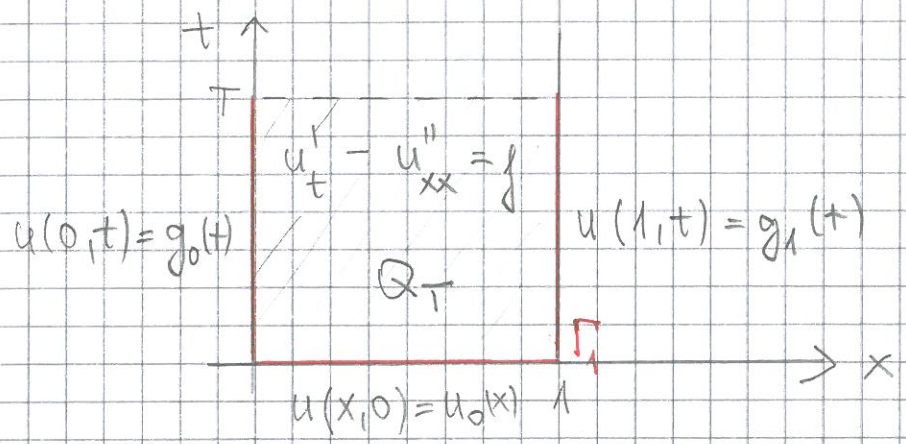
# A véges differenciák módszere a hővezetési egyenletre

1.) A feladat:

(PDE) $L(u)(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} 0<x<1 \\ 0<t\leq T \end{array} \right\} = Q_T$

(PF) $u(0,t) = g_0(t)$, $u_1(1,t) = g_1(t)$ $\quad t>0$

(KF) $u(x,0) = u_0(x)$ $\quad 0 \leq x \leq 1$




$$\overline{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_1 = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$$

Ötlet: derivált = differenciahányados
határéréke

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},\bar{t}) \sim \frac{u(\bar{x},\bar{t}) - u(\bar{x},\bar{t}-\tau)}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{t}) \sim \frac{u(\bar{x}-h,\bar{t}) - 2u(\bar{x},\bar{t}) + u(\bar{x}+h,\bar{t})}{h^2}$$

$\tau, h$ kicsi

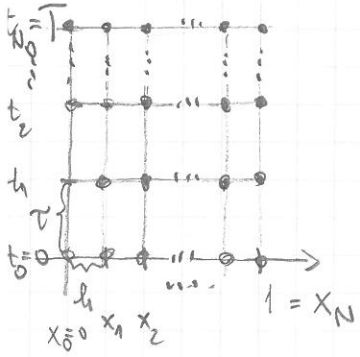
Közelítő megoldás: RÁCSFÜGGVÉNY

## 2. Parciális deriváltak közelítése véges differenciákkal

Rács a $\overline{Q}_T$ halmazon: $N, N_0 \in \mathbb{N}$ adott, $h = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{T}{N_0}$:

$$\overline{\omega}_{h\tau} := \{ (x_i, t_j) : x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i = 0, 1, \dots, N,\ j = 0, 1, \dots, N_0 \}$$

További jel:




$$\overline{\omega}_h = \{ x_i : x_i = ih,\ i = 0, \dots, N \}$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{ t_j : t_j = j\tau,\ j = 0, \dots, N_0 \}$$

$$\omega_{h\tau} = \overline{\omega}_{h\tau} \cap Q_T \qquad (\text{"belső" rácspontok})$$

Rácsfgv:

$$y : \overline{\omega}_{h\tau} \to \mathbb{R} \qquad y_i^j = y(x_i, t_j)$$

$$y_i : \overline{\omega}_\tau \to \mathbb{R} \qquad y_i = y(x_i, t), \quad t \in \overline{\omega}_\tau$$

$$y^j : \overline{\omega}_h \to \mathbb{R} \qquad y^j = y(x, t_j), \quad x \in \overline{\omega}_h$$

Ha $y^j$ adott, akkor def. $\qquad$ $j$-dik sint:

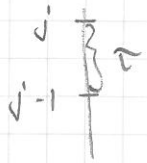
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \mapsto \right) \quad \Lambda(y^j)_i := \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}$$

$$i = 1, \dots, N-1$$

rácsfgv $\quad \omega_h = \overline{\omega}_h \cap (0, 1)$ -n

Ha $y_i$ adott, akkor def $\qquad$ ($i$-dik réteg)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u \mapsto \right) \quad \Delta(y_i)^j = \frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau}$$



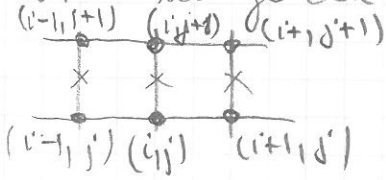

rácsfgv $\quad \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \cap (0, T]$

Ha $y$ egy $\overline{\omega}_{h\tau}$-n ért. rácsfgv, akkor

$$L_{h\tau}(y)_i^{j+1} = \Delta(y_i)^{j+1} - \left[ \sigma \Lambda(y^{j+1})_i + (1-\sigma) \Lambda(y^j)_i \right]$$

rácsfgv $\omega_{h\tau}$-n $\qquad j = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad i = 1, \dots, N-1$

6-pontos séma: $L_{h\tau}(y)$ $(x_i, t_{j+1})$-beli értékre $y$ $h$ FV helyeken felvett értékeitől függ:




$\sigma$ megválasztandó paraméter: $0 \leq \sigma \leq 1$

Értelmezzünk $f$ alapján egy tovább rácsfgv-t $\omega_{h\tau}$-n:

$$\varphi : \omega_{h\tau} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_i^{j+1} = \varphi(x_i, t_{j+1}) = f(x_i, t_j + 0{,}5\tau)$$

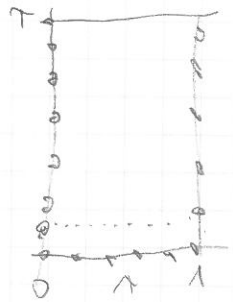
(ld a fenti rajzon a "x" jelű pontokat)

(PDE) & (PF) & (KF) közelítése differencia-egyenlettel:

(1) $\quad L_{h\tau}(y) = \varphi \qquad (x,t) \in \omega_{h\tau}$

(2) $\quad y(x,0) = u_0(x) \qquad , x \in \bar{\omega}_h$

(3) $\quad y(0,t) = g_0(t), \quad y(1,t) = g_1(t) \qquad t \in \omega_\tau$




$\Rightarrow$ $y^0$, $y_0^1$, $y_N^1$ ismertek, így (1) egy egyenletrendszer ad az $\omega_h$-n $y^1$-re, ... $j$-dik-ről $j+1$-dikre áttérve hasonlóan: $(1)/\cdot\tau \Rightarrow$

$$y_i^{j+1} - \frac{\sigma\tau}{h^2}\left[y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}\right] = \underbrace{\tau\varphi_i^{j+1} + y_i^j + (1-\sigma)\frac{\tau}{h^2}\left[y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j\right]}_{= F_i^j \leftarrow \text{ismert}}$$

$$\gamma := \frac{\tau}{h^2}$$

(4)
$$\boxed{\begin{aligned} &-\sigma\gamma\, y_{i-1}^{j+1} + (1+2\sigma\gamma)\, y_i^{j+1} - \sigma\gamma\, y_{i+1}^{j+1} = F_i^j \qquad 0 < i < N \\ &y_0^{j+1} = g_0(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = g_1(t_{j+1}) \end{aligned}}$$

$$\boxed{j = 0, 1, \dots, N_0 - 1}$$

Spec. esetek:

$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad y_i^{j+1} = F_i^j \quad , 0 < i < N$

explicit séma

$\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad$ (H) – lin. egy. rdr $y^{j+1}$-re (ws-n)

$\theta = \frac{1}{2}$ Crank-Nicolson séma

$\theta = 1$ (tisztán) implicit séma

A megoldandó feladat:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1+2\theta\gamma & -\theta\gamma & & & \\ -\theta\gamma & 1+2\theta\gamma & -\theta\gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\theta\gamma \\ & & & -\theta\gamma & 1+2\theta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{j+1} \\ y_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^j + \theta\gamma y_0^{j+1} \\ F_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{N-2}^j \\ F_{N-1}^j + \theta\gamma y_N^{j+1} \end{pmatrix}$$

A differencia-egyenlet helyes kitűzésű, ha

1.) a mo lét. bucky "bemenő adatra"

2.) a mo folyt. függ a" –"– oldó"

$$\boxed{\text{Kérdés: konvergencia? hiba?}}$$

Approximáció + stabilitás $\Rightarrow$ konvergencia

$\downarrow$

gyengébben vizsgálható

## 3 Approximáció kérdése

Legyen $u, f : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$, $Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Értelmezhetünk horzájuk rácsfgv-t 2-féle módon: jel $[\cdot]$ ill $\{\cdot\}$

$$\left([u]\right)_i^j := u(x_i, t_j) \quad ; \quad \left(\{f\}\right)_i^{j+1} := f(x_i, t_j + 0{,}5\tau)$$

(vagy $\varphi = \{f\}$). Legyen $\boxed{\psi_i^{j+1} = L_{h\tau}\left([u]\right)_i^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}$

**D** Az $L_{h\tau}$ differenciaoperátor approximálja az $L$ differenciáloperátor az $Lu = f$ egyenlet megoldása esetén, ha

$$\{Lu\} - L_{h\tau}([u]) \longrightarrow 0 \quad , \text{ha } h \to 0 \text{ és } \tau \to 0$$

Legyen $v$ tetszőleges olyan fgv, amelynek az összes parc. der-ja folyt a H-edrendig bezárólag!

a) Tek a tszfejtéseket az $(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ körül, ahol $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + 0{,}5\tau$

$$v(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} \pm 0{,}5\tau) = \left(v \pm 0{,}5\tau \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}(0{,}5\tau)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\tau^3)\right)\Big|_{(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}$$

Ezt bel. a hőv-be:

$$\Rightarrow \frac{v(x_i, t_{j+1}) - v(x_i, t_j)}{\tau} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2)\right)\Big|_{(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}$$

b) $$v(x_i \pm h, t) = \left(v \pm h\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}(h^4)\right)\Big|_{(x_i, t)}$$

$$\Rightarrow \frac{v(x_i + h, t) - 2v(x_i, t) + v(x_i - h, t)}{h^2} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2)\right)\Big|_{(x_i, t)}$$

Vegyük most $t = t_{j+\frac{1}{2}} \pm 0{,}5\tau$ -t:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{(x_i,\, t_{j+\frac{1}{2}} \pm 0{,}5\tau)} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \pm 0{,}5\tau \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial x^2} + \frac{1}{2}(0{,}5\tau)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \tau^2 \partial x^2} + \mathcal{O}(\tau^3)\right)\Big|_{(x_i,\, t_{j+\frac{1}{2}})}$$

$$\sigma \Lambda\left([v]^{j+1}\right)_i + (1-\sigma)\Lambda\left([v]^{j}\right)_i = \sigma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0{,}5\tau \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial x^2} + \mathcal{O}(h^2+\tau^2)\right)\Big|_{(x_i,\, t_{j+\frac{1}{2}})} +$$

$$+ (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 0{,}5\tau \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial x^2} + \mathcal{O}(h^2+\tau^2)\right)\Big|_{(x_i,\, t_{j+\frac{1}{2}})} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (0{,}5-\sigma)\tau \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial x^2} + \mathcal{O}(h^2+\tau^2)\right)\Big|_{(x_i,\, t_{j+1/2})}$$

$$\left(\{Lu\}\right)_i^{j+1} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Big|_{(x_i,\, t_{j+\frac{1}{2}})}$$

$$\Rightarrow \left(\{Lu\}\right)_i^{j+1} - L_{h\tau}\left([u]\right)_i^{j+1} = (\sigma - 0{,}5)\tau \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial x^2}\Big|_{(x_i,\, t_{j+\frac{1}{2}})} + \mathcal{O}(h^2+\tau^2) =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{O}(\tau + h^2), & \text{ha } \sigma \neq 0{,}5 \\ \mathcal{O}(\tau^2 + h^2), & \text{ha } \sigma = 0{,}5 \end{cases}$$

Ebből látszik, hogy a kitűzött feladat elegendően sima megoldására:

$$\boxed{\psi_i^{j+1} := \left(L_{h\tau}\left([u]\right)_i^{j+1} - \varphi_i^{j+1}\right)} =$$

$$= \left(L_{h\tau}\left([u]\right)_i^{j+1} - \varphi_i^{j+1}\right) - \left(\{Lu - f\}\right)_i^{j+1} =$$

$$= \left(L_{h\tau}\left([u]\right)_i^{j+1} - \left(\{Lu\}\right)_i^{j+1}\right) + \underbrace{\left(\{f\}_i^{j+1} - \varphi_i^{j+1}\right)}_{=0} =$$

$$\boxed{= \begin{cases} \mathcal{O}(h^2 + \tau), & \text{ha } \sigma \neq 0{,}5 \\ \mathcal{O}(h^2 + \tau^2), & \text{ha } \sigma = 0{,}5 \end{cases}}$$