A2 matematika zárthelyi 2006.04.26.

1. [15p] A $[0,\pi]$-n folytonos függvények vektorterén adott az $< f,g >= \int_0^\pi fg\,dx$ skaláris szorzás. Számítsuk ki $f(x)=x$ merőleges vetületét az $\{1,\sin x\}$ által kifeszített altérre.

2. [15p] Konvergensek illetve abszolút konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a.\ \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{th}\,n} \quad b.\ \sum_2^\infty \left(\frac{-1}{\ln n}\right)^n \quad c.\ \sum_0^\infty \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

3. [10p] Keressük meg a konvergenciatartományt és a $\lim f_n$ határfüggvényt, ha

$$f_n(x)=\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}.$$

Egyenletes-e a konvergencia a $[-1,1]$ szakaszon?

4. [15p] Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_1^\infty \ln(1+\frac{x}{n^2}) \quad x\geq 0$$

sor összege a konvergenciatartományon differenciálható és adjuk is meg a deriváltját.

5. [15p] a. Adjuk meg a

$$\sum_1^\infty (k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

b. $\mathrm{arc\ tg}^{(101)}(0)=?$

6. [15p] Legyen $f(x)$ egy 2π-periodikus függvény, $f(x)=(\pi-x)/2$ ha $0<x\leq 2\pi$, $f(0)=0$. Számítsuk ki $f(x)$ Fourier-sorát és adjuk meg a sor összegét.

7. [15p] a. Mondjuk ki $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})=L$ definícióját.

b.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2y^2}{x^4+y^4} =?$$