Felsőbb matematika, lineáris algebra vizsgatematika, 2009.

Az 1.-8. pontokbeli tételeket nem kell tudni bizonyítani. A többi pontban a (B)-vel jelölt bizonyításokat kell tudni.
A fogalmakat és a tételeket mindkét részből ki kell tudni mondani.

1. Test fogalma (valós számtest, komplex számtest, p-elemű test). Gyűrű fogalma, kommutatív gyűrű (egészek, test feletti polinomok), nem kommutatív ($n \times n$-es mátrixgyűrű). Test feletti vektortér fogalma, példák. Altér. Lineáris függetlenség. Vektrotér generátorrendszere, bázisa, dimenziója. Adott vektorrendszer által generált altér. Lineáris leképezés, magtér, képtér, dimenziótétel(= rang nullítási tétel). Vektortérizomorfizmus, Két azonos test feletti vektortér pontosan akkor izomorf, ha azonos dimenziós. (Horváth E. Lineáris Algebra: 10-13, 59-66, 105-110, 120-122).
2. Mátrix determinánsa. Permutáció, inverzió. Determinánsok szorzástétele. Reguláris, szinguláris mátrixok. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha reguláris. Inverz számítása az adjungált mátrix segítségével valamint elemi sorműveletekkel. Mátrix rangja, ekvivalens formái (sorrang, oszloprang, rang jellemzése aldeterminánsokkal, leképezés rangjával (képtér dimenziója), oszlopok által generált altér dimenziójával, diadikus felbontással).
Mátrix rangja elemi sor- és oszlopműveletekre invariáns.(Horváth E. Lineáris Algebra: 41-54, 67-70)
3. Lineáris egyenletrendszerek, mátrixos alak. Megoldhatóság mátrixrangos feltétele, egyértelműség jellemzése, szabad paraméterek. Homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldhatósága. Mátrix, lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora, általánosított sajátvektora(=fővektor), sajátaltere, átalánosított sajátaltere. Karakterisztikus polinom, minimálpolinom, meghatározása. Cayley-Hamilton tétel. Mátrixok hasonlósága. Mátrix determinánsa, nyoma, karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja hasonlóságra invariáns. (Horváth E. Lineáris Algebra: 73-89,93)
4. Vektor adott bázisra vontakozó koordinátavektora. Lineáris leképezés adott bázispárra vonatkozó koordináta mátrixa. Lineáris leképezés bázison előírható. Báziscsere. Vektor koordinátavektora új bázisban. Lineáris transzformáció mátrixa új bázisban. Jordan-blokk. Mátrixok Jordan-féle normálalakja és egyértelműsége. Maximális mértű Jordan-blokkok leolvasása a minimálpolinomról. Adott sajátértékhez tartozó Jordan-blokkok száma= a sajátaltér dimenziója. Jordan-bázis meghatározása általánosított sajátvektorok segítségével. Egyszerű struktúrájú transzformációk jellemzése minimálpolinommal, valamint független sajátvektorok számával. A Jordan-bázis ekkor a lineárisan független sajátvektorokból áll, a Jordan-féle normálalak diagonális. (Horváth E. Lineáris Algebra: 115-133, 94-95, 191-193, 102)
5. Speciális mátrixok: szimmetrikus, önadjungált, ortogonális, unitér, normális mátrixok. Pozitív, negatív definit, (szemidefinit), indefinit mátrixok. Minden normális mátrix unitér mátrix segítségével hasonló egy diagonális mátrixhoz. Önadjungált mátrix unitér mátrixszal hasonló egy valós diagonális mátrixhoz (Spektráltétel). Unitér mátrix unitér mátrixszal hasonló egy diagonális mátrixhoz, melynek sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Szimmetrikus mátrix ortogonális mátrixszal hasonló egy valós diagonális mátrixhoz (Főtengelytétel). (Horváth E. Lineáris Algebra: 103-104, 170-171, 185)
6. Bilineáris függvény (valós, komplex), példák. Szimmetrikus (Hermite-féle) bilineáris függvény. Bilineáris függvény mátrixa. A bilineáris függvény mátrixának változása báziscsere esetén. Bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak, annak mátixa (szimmetrikus). Négyzetösszeggé transzformálás. Több valós bilineáris függvényhez is tartozhat ugyanaz a kvadratikus alak, de egyetlen szimmetrikus közöttük. Bilineáris függvény, illetve a hozzá tartozó kvadratikus alak definitsége. Definitségi kritériumok (sajátértékekkel és sarokaldeterminánsokkal). (Horváth E. Lineáris Algebra, 149-156, 173)
7. Valós és komplex skaláris szorzás, euklideszi tér. Euklideszi térben merőlegesseég, vektor hossza, valós euklideszi térben a vektorok szögének cosinusa. Minden euklideszi térben van ortonormált bázis, Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás. Minden ortonormált vektorrendszer kiegészíthető ortonormált bázissá. Alterek direkt összege. Bázis benne. Euklideszi térben minden altérhez van ortogonális kiegészítő. Vektortér altérre való ortogonális projektciója. (Horváth E. Lineáris Algebra: 157-162, 107-108)
8. Lineáris leképezés adjungáltja. Adjungált leképezés mátrixa ortonormált bázisban a leképezés mátrixának transzponált konjugáltja. Önadjungált, szimmetrikus, unitér, ortogonális, normális lineáris leképezések, jellemzésük mátrixukkal ONB-ban, diagonalizáhatóságuk. Példák. Euklideszi térben egy lineáris transz-

formáció pontosan akkor ortogonális (unitér), ha skalárszorzattartó. Elég a normatartás is. (Horváth E. Lineáris Algebra: 165-172, 179-184)
9. Projekció = idempotens lineáris transzformáció. Ha $P : V \to V$ projekcó, akkor $V = Ker(P) \oplus Im(P)$ és alkalmas bázisban mátrixa diagonális, ahol a diagonális elemek 1-ek és 0-k (**B**). Egy P projekció pontosan akkor önadjungált projekció, ha ImP és $KerP$ merőlegesek. (**B**→).(Praszolov 116-117.old)
10. Mátrixok általánosított inverzének (Moore-Penrose) definíciója. X mátrix pontosan akkor általánosított inverze az A mátrixnak, ha $r(A) = r(X)$ és $P = AX$, $Q = XA$ önadjungált projekciók a $Im(A)$ és $Im(\overline{A}^T)$ alterekre. Minden A mátrixnak egyértelműen létezik általánosított inverze. Általános inverz számítás konkrét mátrixokra. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer közelítő megoldása általános inverz segítségével. Az AXB=C mátrixegyenlet megoldhatósága és megoldása átalános inverz segítségével. Az $AX - XB = C$ és az $AX - YB = C$ mátrixegyeletek megoldhatóságának jellemzése.(Praszolov 212-216.)
11. Mátrixfüggvények értelmezése hatványsorokkal. Mátrixfüggvény számítás Hermite-féle interpolációs polinommal. Jordan-féle normálalakú mátrix függvénye. A hasonlósági mátrix a diagonalizálható esetben független sajátvektorokból áll, egyébként általánosított sajátvektorokból. Determinánsosztók, invariáns faktorok ezekből a Jordan-féle normálalak leolvasása. Kapcsolat a karakterisztikus és a minimálpolinommal.(Horváth E. Lineáris Algebra: 91-103,199-206)
12. Állandó együtthatós homogén lineáris diffegyenletek általános megoldása. e^{At} oszlopvektorai n darab lineárisan független megoldás (**B**). Alaprendszer diagonalizáható együtthatómátrix esetén és az általános esetben (**B**). $det(e^A) = e^{tr(A)}$ (**B**). (Praszolov)218-220
13. Szinguláris felbontási tétel (Praszolov 91.old. 17.25, Wikipedia SVD, Rzsa Pál: 534-538). Baloladali és jobboldali szinguláris vektorok: AA^T és A^TA ortonormált sjaátvektorrendszere. Alkalmazások: nem szinguláris négyzetes mátrix inverzének szinguláris felbontása. Determináns abszolút értéke a szinguláris értékek szorzata **B**. Általánosított inverz számítás a szinguláris felbontás segítségével. Poláris felbontási tétel. Poláris felbontásból szinguláris felbontás meghatározása és viszont. Az $A\underline{x} = \underline{0}$ megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségenek meghatározása szinguláris felbontás segítségével. Képtér, magtér rang meghatározása szinguláris felbontás segítségével. Eckart-Young tétel adott rangú legjobban közelítő mátrixról.
14. Geometriai transzformációk mátrixa (báziscserés, diadikus módszer). Két azonos hosszú vektor egymásbavitele a két vektor különbségvektora normálvektorú hipersíkra való tükrözéssel. Housholder módszere egy valós mátrix QR-felbontására (ortogonális és felső háromszög szorzataként való előállítására). Gram-Schmidt-eljárás nemszinguláris mátrix QR-felbontšára.(Wikipedia QR-felbontás).
15. Mátrixnorma axiómái. Mátrixelemek által meghatározott normák: Frobenius- (euklideszi) norma, p-adikus norma. Frobenius-norma kifejezése a szinguláris értékekkel (**B**). Vektornorma által indukált operátornorma. Példák. Spektrális norma. Spektrálsugár. A spektrálsugár alsó becslés minden vektronorma által indukált operátornormához (**B**). Az euklideszi vektornorma által indukált operátornorma egyenlő a spektrális normával (**B**). Unitér mátrixszal való szorzás megtartja a Frobenius-normát és a spektrális normát. Normális mátrix spektrális normája egyenlő a spektrálsugárral (**B**). Normák ekvivalenciája. A Frobenius-norma és a spektrális norma ekvivalens (**B**). A és $\overline{A}^T$ Frobenius- és spektrális normája megegyezik. (Praszolov 165-167, Wikipedia)
16. Mátrixnorma egyenlőtlenségek: A mátrix önadjungált része a legjobban közelítő önadjungált mátrix spektális és euklideszi normában is. Az A mátrix $A = SU$ poláris felbontásában szereplő U unitér mátrix Frobenius-normában az egyik A-t legjobban közelítő unitér mátrix. Reguláris A esetén egyetlen ilyen mátrix van. áll. (Praszolov 167)
17. Mátrixok Schur-felbontása: minden A komplex elemű négyzetes mátrix unitér mátrixszal hasonló egy felső háromszög mátrixhoz (**B**). A pontosan akkor normális, ha unitér mátrixszal hasonló egy diagonális mátrixhoz. Schur-egyenlőtlenség: mátrix sajátértékei abszolútétékei négyzetösszege felső becslése a Frobenius-norma (**B**). Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a mátrix normális.
Mátrix sajátértékei a komplex számsíkon a Gersgorin-körökben vannak (**B**). (Praszolov 90, 162, 165, Rózsa Pál: 540)
18. Nemnegatív (pozitív) elemű mátrixok, vektorok. Reducibilis, irreducibilis mátrix. Ha A nemnegatív elemű irreducibilis $n \times n$-es mátrix, akkor $(I + A)^{n-1} > 0$. Az $r(\underline{x})$ függvény. Nemnegatív elemű mátrix extremális vektora. Perron-Frobenius I. tétel. Perron-Frobenius II. tétele. Perron tétele a pozitív elemű mátrixokról (**B**). Becslés nemnegatív irreducibilis mátrix maximális abszolút értékű pozitív sajátértékére: a

minimális és maximális sorösszeg közé esik. Irreducibilis sztochasztikus mátrix maximális pozitív sajátértéke 1 (**B**). (Praszolov 171-174, Rózsa Pál: 473-491)

19. Sztochasztikus és duplán sztochasztikus mátrixok. Egy mátrix pontosan akkor sztochasztikus, ha sajátértéke 1 a csupa 1 sajátvektorral (**B**). Sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1. Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata is duplán sztochasztikus. Hosszú kígyó. Frobenius-Kőnig tétel (**B**). Minden duplán sztochasztikus mátrixban van csupa pozitív elemből álló kígyó (**B**). Páros gráf. Gráf illeszkedési mátrixa. Teljes párosítás. Kapcsolat a permutációsmátrixszal. Páros gráfban pontosan akkor van teljes párosítás, ha minden s db csúcs együtt legalább s csúccsal van összekötve (**B**). Konvex lineáris kombináció. Birkhoff tétele (**B**). Reguláris páros gráfban van teljes párosítás.(**B**) 176-178, Rózsa Pál 502-503)

20. Vektortér konvex részhalmaza. Vektorok konvek lineáris kombinációja. Halmaz konvex burka. Vektortér konvex részhalmazán értelmezett konvex függvény függvény fogalma. Geometriai tartalma. Konkáv függvény. Affin függvény. R^n affin függvényei. Lokális minimum (optimum). Globális minimum. Konvex függvény minden lokális minimuma globális. Konvex optimalizálási probléma:$(X, f, \underline{g}, \underline{h})$. f célfüggvény, primál optimum.

Konvex program: $X, f, \underline{g}$ konvex, $\underline{h}$ affin. Lineáris programozási feladat: $f, \underline{g}, \underline{h}$ affinok. (online jegyzet első fejezete)

21. Lineáris algebrai alkalmazások. Vektorteres indexelés: szótár=alapszavak (bázis), dokumentum vektor=alapszavak lineáris kombinációja. Adott dokumentumhoz tartalomban közel lévő dokumentumok: legkisebb a szögük. Dokumentumhalmaz lényegének kiemelése csonkolt SVD-vel.

Polinomok, mint együtthatóvektorok, és mint függvények, interpoláció. Titokmegosztás polinomokkal: $n+1$ ember esetén egy n-edfokú polinom $0, 1, ..., n$ helyen felvett értékeit osztjuk ki, ebből a polinom megkapható, de egyetlen részhalmazából sem. Üzenetküldés polinomok segítségével, legfeljebb l hiba kiküszöbölésével.

Lineáris kódok: hibajelzés, hibajavítás. $GF(2)$ feletti 4 hosszú vektorok esetén ismétlés 1 hibát jelez, de nem javítható (**B**). Hamming-kód: definiáló mátrixa $GF(2)^3$ nemnulla vektoraiból, mint oszlopokból álló 3×7-es H mátrix. Kódszavak: $H\underline{v} = \underline{0}$ megoldásai. Ez 4 dimenziós altér $GF(2)^7$-ben. 1 hibát javítani is tudunk benne (**B**).