}$, másrészt $\mathbf{v_f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v_e} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{T_e u_e}) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{T_e}(\mathbf{C u_f}))$, azaz $\mathbf{v_f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T_e C u_f}$. Ezeket összevetve: $\mathbf{T_f u_f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T_e C u_f}$ minden $\mathbf{u_f}$ vektorra, vagyis $\mathbf{T_f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T_e C}$.

70. Az $\mathbf{e}_1 = [1,0]$, $\mathbf{e}_2 = [0,1]$ alapvektor-rendszerben T mátrixa $\mathbf{T_e} = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ (lásd **49.** feladat). Legyen $\mathbf{u}$ egy tetszőleges vektor, koordinátás alakja az $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ alapvektor-rendszerben legyen $\mathbf{u_f} = u_1\mathbf{f}_1 + u_2\mathbf{f}_2$. Ekkor koordinátás alakja az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ alapvektor-rendszerben $\mathbf{u_e} = u_1\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] + u_2\left[\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}1&2\\0&2\end{smallmatrix}\right]\mathbf{u_f}$. Ez azt jelenti, hogy az $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ alapvektor-rendszerről az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ alapvektor-rendszerre való áttérés mátrixa $\mathbf{C} = \left[\begin{smallmatrix}1&2\\0&2\end{smallmatrix}\right]$. Az előző feladat szerint $\mathbf{T_f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T_e C}$, azaz a jelen esetben:

$$\mathbf{T_f} = \begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&2\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}.$$

71. $\mathbf{T_e} = \begin{bmatrix}4&-2\\6&-3\end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{T_f} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, vagyis T az $\mathbf{f}_1$ irányú (origón áthaladó) egyenesre való, $\mathbf{f}_2$-vel párhuzamos irányú vetítés.

72. $\mathbf{T_e} = \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{T_f} = \begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$.

73. $\mathbf{T_e} = \begin{bmatrix}4&-2\\1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{T_f} = \begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$, vagyis T egy $\mathbf{f}_1$ irányú 3-szoros, és egy $\mathbf{f}_2$ irányú 2-szeres nagyításból tevődik össze.

74. $\mathbf{T_e} = \begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$,

$$\mathbf{T_f} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

75. Ha $\mathbf{f}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$, és a rá merőleges vektor $\mathbf{f}_2 = \left[\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right]$, akkor az $y = 2x$ egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{T_f} = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$, az áttérés mátrixa $\mathbf{C} = \left[\begin{smallmatrix}1&2\\2&-1\end{smallmatrix}\right]$. A $\mathbf{T_f} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T_e C}$ összefüggésből balról $\mathbf{C}$-vel, jobbról $\mathbf{C}^{-1}$-gyel való szorzással $\mathbf{T_e} = \mathbf{C T_f C}^{-1}$. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\mathbf{T_e} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}.$$

76. a) igaz; c) a D **21.11** definíciónak megfelelően igaz; b) nem igaz: két vektorértékű függvény szorzata skalárértékű, azaz $(A\mathbf{r})(B\mathbf{r})$ szám, $(AB)\mathbf{r}$ vektor. Az $(A\mathbf{r})\times(B\mathbf{r})$ pedig azért nem jöhet szóba, mert például az egységtenzorral számolva $(II)\mathbf{r}=\mathbf{r}$, míg $(I\mathbf{r})\times(I\mathbf{r})=\mathbf{0}$.

77. A mátrixszorzás asszociativitása miatt $\mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{r})=(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)\mathbf{r}$, azaz

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\mathbf{r}=(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)\mathbf{r},$$

így az $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ mátrixszal való szorzás épp az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ leképezés eredményét adja. A mátrixszal való szorzás pedig lineáris leképezést ad (**21.** feladat). Ha $n=m$, akkor a tenzorokra vonatkozó megfelelő állítást kapjuk.

78. Ha egy vektort 45°-kal és −45°-kal elforgatunk, két olyan vektort kapunk, melyek egy négyzet két szomszédos oldalát alkotják. E két vektor összege a négyzet egy átlója lesz, mely párhuzamos az elforgatott vektorral, tehát e leképezés az $\mathbf{r}\mapsto\sqrt{2}\mathbf{r}$ képlettel írható le. Másrészt: az A és B mátrixa

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

és így $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\left[\begin{smallmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{smallmatrix}\right]$, ami valóban minden $\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]$ vektorhoz annak $\sqrt{2}$-szeresét rendeli.

79. Geometriailag világos, hogy az α szöggel, majd $-\alpha$ szöggel való elforgatás minden vektort helyben hagy, vagyis $AB=BA=I$. Ugyanezt kapjuk a megfelelő mátrixokkal számolva is:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

80. Geometriailag: az α szöggel való elforgatás inverze a $-\alpha$ szöggel való forgatás, míg a síknak kétszer egymás utáni α szöggel való elforgatása a 2α szöggel való elforgatás tenzorát adja. Mátrixokkal számolva:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},$$

ami valóban megegyezik a $-\alpha$ szöggel való elforgatással mátrixával, hisz

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}.$$

Másrészt

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}.$$

81. Geometriailag könnyen látható, hogy $A^{-1}=A$, hisz bármely vektor tükörképéből visszakapjuk az eredetit, ha ismét tükrözzük. Hasonlóan látható, hogy

$A^2 = I$, mivel egy vektor tükörképének tükörképe az eredetivel egybeesik. Mindezeket a megfelelő mátrixokkal is azonnal igazolhatjuk:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

82. Két transzformáció egymás után való elvégzésének a tenzoraik szorzata felel meg, ennek mátrixát pedig a tenzorok mátrixainak összeszorzásával számíthatjuk ki. (Az a mátrix kerül jobbra, amelyikhez tartozó tenzor előbb hat a térre, hisz a $(\mathbf{CD})\mathbf{x} = \mathbf{C}(\mathbf{Dx})$ szorzat épp azt fejezi ki, hogy a D tenzor hat az $\mathbf{x}$ vektorra, majd C a $D\mathbf{x}$ vektorra.) Vagyis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & -2\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\alpha - 2\sin\alpha \\ \sin\alpha + \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

83. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

azaz e transzformáció épp az origóra való tükrözés. $\mathbf{A}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

84. Jelöljük ezt az egyenest e-vel. Az e egyenesre való tükrözést megkaphatjuk egy $-\alpha$ szögű elforgatás (ez az e egyenest az x-tengelybe viszi), egy x-tengelyre való tükrözés, majd egy α szögű forgatás (ez az x-tengelyt „visszaviszi" az e egyenesbe) egymás utáni elvégzésével. Tehát e transzformációk mátrixait kell összeszoroznunk.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

85. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}. \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\sin\alpha + \cos\alpha)\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}.$$

86. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ -1 \end{bmatrix}.$$

87. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin^2\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} & \cos^2\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}.$$

88. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha & \cos^2\alpha \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2\sqrt{3}\\2\sqrt{3}+1\\2-\sqrt{3}\end{bmatrix}$.

89. Forgassuk el a teret a z-tengely körül $-\pi/4$ szöggel (ez az $y = x$ egyenest az x-tengelybe viszi), majd itt forgassuk el a teret $\pi/2$ szöggel az x-tengely körül , végül forgassuk vissza $\pi/4$ szöggel a z-tengely körül (ez az x-tengelyt visszaviszi az $y = x$ egyenletű egyenesbe). E három transzformáció egymásutánja éppen a tér kívánt elforgatását eredményezi.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Tehát az $[1, 1, \sqrt{2}]$ pont a $[2, 0, 0]$ pontba fordul.

90. Mint ismeretes, egy $\mathbf{r}$ vektor $\mathbf{e}$-re eső merőleges vetülete $(\mathbf{er})\mathbf{e}$, ezt átalakítva $T\mathbf{r} = (\mathbf{er})\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{er}) = (\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r}$, azaz $T = \mathbf{e} \circ \mathbf{e}$.

91. Az $\mathbf{r}$ vektor $\mathbf{e}$-re eső merőleges vetülete $(\mathbf{er})\mathbf{e}$, így a síkra eső merőleges vetület $\mathbf{r} - (\mathbf{er})\mathbf{e}$. Átalakítva $T\mathbf{r} = \mathbf{r} - (\mathbf{er})\mathbf{e} = I\mathbf{r} - (\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r} = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r}$, azaz $T = I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}$.

92. $T\mathbf{r} = \mathbf{r} - 2(\mathbf{er})\mathbf{e} = I\mathbf{r} - 2(\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r} = (I - 2\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r}$, tehát $T = I - 2\mathbf{e} \circ \mathbf{e}$.

93. $T\mathbf{r} = \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} - (\mathbf{er})\mathbf{e}) = -I\mathbf{r} + 2(\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r} = (2\mathbf{e} \circ \mathbf{e} - I)\mathbf{r}$, tehát $T = 2\mathbf{e} \circ \mathbf{e} - I$.

94. Az egyenes egységnyi irányvektora $\mathbf{e} = \frac{1}{13}[3, 4, -12]$, így

$$\mathbf{T} = \mathbf{e} \circ \mathbf{e} = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} 9 & 12 & -36 \\ 12 & 16 & -48 \\ -36 & -48 & 144 \end{bmatrix}$$

95. A normális egységvektor $\mathbf{n} = \frac{1}{2}[1, 1, \sqrt{2}]$, így

$$\mathbf{T} = I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

96. A normális egységvektor $\mathbf{n} = \frac{1}{13}[3, 4, -12]$, így

$$\mathbf{T} = I - 2\mathbf{e} \circ \mathbf{e} = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} 151 & -24 & 72 \\ -24 & 137 & 96 \\ 72 & 96 & -119 \end{bmatrix}$$

97. Az egyenes egységnyi irányvektora $\mathbf{e} = \frac{1}{11}[6, -7, 6]$, így

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{e} \circ \mathbf{e} - I = \frac{1}{121}\begin{bmatrix} -49 & -84 & 72 \\ -84 & -23 & -84 \\ 72 & -84 & -49 \end{bmatrix}$$

98. 1. megoldás: Mivel $P = \mathbf{e} \circ \mathbf{e}$ és $M = I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}$ (lásd a **90.** és **91.** feladatokat), ezért az $\mathbf{e} = [a, b, c]$ jelöléssel P, M, A és A^2 mátrixa (lásd még **P 21.8**):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

Ha azt is figyelembe vesszük, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, akkor azonnal látszik, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{I} + \mathbf{A}^2$ és $\mathbf{M} = -\mathbf{A}^2$, ami a tenzorokra vonatkozó állításokat is igazolja.

2. megoldás: Az összefüggések a megfelelő mátrixok felírása nélkül is igazolhatóak a **4.107.** feladatban szereplő $\mathbf{r} - (\mathbf{er})\mathbf{e} = (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}$ összefüggés segítségével. Egyrészt $M\mathbf{r} = \mathbf{r} - (\mathbf{er})\mathbf{e}$, másrészt $-A^2\mathbf{r} = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}$, azaz $\mathbf{M} = -\mathbf{A}^2$. Mivel $P = I - M$, ezért a másik összefüggés ebből azonnal adódik.

99. E két tenzor éppen az előző feladatban szereplő M és P tenzorral egyezik meg, azaz $M = -A^2$ és $P = I + A^2$.

100. $(\mathbf{a} \times I)\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} = A\mathbf{r}$ és $(\mathbf{a} \times A)\mathbf{r} = \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{ar})\mathbf{a} - (\mathbf{aa})\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{ar}) - (\mathbf{a}^2)\mathbf{r} = [\mathbf{a} \circ \mathbf{a} - \mathbf{a}^2 I](\mathbf{r})$.

101. Az előző feladat szerint $\mathbf{a} \times I = A$, ebből pedig a **T 21.18** alapján adódik az állítás.

102. $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ a vektorinvariáns } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

103. $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \text{ a vektorinvariáns } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

104. $$\begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{bmatrix}, \text{ a vektorinvariáns } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ugyanis a T szimmetrikus, így a felbontás ferdén szimmetrikus tagja a zérustenzor, tehát a vektorinvariáns a zérusvektor.

105. $$\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{bmatrix}, \text{ ezért a vektorinvariáns:}$$

$$\begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}.$$

106. a) Legyen F mátrixa $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$, ekkor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$ (lásd a **P 21.22** példát, és $\mathbf{Fw} = \mathbf{0}$.

b) $(\mathbf{ww})I$ mátrixa $\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{w} \circ \mathbf{w}$ mátrixa $\begin{bmatrix} c^2 & -bc & ac \\ -bc & b^2 & -ab \\ ac & -ab & a^2 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & bc & -ac \\ bc & a^2+c^2 & ab \\ -ac & ab & b^2+c^2 \end{bmatrix},$$

így valóban $F^TF = (\mathbf{ww})I - \mathbf{w} \circ \mathbf{w}$.

107. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 \end{bmatrix}$,

vektorinvariánsa $[a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2] = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

108. Az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ tenzor ferdén szimmetrikus összetevője $\frac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a})$, melynek az előző feladat alapján $\frac{1}{2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ a vektorinvariánsa. Az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ tenzor mátrixának főátlójában álló elemek összege épp $\mathbf{ab}$, ez tehát skaláris invariáns.

109. $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, így $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

és $A = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \circ \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3 \circ \mathbf{e}_3$. Mátrixalakban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

110. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

111. A vektorkoordinátái $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{f}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{f}_1$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{f}_3$, így $A = 2\mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \circ \mathbf{f}_3$. Az $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ alapvektor-rendszerre vonatkozó mátrix-alak (felhasználva a **69.**

feladat eredményét):

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_f,$$

az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ alapvektor-rendszerre vonatkozó mátrix-alak:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ -6 & 6 & 6 \\ -6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & -8 & -8 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

112. Mivel $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ páronként merőleges egységvektorok, ezért $A\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1$, $A\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2$, $A\mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_3$. Így $A = \mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 \circ \mathbf{f}_3$.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_f, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

113. $\mathbf{D}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin y \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

tehát $\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ az $\mathbf{r}_0$ környezetében megegyezik az x tengelyre való vetítéssel.

$$\mathbf{v}(0.1, 0.2) \approx \mathbf{v}(0,0) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(A négy tizedesre pontos érték: $\mathbf{v}(0.1, 0.2) = [1.0799, 1.0202]$.)

114. $\mathbf{D}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{v}(1.1, 2.9) \approx \mathbf{v}(1,3) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 8.4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(A pontos érték: $\mathbf{v}(1.1, 2.9) = [1.21, 8.41, 4]$.)

115. $\mathbf{D}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{v}(1.1, 2.01, 2.98) \approx \mathbf{v}(1,2,3) + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.11 \\ 4.99 \end{bmatrix}.$$

(A pontos érték (most) ugyanennyi: $\mathbf{v}(1.1, 2.01, 2.98) = [3.11, 4.99]$.)

116. Jelölje a T tenzor $\mathbf{r}_0$-beli deriválttenzorát D. A differenciálhatóság definíciója olyan $\mathbf{r}$-től függő $E_\mathbf{r}$ tenzor létezését írja elő, melyre

$$T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{r}_0) = D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + E_\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

az $\mathbf{r}_0$ egy teljes környezetében. Mivel $T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{r}_0) = T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, ezért a $D = T$ és $E_\mathbf{r} = O$ választással teljesülnek a definíció feltételei, így a derivállttenzor valóban T.

117. Lásd az előző feladatot.

118. Mivel e függvény lineáris, ezért (az előző két feladat szerint) deriváltja önmaga. Mivel pedig $[1,0,0] \mapsto [2,0,1]$, $[0,1,0] \mapsto [-1,1,0]$, $[0,0,1] \mapsto [0,-1,0]$, ezért a derivált mátrixa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ugyanezt az eredményt kapjuk a **T 21.25** alkalmazásával is!)

119. 1. megoldás: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = (\mathbf{r} + \mathbf{a}) - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, így a **D 21.24** definícióbeli (1) összefüggés fennáll, ha $D = I$ és $E_\mathbf{r} = O$.

2. megoldás: Legyen $\mathbf{r} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, így $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = [x_1 + a_1, x_2 + a_2, \ldots, x_n + a_n]$, ezért a derivállttenzor mátrixa az egységmátrix.

120. Akár közvetlenül számolva, akár az előző feladatra hivatkozva azt kapjuk, hogy a derivált az egységtenzor.

121. Mindkettő deriváltja a zérusleképezés, mátrixaik: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

122. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0} = O(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + O(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.
(Másik megoldás kapható a derivállttenzor mátrixának felírásából.)

123. A $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\mathbf{r} = [x, y, z]$ jelölésekkel

$$Grad\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix},$$

és ez pontosan akkor szimmetrikus, ha

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y},$$

ami pontosan akkor áll fenn, ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = \mathbf{0}.$$

124. $\mathbf{grad}\, f = [f_x, f_y, f_z]$, így $\mathbf{Grad}\,\mathbf{grad}\, f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$,

esetünkben $\begin{bmatrix} 2yz & 2xz & 2xy \\ 2xz & 0 & x^2 \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$.

125. A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{v}$ függvények differenciálhatósága definíció szerint azt jelenti, hogy

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) - \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) = P(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + E_\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad (\mathbf{r} \in K_\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \mathbf{v}(\mathbf{p}_0) = V(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + E_\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0), \qquad (\mathbf{p} \in K_p),$$

ahol $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} E_\mathbf{r} = \lim_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}_0} E_\mathbf{p} = O$. Az utóbbiban elvégezve a $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r})$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{r})) - \mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)) &= V(\mathbf{p}(\mathbf{r}) - \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)) + E_\mathbf{p}(\mathbf{p}(\mathbf{r}) - \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)) \\
&= V(P(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + E_\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) + E_\mathbf{p}(P(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + E_\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \\
&= V(P(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) + [V(E_\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) + E_\mathbf{p}(P + E_\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \\
&= (VP)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + [VE_\mathbf{r} + E_\mathbf{p}P + E_\mathbf{p}E_\mathbf{r}](\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).
\end{aligned}$$

A szögletes zárójelbe tett kifejezésről látható, hogy lineáris kifejezés, és hogy $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ esetén tart a zérusleképezéshez, így a definíció feltételei teljesülnek a $\mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{r}))$ függvényre, tehát a derivált valóban VP. (Még azt is igazolni kell, hogy az összefüggés fennáll $\mathbf{r}_0$ egy teljes környezetében. Ez $\mathbf{p}$ folytonosságából következik, a részletezést az olvasóra hagyjuk.)

126. Azonnal adódik az előző feladatból.

127. 1. megoldás. A $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{v} \circ \mathbf{p}$ vektor-vektorfüggvények Jacobi mátrixának (a deriválttenzor mátrixának) felírásához a parciális deriváltak helyettesítési értékeire használjunk egyszerűbb jelöléseket csak a függvénynek és annak a változónak a jelzésével, amely szerint deriválunk, például

$$u_x := \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad s_w := \frac{\partial s(u_0, w_0)}{\partial w}, \quad s_x := \frac{\partial s(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{\partial x}.$$

E jelölésekkel a $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{v} \circ \mathbf{p}$ függvények deriválttenzorainak mátrixai rendre

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} s_u & s_w \\ t_u & t_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix}.$$

Az előző két feladat szerint $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$, tehát a mátrixszorzást elvégezve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_u u_x + s_w w_x & s_u u_y + s_w w_y \\ t_u u_x + t_w w_x & t_u u_y + t_w w_y \end{bmatrix}.$$

2. megoldás. Használjuk fel a kétváltozós függvényekre vonatkozó láncszabályt például az $s(u, w)$, $u(x, y)$, $w(x, y)$ függvényekre:

$$\frac{\partial s(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{\partial x} = \frac{\partial s(u_0, w_0)}{\partial u}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial s(u_0, w_0)}{\partial w}\frac{\partial w(x_0, y_0)}{\partial x},$$

azaz, az előzőleg bevezetett jelöléseket felhasználva, $s_x = s_u u_x + s_w w_x$. Az $\mathbf{A}$ mátrix többi eleme is hasonlóan kapható meg:
$s_y = s_u u_y + s_w w_y$, $t_x = t_u u_x + t_w w_x$, $t_y = t_u u_y + t_w w_y$.

128. 1. megoldás. $\mathbf{v}$ illetve $\mathbf{w}$ Jacobi-mátrixát jelölje $\mathbf{V}$ illetve $\mathbf{W}$.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{bmatrix}_{(1,\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$ Jacobi-mátrixa $\mathbf{r}_0$-ban $\mathbf{WV} = \mathbf{I}$, míg a $\mathbf{v} \circ \mathbf{w}$ Jacobi-mátrixa $\mathbf{p}_0$-ban $\mathbf{VW} = \mathbf{I}$.

2. megoldás. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{v}$ függvény a polárkoordinátákról a Descartes-féle koordinátákra való áttérés függvénye, míg $\mathbf{w}$ fordítva, így e két függvény egymás inverze, és kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek például az $\{\mathbf{r} \,|\, \mathbf{r} \in (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\}$ és a $\{\mathbf{p} \,|\, \mathbf{p} \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)\}$ halmazok között, továbbá e megfeleltetésekben $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{p}_0$ egymásnak megfelelő pontok. Eszerint $\mathbf{w}(\mathbf{v}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}$, illetve $\mathbf{v}(\mathbf{w}(\mathbf{p})) = \mathbf{p}$, azaz e két leképezés az identikus leképezés, ha $\mathbf{p}$ illetve $\mathbf{r}$ a fenti halmazokból való, és az identikus leképezés deriváltja (minden pontban önmaga, azaz) az identikus tenzor.

129. $\mathrm{Grad}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \left[\frac{\partial(v_i+w_i)}{\partial x_j}\right]_{3\times3} = \left[\frac{\partial(v_i)}{\partial x_j}\right]_{3\times3} + \left[\frac{\partial(w_i)}{\partial x_j}\right]_{3\times3} = \mathrm{Grad}\,\mathbf{v} + \mathrm{Grad}\,\mathbf{w}.$

130. $\mathrm{Grad}\,u\mathbf{v} = \left[\frac{\partial(uv_i)}{\partial x_j}\right]_{3\times3} = \left[u\frac{\partial(v_i)}{\partial x_j}\right]_{3\times3} + \left[v_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]_{3\times3} =$

$$u\left[\frac{\partial(v_i)}{\partial x_j}\right]_{3\times3} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

131. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = [v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1]$,

$$\mathrm{Grad}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(v_2w_3-v_3w_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(v_2w_3-v_3w_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(v_2w_3-v_3w_2)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(v_3w_1-v_1w_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(v_3w_1-v_1w_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(v_3w_1-v_1w_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(v_1w_2-v_2w_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(v_1w_2-v_2w_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial(v_1w_2-v_2w_1)}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

másrészt $\mathbf{v} \times \mathit{Grad}\,\mathbf{w}$ illetve $\mathbf{w} \times \mathit{Grad}\,\mathbf{v}$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \text{ illetve}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Kifejtés és némi számolás után megkapjuk a bizonyítandó összefüggést.

132. T hatására nyilvánvalóan csak a z-tengellyel párhuzamos vektorok nem változtatják meg irányukat, és ezeknek hosszuk sem változik meg. Így $\lambda = 1$ az egyetlen sajátérték, és $[0,0,c]$ $(c \neq 0)$ a hozzá tartozó sajátvektor. Ellenőrizzük az eredményt mátrixokkal számolva:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{sajátértékei}: \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$$

A sajátértékek közül csak $\lambda_1 = 1$ valós és a hozzá tartozó sajátvektor $[0,0,c]$ $(c \neq 0)$.

133. A z-tengelyirányú vektorok képe a zérusvektor, így ezek (a zérusvektort kivéve) sajátvektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték 0. Az xy-sík minden vektorának képe önmaga, így ezek sajátvektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték 1. A tér többi vektora nem sajátvektor. Mátrixokkal számolva:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sajátértékek: } \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1, \text{ sajátvektorok: } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \text{ ill. } \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(c \neq 0,\ x^2 + y^2 \neq 0)$.

134. $[0, 0, c]$, $\lambda_1 = -1$; az xy-sík nem-zérus vektorai, azaz $[x, y, 0]$ $(c \neq 0,\ x^2 + y^2 \neq 0)$, $\lambda_{2,3} = 1$.

135. $[a, 2a, 3a]$ $(a \neq 0)$, $\lambda_1 = 1$; az $[a, 2a, 3a]$ vektorra merőleges vektorok, $\lambda_{2,3} = 0$.

136. Az összes vektor sajátvektor, $\lambda_{1,2,3} = 1$.

137. Az összes vektor sajátvektor, $\lambda_{1,2,3} = 0$.

138. A feladat szerint $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = \mathbf{c}$, ezért

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

139. Mivel a három megadott vektor nem lineárisan független, $\mathbf{a} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, ezért a $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = \mathbf{c}$ egyenletek nem határozzák meg T-t egyértelműen:

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1+p & -2p & p \\ q & 1-2q & q \\ -1+r & 2-2r & r \end{bmatrix}.$$

140. Keressünk három lineárisan független sajátvektort (ezek közül az egyiknek a z-tengellyel párhuzamosnak kell lennie, a másik kettőnek a sík normálisára merőlegesnek), és ezekre írjuk fel T hatását. Például a három sajátvektor lehet: $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 2]$, $[1, -1, 0]$. Ekkor

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

141. Az A tenzor $\mathbf{s}_i$ sajátvektorához tartozó sajátértékét jelölje λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tehát $A\mathbf{x} = A(x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n) = x_1A\mathbf{s}_1 + x_2A\mathbf{s}_2 + \cdots + x_nA\mathbf{s}_n = x_1\lambda_1\mathbf{s}_1 + x_2\lambda_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\mathbf{s}_n$.

142. $\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot A(x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n) = \mathbf{x}\cdot(x_1\lambda_1\mathbf{s}_1 + x_2\lambda_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\mathbf{s}_n) \geq \mathbf{x}\cdot(x_1\lambda_1\mathbf{s}_1 + x_2\lambda_1\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\lambda_1\mathbf{s}_n) = \lambda_1\mathbf{x}\cdot(x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n) = \lambda_1\mathbf{x}^2$. Tehát $(\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x})/\mathbf{x}^2 \geq \lambda_1$, másrészt $(\mathbf{s}_1\cdot A\mathbf{s}_1)/\mathbf{s}_1^2 = (\mathbf{s}_1\cdot\lambda_1\mathbf{s}_1)/\mathbf{s}_1^2 = \lambda_1$, azaz az $(\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x})/\mathbf{x}^2$ függvény minimumát a legkisebb sajátértékű sajátvektorban veszi fel, és a függvény értéke ott épp a legkisebb sajátérték. A maximumra vonatkozó összefüggés hasonlóan bizonyítható, csak az egyenlőtlenségnél minden sajátérték helyébe a λ_n-et kell írni.

143. $|A\mathbf{x}| = |A(x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n)| = |x_1\lambda_1\mathbf{s}_1 + x_2\lambda_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\mathbf{s}_n| = \sqrt{\lambda_1^2x_1^2 + \lambda_2^2x_2^2 + \cdots + \lambda_n^2x_n^2} \geq \sqrt{\lambda_1^2x_1^2 + \lambda_1^2x_2^2 + \cdots + \lambda_1^2x_n^2}$ $= |\lambda_1|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = |\lambda_1||\mathbf{x}| = |\lambda_1|$.
A maximumra vonatkozó összefüggés hasonlóan bizonyítható.

144. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor a tenzor a zérustenzor, aminek minden nemnulla vektor sajátvektora, tegyük fel tehát a továbbiakban, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

1. megoldás. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ mátrixa: $\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$,

$\begin{vmatrix} a_1b_1 - \lambda & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\mathbf{ab})\lambda$, tehát $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mathbf{ab}$. Az $\mathbf{s}_1 = [x_1, y_1]$ sajátvektorhoz vezető egyenlet $b_1x_1 + b_2y_1 = 0$, amiből $\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{b}$. Az $\mathbf{s}_2 = [x_2, y_2]$ sajátvektorhoz vezető egyenlet $-a_2x_2 + a_1y_2 = 0$, amiből $\mathbf{s}_2 \parallel \mathbf{a}$.

2. megoldás. Legyen $\mathbf{e}$ egy egységnyi hosszúságú sajátvektor. Ekkor az $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$ egyenletből kapjuk, hogy $\mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$, amiből vagy $\mathbf{e} \perp \mathbf{b}$, és akkor $\lambda = 0$, vagy $\mathbf{a} = c\mathbf{e}$, és akkor $\lambda = c(\mathbf{b}^T\mathbf{e})$, azaz $\lambda = \mathbf{ab}$.