4. A maximumelv és következményei differencia-egyenletekre

Most a (j melletti) (4)-nek megfelelő alakú egyenletet vizsgáljuk kicsit általánosabb alakban:

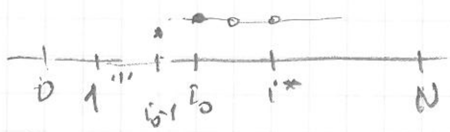
$$(5)\begin{cases} Ly_i := -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = \varphi_i & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \end{cases}$$

$$(6)\ \{\ a_i > 0,\ b_i > 0,\ c_i \geq a_i + b_i \qquad (i = 1, \dots, N-1)$$

T Tek. (5)-(6)-ban adott diff-a egyenletet! Ha az $\overline{\omega}_h$-n adott y rácsfgv nem konst és $Ly_i \leq 0$ (ill ≥ 0) $i = \overline{1, N-1}$, akkor ez a fgv nem veheti fel legnagyobb poz (ill. neg.) értékét ω_h belső csomópontban.

B Tfh $Ly_i \leq 0$, és mégis y ln. poz. értékét egy i^* indexű belső csomópontban veszi fel:

$$y_{i^*} = \max_{0 \leq i \leq N} y_i = M_0 > 0$$



$\exists i_0$, hogy $y_{i_0} = M_0$, de valamelyik szomszédjában pl $i_0 - 1$-ben $y_{i_0-1} < M_0$

Írjuk át Ly_i-t kül-kel

$$Ly_i = a_i (y_i - y_{i-1}) + b_i (y_i - y_{i+1}) + (c_i - a_i - b_i) y_i$$

Spec $i = i_0$-ra

$$Ly_{i_0} = \underbrace{a_{i_0}}_{>0} \underbrace{(y_{i_0} - y_{i_0-1})}_{>0} + \underbrace{b_{i_0}}_{>0} \underbrace{(y_{i_0} - y_{i_0+1})}_{\geq 0} + \underbrace{(c_{i_0} - a_{i_0} - b_{i_0})}_{\geq 0} \underbrace{y_{i_0}}_{\geq 0} > 0$$

ami ellentmond az $Ly_i \leq 0$ felt-nek

(A másik áll. biz analóg v. megkapható a fentiből y_i helyett $-y_i$-re alk.)

Köv. 1. Tek (5)-(6)-t és tfh $Ly_i \geqq 0$ $(i=1,\dots,N-1)$ és $y_0 \geqq 0$, $y_N \geqq 0$. Ekkor $y_i \geqq 0$, $i=0,1,\dots,N$, ill ha $Ly_i \leqq 0$ és $y_0 \leqq 0$, $y_N \leqq 0$, akkor $y_i \leqq 0$, $i=0,1,\dots,N$.

Köv. 2. Tek (5)(6)-t és tfh $\varphi_i \geqq 0$ $(i=1,\dots,N-1)$ és $y_0 \geqq 0$, $y_N \geqq 0$. Ekkor $y_i \geqq 0$, $i=0,1,\dots,N$. Ha $\varphi_i \leqq 0$, $i=1,\dots,N$ é $y_0 \leqq 0$, $y_N \leqq 0$, akkor $y_i \leqq 0$, $i=0,1,\dots,N$.

Köv. 3. Tek (5)-(6)-t. Ekkor

$$Ly_i = 0, \quad i=1,\dots,N-1, \quad y_0 = y_N = 0$$

feladatnak csak triv. mo-a van és (5) egyértelm minden megoldható tetsz φ_i, μ_1, μ_2 esetén

T (Összehasonlítási tétel) Legyen y - az (5)-(6) mo-a és $\bar{y}$ az

$$L\bar{y}_i = \bar{\varphi}_i, \quad i=1,\dots,N-1, \quad \bar{y}_0 = \bar{\mu}_1, \quad \bar{y}_N = \bar{\mu}_N$$

megoldása és tfh telj:

(*) $$|\varphi_i| \leqq \bar{\varphi}_i, \quad |\mu_1| \leqq \bar{\mu}_1, \quad |\mu_2| \leqq \bar{\mu}_2$$

Ekkor érv az alábbi becslés

$$|y_i| \leqq \bar{y}_i, \quad i=0,1,\dots,N$$

B Köv 2 $\Rightarrow$ $\bar{y}_i \geqq 0$ $\forall i$-re.

$$L(\bar{y}_i \pm y_i) = \bar{\varphi}_i \pm \varphi_i \quad i=1,\dots,N-1 \quad \bar{y}_0 \pm y_0 = \bar{\mu}_1 \pm \mu_1$$
$$\bar{y}_N \pm y_N = \bar{\mu}_2 \pm \mu_2$$

(*) $\Rightarrow$ $\bar{\varphi}_i \pm \varphi_i \geqq 0$

$\bar{\mu}_j \pm \mu_j \geqq 0 \quad j=1,2$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_i \pm y_i \geqq 0 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ $\bar{y}_i \geqq y_i$ és $y_i \geqq -\bar{y}_i$

Becsüljük az (5) -mo-t!

a) Írjuk fel az y rácsfgv-t 2 fgv összegeként: $y = y^{(1)} + y^{(2)}$ ahol

(6) $$L y_i^{(1)} = \varphi_i \quad , i = 1, \dots, N-1 \ ; \quad y_0^{(1)} = y_N^{(1)} = 0$$

és

$$L y_i^{(2)} = 0 \ , \quad i = 1, \dots, N-1 \ ; \quad y_0^{(2)} = \mu_1 \ , \ y_0^{(2)} = \mu_2$$

Világos, hogy $y_i = y_i^{(1)} + y_i^{(2)}$ mo-a az eredeti feladatnak.

$$\boxed{\max_{0 \le i \le N} |y_i^{(2)}| \le \max\{|\mu_1|, |\mu_2|\}} =: \bar{\mu}$$

Mert:
Legyen $\bar{y}$ az $L\bar{y}_i = 0$, $\bar{y}_0 = \bar{y}_N = \bar{\mu}$ mo-a:

Ekkor az összehasonlítási tétel m.:

$$|y_i| \le |\bar{y}_i|$$

A max elv m.: $\max\limits_{0 \le i \le N} |\bar{y}_i| \le \bar{\mu}$, mert $\bar{y}_i \ge 0$

lu. poz. értéket csak határpontban érheti el.

Jel.:

$$\max_{0 \le i \le N} |y_i| =: \|y\|_C$$

és megmutatható, hogy ez valóban norma!

T* Tfh (5)-ben $\mu_1 = \mu_2 = 0$

$|a_i| > 0$, $|b_i| > 0$ $\quad \bar{d}_i = |c_i| - |a_i| - |b_i| > 0 \quad i = 1, \dots, N-1$

Ekkor (5) mo-ra

$$\boxed{\|y\|_C \le \left\| \frac{\varphi}{d} \right\|_C}$$

B) Írjuk (5)-t

$$c_i y_i = a_i y_{i-1} + b_i y_{i+1} + \varphi_i \qquad i = 1, \dots, N-1$$

alakban.

Legyen i_0 olyan, hogy $0 < i_0 < N$ $\quad |y_{i_0}| > 0$ (mivel a határon 0 ez csak így lehet!)

$|y_{i_0}| \geq |y_i|$, $\quad i = 0, 1, \dots, N$. (feltehető, hogy $\varphi_i \neq 0$ $\Rightarrow y_i \neq 0$)

$$|c_{i_0}||y_{i_0}| \leq |a_{i_0}||y_{i_0-1}| + |b_{i_0}||y_{i_0+1}| + |\varphi_{i_0}| \leq (|a_{i_0}| + |b_{i_0}|)|y_{i_0}| + |\varphi_{i_0}|$$

$$\underbrace{\left(|c_{i_0}| - |a_{i_0}| - |b_{i_0}|\right)}_{d_{i_0}} |y_{i_0}| \leq |\varphi_{i_0}|$$

$$\underbrace{|y_{i_0}|}_{\|y\|_C} \leq \frac{|\varphi_{i_0}|}{d_{i_0}} \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} \frac{|\varphi_i|}{d_i} = \left\| \frac{\varphi}{d} \right\|_C$$

---

5. A differenciaséma stabilitása

D | Legyen $U_{h,\tau}$ ill $V_{h,\tau}$ a rácson ért. rácsfgv-i lin. terei $\|\cdot\|_{(1)}$ ill $\|\cdot\|_{(2)}$ normákkal ellátva. Az (1) - (3) - mal definiált differencia-sémát stabilisnak nev, ha $\exists!$ mo és $\exists M_1, M_2$ konst, hogy

$$\|y\|_{(1)} \leq M_1 \|\bar{y}\|_{(1)} + M_2 \|\varphi\|_{(2)}$$

ahol $\bar{y}$ az y leszűkítése a perempontokra.

Homogén peremfelt-d vizsg.

Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad y^j \in \mathbb{R}^{N-1}$$
a j-dik rétegen tekintett rácsfgv

A (4) $g_0(t) = g_1(t) \equiv 0$ mellett kisv alakban adható meg

$$(I + \sigma\gamma A) y^{j+1} = (I - (1-\sigma)\gamma A) y^j + \tau \varphi^{j+1} =: F^j$$

1. Eset $\sigma = 0$:

$$y^{j+1} = (I - \gamma A) y^{(j)} + \tau \varphi^{j+1}$$
$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^{(j)} + \frac{\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau \varphi_i^j$$

$1 - \frac{2\tau}{h^2} \geqq 0$ vagy $\frac{\tau}{h^2} \leqq \frac{1}{2}$ akkor a jobb old-n $\forall$ együ. poz. lesz

$$\|y^{j+1}\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |y_i^{j+1}| \leqq \underbrace{\left(1 - \frac{2\tau}{h^2} + 2\frac{\tau}{h^2}\right)}_{=1} \underbrace{\max_{1 \leq i \leq N-1} |y_i^j|}_{\|y^j\|_C} + \tau \underbrace{\max_i |\varphi_i^{j+1}|}_{\|\varphi^{j+1}\|_C}$$

$\Rightarrow$

$$\|y^{j+1}\|_C \leqq \|y^j\|_C + \tau \|\varphi^{j+1}\|_C$$
$$\leqq \|y^{j-1}\|_C + \tau\left(\|\varphi^{j+1}\|_C + \|\varphi^j\|_C\right) \leqq \ldots$$
$$\leqq \|y^0\|_C + \sum_{k=1}^{j+1} \tau \|\varphi^k\|_C$$

Az explicit séma feltételesen stabilis:
$$\boxed{\tau \leqq \frac{h^2}{2}}$$
a feltétel

2. Eset: $\sigma = 1$

$$\underbrace{(I + \gamma A) y^{j+1}}_{} = \underbrace{y^j + \tau \varphi^{j+1}}_{F^j}$$

$$-\gamma y_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\gamma) y_i^{j+1} - \gamma y_{i+1}^{j+1} = F^j$$

$\Rightarrow$ ez megfelel az $a_i = b_i = \gamma = \frac{\tau}{h^2}$, $c_i = 1 + a_i + b_i$ mellett az (5)" -re ... vizsgált esettel, így $d_i \equiv 1$ miatt

$$\underline{\| y^{j+1} \|_C} \leqq \| F^j \|_C \leqq \| y^j \|_C + \tau \| \varphi^{j+1} \|_C$$

$\Rightarrow$

$$\ldots \leqq \| y^0 \|_C + \sum_{k=1}^{j+1} \tau \| \varphi^k \|_C$$

telj. bármilyen is a τ és h viszonya $\Rightarrow$

‖ A tisztán implicit séma feltétel nélkül stabilis

3. Eset : $0 < \sigma < 1$

$$-\sigma\gamma y_{i-1}^{j+1} + (1+2\sigma\gamma) y_i^{j+1} - \sigma\gamma y_{i+1}^{j+1} = F^j$$

A * (ld. 3. old.) tétel most is alkalmazható az alábbi becslés megállapítására:

$$\| y^{j+1} \|_C \leqq \| F^j \|_C$$

Viszont most

$$F_i^j = \left(1 - (1-\sigma)\frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^j + (1-\sigma)\frac{\tau}{h}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau \varphi_i^{j+1}$$

C-normában a becslést megkapjuk, ha

$$\left(1 - (1-\sigma)\frac{2\tau}{h^2}\right) \geqq 0 \Leftrightarrow \frac{h^2}{2\tau} \geqq 1 - \sigma \Leftrightarrow \sigma \geqq 1 - \frac{h^2}{2\tau}$$

Ebben az esetben most is megkapható a

$$\| F^j \|_C \leqq \| y^j \|_C + \tau \| \varphi^{j+1} \|_C$$

és

$$\underline{\| y^{j+1} \|_C \leqq \| y^0 \|_C + \sum_{k=1}^{j+1} \tau \| \varphi^k \|_C}$$ becslés

‖ A $0 < \sigma < 1$ esetben az implicit séma stabilitásának feltétele

$$\boxed{\sigma \geqq 1 - \frac{h^2}{2\tau}}$$

FONTOS: A fenti eredmények a $\| \cdot \|_C$ normára vonatkoznak.

Más normát alkalmazva megmutatható, hogy a vizsgált séma stabilitásának feltétele:

$$\boxed{\sigma \geq \sigma_0 := \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}}$$

(Ennek részletezése nem fér bele ebbe a kurzusba.)

6 A séma konvergenciája

Legyen u az $Lu = f$, $u(x,0) = u_0(x)$, $u(0,t) = g_0(t)$, $u(1,t) = g_1(t)$

y az $L_{\tau h} y = \varphi$, $y(x,0) = u_0(x)$ $x \in \overline{\omega}_h$

$y(0,t) = g_0(t)$, $y(1,t) = g_1(t)$, $t \in \omega_\tau$

megoldása.

Tek a

$$z = y - [u] \quad \text{rácsfgv-t}$$

$\Rightarrow$ $z(0,t) = z(1,t) = 0$, $t \in \omega_\tau$ és

$z(x,0) = 0$, $x \in \overline{\omega}_h$

$$\boxed{L_{\tau h}(z) = L_{\tau h}(y) - L_{\tau h}[u] = \varphi - L_{\tau h}[u] = -\psi}$$

a) láttuk, hogy

$$\psi_i^{j+1} = \begin{cases} O(h^2 + \tau), & \text{ha } \sigma \neq \frac{1}{2} \\ O(h^2 + \tau^2), & \text{ha } \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) stabilitási eredményt felhasználva kapjuk:

$$\|z^j\|_C \leq \sum_{k=1}^{j} \tau \|\psi^k\|_C = \begin{cases} O(h^2 + \tau) & \sigma \neq \frac{1}{2} \\ O(h^2 + \tau^2) & \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ha $\quad \sigma \geq 1 - \dfrac{h^2}{2\tau}$

Az említett más normát alkalmazva kapjuk:

Ha $\qquad \sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$,

akkor a differenciaséma konvergens, méghozzá:

$$\| y^j - [u]^j \|_C = \begin{cases} O(h^2+\tau) & , \sigma \neq \frac{1}{2} \\ O(h^2+\tau^2) & \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sebességgel.

7. Aszimptotikus stabilitás (zárt stabilitás)

Láttuk, hogy az

$$Lu = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

mo-a nagy t-kre:

$$\boxed{u(x,t) \sim c_1 e^{-\lambda_1 t} X_1(x)}$$

ahol $\quad \lambda_1 = \pi^2, \quad X_1(x) = \sin \pi x \quad$ alakú

$\Rightarrow$ $t \to \infty$ esetén a mo $\to 0$.

Milyen feltétel esetén tükrözi ezt a tul-t a num közelítő mo?

SH:

$$(I + \sigma\tau A) y^{j+1} = (I - (1-\sigma)\tau A) y^{(j)}$$

$\Leftrightarrow$

$$y^{j+1} = M y^j = M^2 y^{j-1} = \dots = M^{j+1} y^0$$

ahol

$$M = (I + \sigma\tau A)^{-1} (I - (1-\sigma)\tau A)$$

Lin algebrából ismeretes, hogy

$$\| y^j \|_C \to 0 \iff \varrho(M) < 1, \text{ ahol}$$

$$\varrho(M) = \max_i | \lambda_i(M) |, \text{ és } \lambda_i(M) \text{ az } M$$

mx i-dik sé-e.

Az A mátrix sajátértékei ismertek:

$$4\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2}\right) \qquad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Ennek segítségével kifejezhető az M sajátértékeire von. feltétel:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\left(kh\frac{\pi}{2}\right)} < \delta \qquad , k = 1, \dots, N-1$$

Ez biztosan teljesül, ha

$$\frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} \leqq \delta$$

ami a korábban megismert stabilitási feltétel.