

Dinamikus programozás

3. előadás

Cél: az optimum szükséges és elégséges feltételeinek megadása.
Módszer: dinamikus programozás módszere.

2012. 09. 24.

A Σ rendszer:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (\underline{t}, \bar{t}) \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

vagy

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (\underline{t}, \bar{t}) \subset \mathbb{Z} \quad (2)$$

ahol

$$x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m,$$

$$f : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Megengedett kezdő- és végállapotok:

$$\mathcal{M}_0 = \{x_0\}, \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{X}.$$

$[t_0, t_1]$ adott intervallum.

Kezdeti feltétel:

$$x(t_0) = x_0$$

Folyamat: (ξ, u)

második tagja: $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U}$ megengedett vezérlés,

első tagja: $\xi(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u)$.

Célfüggvény:

$$J(t_0, t_1, x_0, u) = \mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) + G(\xi(t_1)) \quad (3)$$

ahol

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), u(t)) dt, \quad (4)$$

illetve

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} f_0(t, \xi(t), u(t)). \quad (5)$$

Itt

$$f_0 : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{és} \quad G : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

adott függvények.

Az optimális irányítás feladata:

Adott $\sum$ rendszer, $t_0 < t_1$ időpontok,
 x_0 kezdőállapot, Q és G függvények,
keresendő $u \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérlés, amely minimalizálja a
 $J(t_0, t_1, x_0, u) = Q(t_0, t_1, x_0, u) + G(\xi(t_1))$
célfüggvényt.

Additivitási tulajdonság:

bármely $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ időpont-hármasra a

$$\mathcal{Q}(t_1, t_3, x_0, u|_{[t_1, t_3]}) = \mathcal{Q}(t_1, t_2, x_0, u|_{[t_1, t_2]}) + \\ + \mathcal{Q}(t_2, t_3, x(t_2; t_1, x_0, u|_{[t_1, t_2]}), u|_{[t_2, t_3]})$$

A fenti additivitási tulajdonság alapján lehet belátni az

Optimalitási Elv

érvényességét, ami lényegében azt mondja ki, hogy optimális trajektória tetszőleges "végső" darabja is optimális.

Ha

$$\left(x^* \left(.; t_0, x_0, u^*|_{[t_0, t_1)} \right), u^*|_{[t_0, t_1)} \right)$$

optimális folyamat a

$$J(t_0, t_1, x_0, u)$$

célfüggvényre vonatkozóan, és ha $t_0 \leq \bar{t} \leq t_1$, akkor az

$$\left(x^* \left(.; \bar{t}, x^* \left(\bar{t}, t_0, x_0, u^*|_{[t_0, \bar{t})} \right), u^*|_{[\bar{t}, t_1)} \right), u^*|_{[\bar{t}, t_1)} \right)$$

szintén optimális pár a

$$J(\bar{t}, t_1, x^* (\bar{t}, t_0, x_0, u^*|_{[t_0, \bar{t})}), u)$$

célfüggvényre vonatkozóan.

Ha nem így volna, akkor lenne egy $\bar{u} \in \Delta(\bar{t}, t_1)$ irányítás, amelyre

$$J(\bar{t}, t_1, x^*(\bar{t}, t_0, x_0, u^*|_{[t_0, \bar{t}]}), \bar{u}) < \\ J(\bar{t}, t_1, x^*(\bar{t}, t_0, x_0, u^*|_{[t_0, \bar{t}]}), u^*|_{[\bar{t}, t_1]}).$$

De az $u^*|_{[t_0, \bar{t}]}$ és $\bar{u}$ összefűzéseként, más szóval konkatenációjaként előálló

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} u^*(s), & s \in [t_0, \bar{t}), \\ \bar{u}(s), & s \in [\bar{t}, t_1) \end{cases}$$

vezérlés szintén megengedett és

$$J(t_0, t_1, x_0, \tilde{u}) = Q(t_0, \bar{t}, x_0, u^*|_{[t_0, \bar{t}]}) + \\ + J(\bar{t}, t_1, x^*(\bar{t}, t_0, x_0, u^*|_{[\bar{t}, t_1]}), \bar{u}) < J(t_0, t_1, x_0, u^*),$$

vagyis u^* nem lenne optimális.

Tegyük fel, hogy mind az $\mathcal{X}$ állapottér, mind az $\mathcal{U}$ irányítási halmaz véges sok elemből áll, mégpedig

$$N := \text{card}(\mathcal{X}), \quad M := \text{card}(\mathcal{U}),$$

ahol $\text{card}(\mathcal{Z})$ a $\mathcal{Z}$ halmaz elemeinek a számát jelöli .

Legyen

$$k = t_1 - t_0 \in \mathbb{Z}, \quad \text{és} \quad f(t, x, u) \in \mathcal{X}$$

minden $(t, x, u) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ -ra.

Naív módszer: az $u \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérléseket k elemű

$$u_1, u_2, \dots, u_k$$

sorozatnak fogjuk fel, és kiszámítjuk az összes lehetséges ilyen sorozathoz az x_0 -ból kiinduló trajektóriákat és a megfelelő célfüggvény értékeket.

A különböző vezérlési sorozat száma:

$$M^k$$

az eljárás munkaigénye:

$$kM^k$$

f és f_0 függvénykiértékelési, (és valamennyi G kiszámítási és összehasonlítási) műveletet.

Dinamikus programozási módszer: Időben t_1 -től t_0 -ig visszafelé haladva, induktív módon konstruáljuk meg az ún. **Bellman függvényt** és az **optimális visszacsatolást**

$$V : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

és

$$K : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}.$$

Követelmények:

1. Minden $s \in [t_0, t_1]$ -re és $x \in \mathcal{X}$ -re

$$V(s, x) = \min_{u \in \Delta[s, t_1]} J(s, t_1, x, u). \quad (6)$$

2. Minden $s \in [t_0, t_1]$ és minden $x \in \mathcal{X}$ esetén, ha ξ a

$$\begin{aligned}\xi(\ell + 1) &= f(\ell, \xi(\ell), K(\ell, \xi(\ell))), \quad \ell = s, s + 1, \dots, t_1 - 1 \quad (7) \\ \xi(s) &= x\end{aligned}$$

differenceciaegyenlet-rendszer megoldása, és ha

$$u^*(\ell) := K(\ell, \xi(\ell)) \quad (8)$$

definícióval élünk, akkor ez a vezérlés megadja az (s, x) -ből induló optimalizálási feladat megoldását, vagyis

$$V(s, x) = J(s, t_1, x, u^*). \quad (9)$$

Nyilvánvaló, hogy ha ezeket a függvényeket megadtuk, akkor ezzel az eredeti optimalizálási feladatot is megoldottuk, sőt nemcsak azt, hanem minden más kezdőérték esetén is a megfelelő optimalizálási feladatot.

Véges rendszerek

A V és K függvények meghatározása.

Legyen

$$V(t_1, x) = G(x)$$

minden $x \in \mathcal{X}$ -re. Ez nyilvánvalóan teljesíti a (6) követelményt. Tegyük fel, hogy a megfelelő V és K már ismert minden (s, x) -re, amelyre $t < s \leq t_1$, és $x \in \mathcal{X}$. Legyen ekkor

$$V(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{f_0(t, x, u) + V(t+1, f(t, x, u))\},$$

és legyen $v^* \in \mathcal{U}$ egy tetszőleges olyan elem, amelyen a minimum a fenti kifejezésben elértetik. Definiáljuk K -t a

$$K(t, x) = v^*$$

egyenlőséggel.

Mutassuk meg, hogy V és K továbbra is kielégíti az 1. és a 2. követelményt.

Legyen $u^0 \in \Delta[t, t_1)$ optimális a (t, x) indulóértékekre:

$$J(t, t_1, x, u^0) = \min_{u \in \Delta[t, t_1)} J(t, t_1, x, u).$$

A célfüggvény additivitási tulajdonsága miatt

$$J(t, t_1, x, u^0) = f_0(t, x, u^0(t)) + J(t+1, t_1, f(t, x, u^0(t)), u^1),$$

ahol u^1 az u^0 leszűkítése a $[t+1, t_1)$ intervallumra. Az Optimalitási Elv szerint az u^1 optimális a $[t+1, t_1)$ intervallumon az $x(t+1) = f(t, x, u^0(t))$ kezdőpontból kiindulva, vagyis

$$J(t+1, t_1, f(t, x, u^0(t)), u^1) = V(t+1, f(t, x, u^0(t))).$$

A fenti összefüggésekből az következik, hogy

$$\begin{aligned}\min_{u \in \Delta[t, t_1]} J(t, t_1, x, u) &= J(t, t_1, x, u^0) = \\ &= f_0(t, x, u^0(t)) + V(t+1, f(t, x, u^0(t))) \geq V(t, x).\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ebben az egyenlőtlenségben az egyenlőség érvényes. Legyen u^* a fenti konstrukciónak megfelelő. Írjuk fel az u^* -t az $u^*(t) = K(t, x) = v^*$ és egy $u^1|_{[t+1, t_1]}$ konkatenációjaként. Az indukciós feltevés értelmében $u^1|_{[t+1, t_1]}$ optimális az $f(t, x, u^*(t))$ pontból kiindulva. Ezért

$$\begin{aligned}J(t, t_1, x, u^*(.)) &= f_0(t, x, v^*) + V(t+1, f(t, x, v^*)) = \\ &= \min_{u \in \mathcal{U}} \{f_0(t, x, u) + V(t+1, f(t, x, u))\} = V(t, x),\end{aligned}$$

tehát az egyenlőség valóban teljesül.

A műveletigény összehasonlítása:

Dinamikus programozási módszer mellett minden egyes $t \in [t_0, t_1]$ időpontra és $x \in \mathcal{X}$ állapotra megoldandó egy minimalizálási feladat. Ehhez lényegében $2M$ függvénykiértékelést kell végezni, az összes időpontot és állapotot figyelembe véve kN -szer. Itt tehát a szükséges műveletigény

$$\mathcal{O}(kNM),$$

szemben a naív megközelítés

$$\mathcal{O}(kM^k)$$

műveletigényével. ($N = 100$, $M = 10$, és $k = 20$ esetén $kNM = 2 \cdot 10^4$, míg $kM^k = 2 \cdot 10^{21}$. Az óriási különbséget jól érzékelteti, hogy ha egy függvénykiszámítás $0.5 \cdot 10^{-6}$ másodpercig tart, akkor a dinamikus programozással az eredményt mintegy század másodperc, míg a másik módszerrel több mint 6 millió év alatt kapnánk meg.)

DE: Tárigény probléma lehet!

Legyen $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, az f és f_0 függvények pedig az alábbi értéktáblázattal adottak:

	$f(x, u)$					$f_0(x, u)$				
$u=$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$x=1$	1	5	1	4	2	0	1	0	2	3
$x=2$	2	2	3	5	1	0	0	5	9	3
$x=3$	3	4	2	3	5	0	7	5	0	6
$x=4$	4	3	5	1	4	0	7	8	2	0
$x=5$	5	1	4	2	3	0	1	8	9	6

Minimalizáljuk a

$$G(x_3) + \sum_{k=0}^2 f_0(x_k, u_k), \quad \text{ahol } G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 3, \\ 10, & \text{ha } x \neq 3. \end{cases}$$

célfüggvényt! (Ábrázoljuk az átmeneteket egy 5 csúcspontú gráfon, az élekre írjuk rá az átmenetek költségeit!) Adjuk meg az optimális célfüggvényértéket, vezérlést és trajektóriát, ha $x_0 = 1$!