A2 matematika zárthelyi 2006.03.22.

1. [10p] Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix. Ha az $\mathbf{A}(\mathbf{BA})$ szorzat létezik, akkor $\mathbf{B}$ milyen méretű mátrix?

2. [15p] Milyen x esetén nem invertálható az alábbi mátrix?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ x & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. [15p] Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$x + y + 2z = 8, \;\; -x - 2y + 3z = 1, \;\; 3x - 7y + 4z = 10.$$

4. [15p] a. Mekkora a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének dimenziója?
b. Mi a kapcsolat egy vektor két különböző bázisban vett felírása között?
c. Igaz-e?

- c1. Hasonló mátrixok sajátértékei egyenlők.
- c2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$
- c3. Ha $\mathbf{A}$ $n \times n$-es és $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$, akkor $\mathbf{A}$ invertálható.

5. [15p] Legyen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineáris operátor,

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \; T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Adjunk meg Ker T-ben és Im T-ben egy-egy bázist.

6. [15p] Legyen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ az xy-síkra tükrözés operátora. Adjuk meg T mátrixát a következő bázisban:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

7. [15p] Adjuk meg a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Invertálható-e a mátrix? Ha igen, mik lesznek az inverz mátrix sajátértékei és sajátvektorai?