Többváltozós diszkrét momentum problémák

Doktori értekezés

írta

Nagy Gergely

Matematikus

ELTE Matematika Doktori Iskola

Vezetője: Laczkovich Miklós

Alkalmazott matematika doktori program

Vezetője: Prékopa András

2002.

Témavezető: Prékopa András

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A momentum problémák fontos szerepet játszanak számos gyakorlati sztochasztikus programozási feladat esetében, mivel ezen feladatok megoldásán keresztül közelítéseket adhatunk valószínűségekre és várható értékekre. Gyakran előfordul, hogy egy valószínűségi változóhoz tartozó valószínűségi eloszlás ismeretlen, azonban ismert néhany momentuma, és ezen információk birtokában akarunk alsó illetve felső korlátokat adni az eloszlás kvantiliseire vagy pedig a valoszínűségi változó egy nemlineáris (de általában konvex) függvényének várható értékére.

Legyen P egy valószínűségi eloszlás az $[a, b]$ véges intervallumon, és jelölje $\mu_1, \mu_2, \ldots$ a hozzá tartozó hatvány momentumokat, i.e.,

$$\int_a^b z^k dP = \mu_k,\ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{0.1}$$

Az egységes jelölés kedvéért gyakran hasznaljuk a μ_0 jelölést a $k = 0$ esetre, bár tudjuk, hogy $\mu_0 = 1$.

A (0.1) hatvány momentumoknál általánosabb momentumokat definiálhatunk az $u_k(t),\ k = 0, 1, \ldots$ függvény sorozat segítségével, ahol feltesszük, hogy a sorozat tagjai folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, és lineárisan függetlenek. (A függvények bármely, véges elemből álló, nemtriviális lineáris kombinációja négyzetének az $[a, b]$ intervallumon vett integrálja nem nulla.) A P, $\{u_k(t)\}$ sorozathoz tartozó momentumai az alábbiak:

$$\int_a^b u_k(z) dP = \mu_k,\ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{0.2}$$

A momentum problémához kapcsolódó kutatási területek a következő kérdésekkel foglalkoznak:

-Adott a $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ számsorozat, keressünk szükséges és elégséges feltételeket arra, hogy ez momentumok egy sorozata.

-Adottak a $\mu_0, \ldots, \mu_m$ momentumok, vagy egyéb véges momentum halmazok, mi a legjobb alsó és felső korlát a

$$\int_a^b f(z) dP$$

integrál értékére, ahol f egy adott függvény, míg a P eloszlás ismeretlen.

A momentum problémák területének mélyebb kidolgozása Csebisev, Stieltjes és Markov nevéhez fűződik, a 19. század végéről. A klasszikus eredmények és a történeti háttér részletes leírása megtalálható Karlin and Studden [4] illetve Krein and Nudelman [5] könyveiben.

Diszkrét momentum problémának hívjuk azt az esetet, amikor a P valószínűségi eloszlás tartója véges diszkrét halmaz. Ez esetben lehetőség nyílik a feladat lineáris programozási feladatként való reprezentálására, mely egyúttal azt is jelenti, hogy használhatóak az LP területén eddig elért eredmények, módszerek. A diszkrét momentum problémák ilyen fajta megközelítése Prékopa [12] nevéhez fűződik, akinek sikerült, az f függvényre tett bizonyos feltételek mellett, a momentum problémához tartozó LP feladat összes duál megengedett bázisát kombinatorikai úton megtalálni, és ezáltal alapot adni a legjobb korlát gyors megtalálására illetve konkrét képletszerű korlátok megadására.

Tovább haladva ezen a gondolatmeneten, sokszor hasznosnak és érdekesnek bizonyul a momentum problémák azon fajtájának vizsgálata, amikor nem csak egy valószínűségi változót, hanem egy valószínűségi vektort vizsgálunk, melynek az egyváltozós tiszta momentumain kívűl adott még néhány vegyes momentuma is. Az ilyen fajta momentum probléma véges, diszkrét tartójú esetére ugyancsak alkalmazhatók LP eszközök. Az ebben a témakörben elért eddigi eredmények jó összefoglalását adja Prékopa [15], míg a probléma felvetésének hasznosságára jó bizonyítékul szolgál [17]. Megjegyezzük, hogy ez esetben, ellentétben az egyváltozós esettel, még semmilyen nem triviális feltétel mellett sem sikerült az összes duál megengedett bázis kombinatorikus megtalálása, hanem csupán csak néhány struktúráé.

Dolgozatunkban az utóbbi, többváltozós diszkrét momentum problémával foglalkozunk. Egyrészt egy, az eddigieknél általánosabb probléma lesz vizsgálatunk tárgya, melyre lényegében a Prékopa [12] és [15] cikkeiben szereplő tételek közös általánosítását kapjuk. Másrészt, feltárjuk a kapott bázisstruktúrák mögötti feladatok szerkezetét, és ezt kihasználva adunk egy dekompozíciós módszert a legjobb struktúrán belüli korlát megtalálására. Ezentúl bemutatunk egy új kombinatorikus módszert, mellyel a duál megengedett bázisoknak olyan nagyságú halmaza állítható elő, mely általában már alkalmas használható közelítések megadására a kétváltozós esetben. Végül numerikus példákon keresztül mutatjuk be eredményeink használhatóságát.

A dolgozat felépítése a következő. Az 1. Fejezetben a diszkrét momentum probléma (DMP) felvetése, a későbbiekben tárgyalt konkrét feladatok, alapfogalmak, jelölésrendszerek bevezetése szerepel. Szó esik még a diszkrét momentum probléma és a Lagrange interpoláció kapcsolatáról. Időrendi és logikai sorrendben haladva, az első szakasz a klasszikus egyváltozós esetet mutatja be, mely alapul szolgál a második szakasz többváltozós általánosításaihoz. Az egyváltozós esethez bővebb áttekintést nyújt [12] illetve [11, Section 5], míg a többváltozós eset bevezetése az [7] cikket követi.

A 2. Fejezet a diszkrét függvények konvexitását vezeti be, osztott differenciák segítségével. Szó esik még a folytonos és a diszkrét konvex függvények kapcsolatáról. A témakörről jó összefoglalást ad pl. [15].

A 3. Fejezetben szereplő tétel szolgáltat alapot az utána következő módszerek bevezetéséhez, s egyszersmind általánosítása mind az egyváltozós DMP, mind pl. a [15] cikkben tárgyalt többváltozós DMP (TDMP) hasonló jellegű tételeinek.

A 4. Fejezet első szakaszában az előző fejezet általánosabb tételének segítségével találunk duál megengedett bázis struktúrákat a TDMP feladathoz, az egyváltozós ill. a [15]-beli többváltozós DMP struktúra tételeinek általánosításaiként. A második szakaszban feltárjuk a struktúra szerinti megoldások szerkezetét, és ennek segítségével megadunk egy egyszerű dekompozíciós eljárást a struktúrán belüli legjobb korlátok megtalálására. Végül a fejezet utolsó szakasza bemutat egy merőben új módszert, mely segítségével jóval több duál megengedett bázis található, de sajnos csak a kétváltozós esetre. Mint az 5. Fejezetben látni fogjuk, numerikus jelentősége így sem lebecsülendő.

Az utolsó fejezet az elmélet használhatóságát hivatott bizonyítani. Konkrét feladatokon keresztül vizsgálja, hasonlítja össze a különböző módszerek pontosságát, hatékonyságát. Remélhetőleg sikerül azt is megvilágítani, hogy milyen előnyökkel jár a dolgozatban tárgyalt általánosabb TDMP használata az előzményként szolgáló [15]-beli feladathoz képest.

A dolgozatban saját eredmények: a 3.1. Tétel bizonyítása illetve a 4.2. és 4.3. szakaszokban szereplő módszerek. Az 5. fejezet numerikus példái ugyancsak saját munkák.

1. Diszkrét momentum problémák

1.1. Az egyváltozós diszkrét momentum probléma

A dolgozat témájául szolgáló többváltozós diszkrét momentum problémák előzményeként az egyváltozós diszkrét momentum problémák (DMP) területén a lineáris programozás eszközeivel elért első eredményeket említhetjük. Szakaszunkban ezekről az eredményekről adunk némi összefoglalót Prékopa [12] cikke alapján. Megjegyezzük, hogy a diszkrét momentum problémák témakörének más megközelítése is létezik, lásd pl. Samuels and Studden [19].

Legyen X egy valószínűségi változó, mely tartója a $z_0 < z_1 < \cdots < z_n$ számokból álló véges halmaz. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$p_i = P(X = z_i),\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Feltesszük, hogy a fenti valószínűségek nem ismertek, viszont ismertek a $\mu_k = E(X^k)$, $k = 1, \ldots, m$ hatvány momentumok, vagy pedig az $S_k = E\left[\binom{X}{k}\right]$, $k = 1, \ldots, m$ binomiális momentumok, ahol $m < n$ adott. Célunk egy a $\{p_i\}$ halmazon definiált lineáris funkcionál minimalizálása illetve maximalizálása, figyelembe véve a momentumok által meghatározott megszorításokat. Más szóval, tekintsük a következő lineáris programozás feladatokat:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \min(\max)\ \ \{f_0p_0 + f_1p_1 + \cdots + f_np_n\} \\ \text{feltéve, hogy} \\ \qquad\qquad \begin{array}{ccccccccc} p_0 & + & p_1 & + & \cdots & + & p_n & = & 1 \\ z_0p_0 & + & z_1p_1 & + & \cdots & + & z_np_n & = & \mu_1 \\ z_0^2p_0 & + & z_1^2p_1 & + & \cdots & + & z_n^2p_n & = & \mu_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ z_0^mp_0 & + & z_1^mp_1 & + & \cdots & + & z_n^mp_n & = & \mu_m \end{array} \\ \qquad\qquad p_0 \geq 0,\ p_1 \geq 0, \ldots,\ p_n \geq 0, \end{array} \tag{1.2}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \min(\max)\ \ \{f_0p_0 + f_1p_1 + \cdots + f_np_n\} \\ \text{feltéve, hogy} \\ \qquad\qquad \begin{array}{ccccccccc} p_0 & + & p_1 & + & \cdots & + & p_n & = & 1 \\ z_0p_0 & + & z_1p_1 & + & \cdots & + & z_np_n & = & S_1 \\ \binom{z_0}{2}p_0 & + & \binom{z_1}{2}p_1 & + & \cdots & + & \binom{z_n}{2}p_n & = & S_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ \binom{z_0}{m}p_0 & + & \binom{z_1}{m}p_1 & + & \cdots & + & \binom{z_n}{m}p_n & = & S_m \end{array} \\ \qquad\qquad p_0 \geq 0,\ p_1 \geq 0, \ldots,\ p_n \geq 0. \end{array} \tag{1.3}$$

A továbbiakban az (1.2) problémát hatvány, míg az (1.3) problémát binomiális momentum problémának fogjuk hívni. A korlátozó egyenletrendszer mátrixát, oszlopait illetve a jobboldalon álló vektort rendre az $A, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ és $\boldsymbol{b}$ betűkkel jelöljük, mindkét probléma esetén. Így a hatvány momentum problémára

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ \vdots \\ z_i^m \end{pmatrix}, \ i = 0, 1, \ldots, n; \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

míg a binomiális momentum problémára

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ \binom{z_i}{2} \\ \vdots \\ \binom{z_i}{m} \end{pmatrix}, \ i = 0, 1, \ldots, n; \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Az (1.2) illetve az (1.3) problémák egymásba átkonvertálhatók az első illetve másodfajú Stirling számok segítségével. Ezeket jelöljék rendre az $s(l, k)$ és az $S(l, k)$ szimbólumok, és definiálják őket az alábbi egyenletek.

$$\begin{aligned} (z)_l &= \sum_{k=0}^{l} s(l, k) z^k \\ z^l &= \sum_{k=0}^{l} S(l, k)(z)_k, \end{aligned} \tag{1.6}$$

ahol $(z)_k = z(z-1)\cdots(z-k+1)$, $k = 1, 2, \ldots,$ esetén, másrészt $(z)_0 = 1$. Ismert (lásd Riordan [18]), hogy

$$\begin{aligned} s(n, k) &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0}} \frac{(-1)^{n+k} n!}{k_1! 1^{k_1} \cdots k_n! n^{k_n}}, \\ S(n, k) &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0}} \frac{n!}{k_1! 1^{k_1} \cdots k_n! n^{k_n}}. \end{aligned}$$

Legyen $s_{lk} = \frac{s(l,k)}{l!}$, $S_{lk} = S(l, k)k!$. Alkalmazva a (1.6) egyenleteket $z = X$ esetére, majd tekintve mindkét oldal várható értékét, látható, hogy ha az (1.4) vektorokat balról megszorozzuk a

$$T_1 = \begin{pmatrix} s_{00} & & & & \\ s_{10} & s_{11} & & & \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{m0} & s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

mátrixszal, akkor pont a (1.5) vektorokat kapjuk meg, míg ha az (1.5) vektorokat szorozzuk meg balról a

$$T_2 = \begin{pmatrix} S_{00} & & & & \\ S_{10} & S_{11} & & & \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ S_{m0} & S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

mátrixszal, akkor pedig pont az (1.4) vektoraihoz jutunk. Vegyük észre, hogy teljesül a $T_2 = T_1^{-1}$ reláció is.

Az $\boldsymbol{f}$ vektor tekintetében három fajta feltevéssel szoktak élni. Ám mielőtt ezeket felvázolnánk, megjegyezzük, hogy f_k helyett néha az $f(z_k)$ jelölést fogjuk használni, néha pedig az f függvény értelmezési tartományát kiterjesztjük az egész $[z_0, z_n]$ intervallumra. Az említett három fajta eset a következő.

(1) Az f függvény $\{z_0, z_1, \ldots, z_s\}$ halmazon vett $m+1$ rendű osztott differenciái pozitívak (lásd a későbbi definíciót), más szóval a diszkrét halmazon értelmezett f függvény $m+1$ rendben konvex. A feltételt, többek közt kielégítik azok a $[z_0, z_n]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények, melyekre $f^{(m+1)}(z) > 0$ az intervallum belső pontjaiban. Ez esetben az (1.2) illetve (1.3) feladatok optimális megoldásai éles korlátokat szolgáltatnak az $E[f(z)]$ várható értékre.

(2) Egy adott $0 \le r \le n$ értékre $f_r = 1,\ f_i = 0\ i \ne r$ esetén. Ez esetben az (1.2) illetve (1.3) feladatok optimális megoldásai éles korlátokat szolgáltatnak a $P(X = z_r)$ valószínűségre.

(3) Egy adott $0 \le r \le n$ értékre $f_0 = \cdots = f_{r-1} = 0$, $f_r = \cdots = f_n = 1$. Ez esetben az (1.2) illetve (1.3) feladatok optimális megoldásai éles korlátokat szolgáltatnak a $P(X \ge z_r)$ valószínűségre.

Az $f(z)$, $z \in \{z_0, \ldots, z_n\}$ diszkrét függvény elsőrendű osztott differenciáit az alábbi módon jelöljük, illetve definiáljuk:

$$[z_{i_1}, z_{i_2}; f] = \frac{f(z_{i_1}) - f_(z_{i_2})}{z_{i_1} - z_{i_2}}. \tag{1.9}$$

A k rendű osztott differenciákat, a szokásos, induktív módon értelmezzük (lásd pl. Jordan [3], Popoviciu [10], Prékopa [15]), tehát

$$[z_i, \ldots, z_{i+k}; f] = \frac{[z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}; f] - [z_i, \ldots, z_{i+k-1}; f]}{z_{i+k} - z_i}, \ k \geq 2.$$

Az f diszkrét függvényt k rendben konvexnek nevezzük, ha valamennyi k rendű osztott differenciája nemnegatív. Ismert (lásd például [3]), hogy

$$[z_i, \ldots, z_{i+k}; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_i & z_{i+1} & \cdots & z_{i+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_i^{k-1} & z_{i+1}^{k-1} & \cdots & z_{i+k}^{k-1} \\ f(z_i) & f(z_{i+1}) & \cdots & f(z_{i+k}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_i & z_{i+1} & \cdots & z_{i+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_i^{k-1} & z_{i+1}^{k-1} & \cdots & z_{i+k}^{k-1} \\ z_i^k & z_{i+1}^k & \cdots & z_{i+k}^k \end{vmatrix}}, \ 0 \leq i \leq n-k. \tag{1.10}$$

A fenti (1.10) formula nevezője egy Vandermonde determináns, amely mindig pozitív, így $[z_i, \ldots, z_{i+k}; f]$ előjele mindig a számláló előjelével egyezik meg. Az elsőrendű konvexitás a függvény monoton növekvő voltát, a másodrendű konvexitás a függvény konvexitását jelenti, a hagyományos értelemben. A fenti definíció némileg eltér Popoviciu [10] definíciójától. ő ugyanis a k rendű konvexitást a $k+1$ rendű osztott differenciák nemnegatívitásával értelmezte.

A későbbiekben szükségünk lesz a (2) illetve a (3) esetekben felírt függvényosztályok osztott differenciái előjelének meghatározására. Könnyen látható, hogy a (2) esetre az (1.10) képlet segítségével választ kaphatunk. A (3) esetben az alábbi tétel lesz segítségünkre.

1.1. Tétel. *Legyen $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t < \cdots < i_{m+2} \leq n$. Ekkor*

$$(-1)^t \Delta_t = (-1)^t \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \boldsymbol{a}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_t} & \boldsymbol{a}_{i_{t+1}} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_{m+2}} \end{vmatrix} > 0, \tag{1.11}$$

ahol az $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_{m+2}}$ vektorok mindegyike vagy (1.4) vagy (1.5) típusú.

Bizonyítás. Tekintsük először azt a a speciális esetet, amikor $\boldsymbol{a}_{i_k}$ (1.5) típusú és z_{i_k} egész,

$k = 1, \ldots, m+2$. Vezessük be a következő jelölést:

$$\boldsymbol{v}_l := \begin{pmatrix} 1 \\ l \\ \binom{l}{2} \\ \vdots \\ \binom{l}{m} \end{pmatrix},$$

ahol l tetszőleges egész szám. Nyilvánvalóan

$$\boldsymbol{a}_{i_k} = \boldsymbol{v}_{z_{i_k}}, \ k = 1, \ldots, m+2.$$

Bizonyításunk kulcsa az alábbi kombinatorikus azonosság:

$$\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i} = \binom{k-1}{i-1}.$$

Ekképpen

$$\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ \binom{k}{2} \\ \vdots \\ \binom{k}{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ \binom{k-1}{2} \\ \vdots \\ \binom{k-1}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k-1 \\ \vdots \\ \binom{k-1}{m-1} \end{pmatrix}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Ha $1 \leq l < k \leq n$, akkor:

$$\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{k-1} + \cdots + \boldsymbol{v}_{l+1} - \boldsymbol{v}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k-1 \\ \vdots \\ \binom{k-1}{m-1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ l \\ \vdots \\ \binom{l}{m-1} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Kivonva az (1.11) első oszlopát a másodikból, ..., az $m+1$-ik oszlopát az $m+2$-ikből, majd kifejtve a determinánst az első sora szerint, a következőt kapjuk:

$$\Delta_t = (-1)^t |(\boldsymbol{v}_{z_{i_1}}, \boldsymbol{v}_{z_{i_2}} - \boldsymbol{v}_{z_{i_1}}, \ldots, \boldsymbol{v}_{z_{i_t}} - \boldsymbol{v}_{z_{i_{t-1}}}, \boldsymbol{v}_{z_{i_{t+2}}} - \boldsymbol{v}_{z_{i_{t+1}}}, \ldots, \boldsymbol{v}_{z_{i_{m+2}}} - \boldsymbol{v}_{z_{i_{m+1}}})|.$$

Behelyettesítve $\boldsymbol{v}_{z_{i_1}}$ helyére az alábbi összeget

$$\boldsymbol{v}_{z_{i_1}} = (\boldsymbol{v}_{z_{i_1}} - \boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{v}_0,$$

majd a többi oszlopban a különbségeket az (1.12) jobboldala szerinti alakba átírva, látható, hogy $(-1)^t\Delta_t$ szétesik $2(z_{i_2}-z_{i_1})\cdots(z_{i_t}-z_{i_{t-1}})(z_{i_{t+2}}-z_{i_{t+1}})\cdots(z_{i_{m+2}}-z_{i_{m+1}})$ darab determinánsra, melyek közül csak azok nem tűnnek el, melyek első oszlopa $\boldsymbol{v}_0$ (a többi determinánsban az első sor csupa 0 elemből áll). Ezen determinánsokat első oszlopuk ($\boldsymbol{v}_0$) szerint kifejtve viszont mindig egy (1.5) típusú oszlopokból álló ($m := m-1$) determinánshoz jutunk, melyről pedig tudjuk, hogy pozitív. Ezzel a fenti speciális esetet beláttuk.

Tekintve egyrészt, hogy ha $\boldsymbol{a}_{i_k}$ (1.5) típusú, akkor $T_2\boldsymbol{a}_{i_k}$ éppen (1.4) típusú és ugyanez igaz fordítva a $T_1 = T_2^{-1}$ mátrixszal való balról szorzás esetén, másrészt, hogy $|T_2| = 1/|T_1| > 0$, látható, hogy a tétel állítása pontosan akkor igaz (1.4) típusú oszlopvektorokra, ha igaz (1.5) típusúakra.

Továbbhaladva, feloldandó a z_{i_k} egészértékűségére tett feltételt, tekintsünk egy (1.4) típusú oszlopokból álló Δ_t determinánst, ahol z_{i_k} értékei racionálisak, $k = 1,\ldots,m+2$. Legyen a z_{i_k} értékek nevezőinek legkisebb közös többszöröse L. Megszorozva Δ_t i-edik sorát az $L^{(i-2)}$ értékkel, $i = 2,\ldots,m+2$, máris egy, a speciális esetnek megfelelő egészértékű mátrixszot kapunk, míg a determináns előjele nem változott. Ezzel beláttuk a racionális esetet.

Az általános, valós z_{i_k} értékekre vonatkozóan az állítás már adódik határátmenettel a racionális esetből. $\square$

Tételünk következménye, hogy $g(z_{i_1}) = \cdots = g(z_{i_t}) = 0$, $g(z_{i_{t+1}}) = \cdots = g(z_{i_{m+2}}) = 1$ esetén

$$(-1)^{t+m+1}[z_{i_1},\ldots,z_{i_{m+2}};g] > 0.$$

Tovább haladva az (1.2) illetve (1.3) feladatok vizsgálatában, látható, hogy az A mátrix teljes sorrangú. Legyen B az A mátrix egy $(m+1)\times(m+1)$ méretű minorja, és jelölje I a B oszlopaihoz tartozó változók indexeinek halmazát. A B mátrixot illetve a benne szereplő oszlopokat bázisnak fogjuk hívni. Ha szükséges, akkor B helyett a $B(I)$ jelölést fogjuk használni. Jelölje $\boldsymbol{f}_B$ az $\boldsymbol{f}$ bázisbeli komponenseit. Az $\boldsymbol{y}$ vektort, mely teljesíti az

$$\boldsymbol{y}^T B = \boldsymbol{f}_B^T \tag{1.13}$$

egyenlőséget, a B mátrixhoz tartozó duál vektornak nevezzük.

A B bázist duál megengedettnek nevezzük, ha minimum (maximum) feladatra

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a}_p & \leq & f_p & p\in\{0,\ldots,n\}-I \text{ esetén} \\ (\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a}_p & \geq & f_p & p\in\{0,\ldots,n\}-I \text{ esetén}). \end{array} \tag{1.14}$$

Legyenek $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_0,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ az (1.4) vektorai. Az (1.2) feladat korlátozó egyelőségeit az alábbi módon is felírhatjuk:

$$(T_1\boldsymbol{a}_0)\,p_0 + \cdots + (T_1\boldsymbol{a}_n)\,p_n = T_1\boldsymbol{b}$$

másrészt

$$\begin{array}{rcl} (T_1B)^{-1}\,T_1\boldsymbol{b} & = & B^{-1}\boldsymbol{b} \\ f_p - \boldsymbol{f}_B^T\,(T_1B)^{-1}\,(T_1\boldsymbol{a}_p) & = & f_p - f_B^T B^{-1}\boldsymbol{a}_p. \end{array} \tag{1.15}$$

Így T_1B pontosan akkor primál megengedett bázisa a (1.3) problémának, ha B primál megengedett az (1.2) problémában. Másrészt T_1B pontosan akkor duál megengedett az (1.3) minimum (maximum) problémában, ha B duál megengedett bázisa az (1.2) minimum (maximum) problémának.

Legyen $L_I(z)$ a $z_i,\ i \in I = \{i_0, \ldots, i_m\}$ alappontokhoz tartozó, m fokú Lagrange polinom. Newton féle alakban felírva

$$L_I(z) = \sum_{k=0}^{m} [z_{i_0}, \ldots, z_{i_k}; f] \prod_{l=0}^{k-1} (z - z_{i_l}). \tag{1.16}$$

Definiáljuk a valós z értékeken értelmezett

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^m \end{pmatrix}$$

vektort. Ekkor igaz az alábbi egyelőség:

$$\boldsymbol{f}_B^T B^{-1}(I)\boldsymbol{b}(z) = L_I(z). \tag{1.17}$$

Valóban, $\boldsymbol{b}(z_i) = \boldsymbol{a}_i,\ i \in I$ esetén, így

$$\boldsymbol{f}_B^T B^{-1}(I)\boldsymbol{b}(z_i) = f(z_i),\ i \in I, \tag{1.18}$$

tehát (1.17) áll minden valós z értékre. Tekintsük még a Lagrange polinom maradéktagját, ugyancsak Newton féle alakban:

$$f(z) - L_I(z) = [z_{i_0}, \ldots, z_{i_m}, z; f] \prod_{l=0}^{m} (z - z_{i_l}),\ z \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

A fentiekből következik, a duál megengedettség Lagrange approximációval való megfogalmazása, miszerint $B(I)$ duál megengedett bázisa az (1.2) minimum (maximum) feladatnak pontosan akkor, ha az $f(z)$ függvény az $L_I(z)$ polinom fölött (alatt) halad minden $z_i,\ i \notin I$ esetén.

Ha az $[z_i, i \in I, z; f]$ osztott differenciák előjeléről megfelelő információink vannak, akkor az (1.19) egyenlőség segítségével megtalálhatók azok az I indexhalmazok, melyek duál megengedett bázisokat határoznak meg. Erre mutatnak példákat a fejezet hátralevő részében szereplő állítások.

1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f(z)$, $z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ függvény összes $m+1$ rendű osztott differenciája pozitív. Ekkor mind az (1.2) mind az (1.3) probléma összes duál megengedett bázisának index strukturája az alábbiak valamelyikét követi:*

	$m+1$ páros	*$m+1$ páratlan*
min feladat	$\{j, j+1, \ldots, k, k+1\}$	$\{0, j, j+1, \ldots, k, k+1\}$
max feladat	$\{0, j, j+1, \ldots, k, k+1, n\}$	$\{j, j+1, \ldots, k, k+1, n\}$

Bizonyítás. Tekintsük a minimum problémát, ahol a duál megengedettség a következőt jelenti: $f(z) - L_I(z) \geq 0$, $z \notin \{z_i, i \in I\}$ esetén. Mivel $[z_i, i \in I, z; f] > 0$ $z \notin \{z_i, i \in I\}$ esetén, így pontosan az alábbinak kell teljesülnie:

$$\prod_{i \in I}(z - z_i) \geq 0.$$

Ez pedig akkor és csak akkor igaz, ha I konzekutív párokból áll páros $m+1$ esetén, illetve ha a 0 és konzekutív párok alkotják páratlan $m+1$ esetén.

Maximum probléma esetén a duál megengedettség azt jelenti, hogy $f(z) - L_I(z) \leq 0$, $z \notin \{z_i, i \in I\}$ esetén, ekképpen a

$$\prod_{i \in I}(z - z_i) \leq 0$$

egyenlőtlenséget követeljük meg. Ez pedig pont a tételben szereplő index halmazok esetén teljesül. $\square$

1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f_r = 1$ és $f_i = 0$ $i \neq r$ esetén, ahol $0 \leq r \leq n$. Ekkor mind az (1.2) mind az (1.3) probléma összes duál megengedett bázisának index strukturája az alábbiak valamelyikét követi.*

Minimum probléma, $m+1$ páros:
$r \notin I$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, r, r+1, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $2 \leq r \leq n-1$,
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, r, r+1, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $1 \leq r \leq n-2$,
$\{0, 1, i, i+1, \ldots, j, j+1\}$, *ha* $r = 0$, *és*
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, n-1, n\}$, *ha* $r = n$;

Minimum probléma, $m+1$ páratlan:
$r \notin I$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, r, r+1, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $2 \leq r \leq n-2$,
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, r, r+1, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $1 \leq r \leq n-1$,
$\{0, 1, i, i+1, \ldots, j, j+1, n\}$, *ha* $r = 0$, *és*

$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, n-1, n\}$, *ha* $r = n$;

Maximum probléma, $m+1$ *páros:*
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $0 \leq r \leq n-1$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $1 \leq r \leq n$;

Maximum probléma, $m+1$ *páratlan:*
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $0 \leq r \leq n$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $1 \leq r \leq n-1$;

ahol a kapcsos zárójelben álló számok növekvő sorrendben rendezettek.

Bizonyítás. A bizonyítás az (1.10), (1.17) és (1.19) relációk felhasználásával az előző tételhez hasonló módon kivitelezhető, ezért a módszert csak egy példán illusztráljuk.

Tekintsük a minimum feladatot, $m+1$ legyen páros, $2 \leq r \leq n-1$, $r \in I$ és I elemei közül páros számú kisebb, mint r. Ekkor (1.10) szerint

$$\begin{aligned} [z, z_i, i \in I; f] &< 0, \text{ ha } z < z_r \\ [z, z_i, i \in I; f] &> 0, \text{ ha } z > z_r. \end{aligned}$$

Így a

$$\prod_{j \in I} (z - z_j)$$

szorzatnak $z < z_r$ esetén negatívnak, míg $z > z_r$ esetén pozitívnak kell lennie. Ennek pedig a tételben felsoroltak közül a második struktúra felel meg. □

1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f_0 = \cdots = f_{r-1} = 0$, $f_r = \cdots = f_n = 1$, *ahol* $1 \leq r \leq n$. *Ekkor mind az (1.2) mind az (1.3) probléma összes duál megengedett bázisának index struktúrája az alábbiak valamelyikét követi.*

Minimum probléma, $m+1$ *páros:*
$I \subset \{0, \ldots, r-1\}$, *ha* $r \geq m+1$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $2 \leq r \leq n-1$,
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $1 \leq r \leq n$;

Minimum probléma, $m+1$ *páratlan:*
$I \subset \{0, \ldots, r-1\}$, *ha* $r \geq m+1$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $2 \leq r \leq n$,

$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r-1, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $1 \le r \le n-1$;

Maximum probléma, $m+1$ *páros:*
$I \subset \{r, \ldots, n\}$, *ha* $n - r \ge m$,
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $1 \le r \le n-1$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $1 \le r \le n$;

Maximum probléma, $m+1$ *páratlan:*
$I \subset \{r, \ldots, n\}$, *ha* $n - r \ge m$,
$\{i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1\}$, *ha* $1 \le r \le n$,
$\{0, i, i+1, \ldots, j, j+1, r, k, k+1, \ldots, t, t+1, n\}$, *ha* $1 \le r \le n-1$;

ahol a kapcsos zárójelben álló számok növekvő sorrendben rendezettek.

Bizonyítás. A bizonyítás az (1.10), (1.17) és (1.19) relációk illetve a 1.1. Tétel felhasználásával az előző tételekhez hasonló módon kivitelezhető. □

1.2. A többváltozós diszkrét momentum probléma

A TDMP felvetése és tárgyalása Prékopa [13, 15, 16] cikkeihez fűződik. A problémát, az $(X_1, \ldots, X_s)$ valószínűségi vektorváltozóra fogalmazzuk meg. Feltesszük, hogy X_j értelmezési tartománya egy ismert véges halmaz: $Z_j = \{z_{j0}, \ldots, z_{jn_j}\}$, $j = 1, \ldots, s$. Vezessük be a következő jelölést:

$$p_{i_1 \ldots i_s} = P(X_1 = z_{1i_1}, \ldots, X_s = z_{si_s}),\ 0 \le i_j \le n_j,\ j = 1, \ldots, s,$$

$$\mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1} \cdots z_{si_s}^{\alpha_s} p_{i_1 \ldots i_s},$$

ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ nemnegatív egész számok. A $\mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ számot az $(X_1, \ldots, X_s)$ valószínűségi vektorváltozó $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ rendű (hatvány)momentumának nevezzük. Az $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ összeg a momentum teljes rendje.

Tekintsük az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$, $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_s$ függvényt és vezessük be a következő jelölést: $f_{i_1 \ldots i_s} = f(z_{1i_1}, \ldots, z_{si_s})$. A többváltozós diszkrét momentum probléma egyik megfogalmazása a következő lineáris programozási feladat:

$$\begin{aligned}
&\min(\max)\ \sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1\ldots i_s}p_{i_1\ldots i_s}\\
\text{feltéve, hogy}\quad &\\
&\sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1}\cdots z_{si_s}^{\alpha_s}p_{i_1\ldots i_s}=\mu_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\\
&\alpha_j\ge 0,\ j=1,\ldots,s;\ \alpha_1+\cdots\alpha_s\le m\\
&p_{i_1\ldots i_s}\ge 0,\ \text{minden } i_1,\ldots,i_s \text{ esetén.}
\end{aligned}\tag{1.20}$$

A fenti problémát általánosíthatjuk, ha bevezetünk néhány, az m számnál magasabb rendű egyváltozós momentumra vonatkozó korlátozó feltételt is. Ennek egyik lehetséges módját fejezi ki a következő modell:

$$\begin{aligned}
&\min(\max)\ \sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1\ldots i_s}p_{i_1\ldots i_s}\\
\text{feltéve, hogy}\quad &\\
&\sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1}\cdots z_{si_s}^{\alpha_s}p_{i_1\ldots i_s}=\mu_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\\
&\alpha_j\ge 0,\ j=1,\ldots,s;\ \alpha_1+\cdots\alpha_s\le m \text{ és}\\
&\alpha_j=0,\ j=1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,s,\ m\le\alpha_k\le m_k,\ k=1,\ldots,s;\\
&p_{i_1\ldots i_s}\ge 0,\ \text{minden } i_1,\ldots,i_s \text{ esetén.}
\end{aligned}\tag{1.21}$$

Az (1.20) és a (1.21) problémákban a $p_{i_1\ldots i_s}$ szimbólumok a változók, míg a többi érték adott.

A fenti problémák korlátokat szolgáltatnak az

$$E[f(X_1,\ldots,X_s)]\tag{1.22}$$

értékre, a megfelelő momentumok ismeretében. A (1.22) várható érték speciális esetei, alkalmas f függvények esetén, a

$$P(X_1\ge r_1,\ldots,X_s\ge r_s)\tag{1.23}$$

és a

$$P(X_1=r_1,\ldots,X_s=r_s),\tag{1.24}$$

valószínűségek, ahol $(r_1,\ldots,r_s)\in Z$.

A (1.20) és a (1.21) feladatok egyszerűbb alakban is felírhatók, mátrixok tenzorszorzatának segítségével. Az $m_1\times n_1$ méretű $B=(b_{ij})$ mátrix és az $m_2\times n_2$ méretű $C=(c_{ij})$ mátrix tenzorszorzata a $B\otimes C$, $m_1m_2\times n_1n_2$ méretű mátrix, ahol $B\otimes C=(c_{ij}B)$. Ismert (lásd pl.

Horn és Johnson [2]), hogy a tenzorszorzat asszociatív, de nem kommutatív. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_{j0} & z_{j1} & \cdots & z_{jn_j} \\ \vdots & & \ddots & \\ z_{j0}^{m_j} & z_{j1}^{m_j} & \cdots & z_{jn_j}^{m_j} \end{pmatrix}$$

$$A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_s$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= E\left[(1, X_1, \ldots, X_1^{m_1}) \otimes \cdots \otimes (1, X_s, \ldots, X_s^{m_s})\right]^T \\ &= (\mu_{00\ldots0}, \mu_{10\ldots0}, \ldots, \mu_{m_10\ldots0}, \mu_{010\ldots0}, \mu_{11\ldots0}, \ldots)^T \\ \boldsymbol{p} &= (p_{i_1\ldots i_s},\ 0 \le i_1 \le n_1, \ldots, 0 \le i_s \le n_s)^T \\ \boldsymbol{f} &= (f_{i_1\ldots i_s},\ 0 \le i_1 \le n_1, \ldots, 0 \le i_s \le n_s)^T, \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{f}$ komponenseinek a sorrendje megegyezik az A mátrix megfelelő oszlopainak sorrendjével. Az A megfelelő sorainak, illetve a $\boldsymbol{b}$ megfelelő komponenseinek a kiválasztásával, a fenti problémák tömör alakban is felírhatók. Az (1.20) feladat tömör formája:

$$\begin{array}{ll} & \min(\max) \quad \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{p} \\ \text{feltéve, hogy} & \\ & \begin{aligned} \widetilde{A}\boldsymbol{p} &= \widetilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{p} &\ge \boldsymbol{0}, \end{aligned} \end{array} \tag{1.25}$$

a (1.21) feladaté pedig:

$$\begin{array}{ll} & \min(\max) \quad \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{p} \\ \text{feltéve, hogy} & \\ & \begin{aligned} \widehat{A}\boldsymbol{p} &= \widehat{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{p} &\ge \boldsymbol{0}. \end{aligned} \end{array} \tag{1.26}$$

Az A mátrix mérete $[(m_1+1)\cdots(m_s+1)] \times [(n_1+1)\cdots(n_s+1)]$, míg az $\widetilde{A}$ mátrixé $N \times [(n_1 + 1)\cdots(n_s+1)]$, ahol $N = \binom{s+m}{m}$. Az $\widehat{A}$ mátrix mérete $N' \times [(n_1+1)\cdots(n_s+1)]$, ahol $N' = N + \sum_{j=1}^{s}(m_j - m)$. Az $\widetilde{A}$ mátrix teljes rangú, ha $m \le n_j,\ j = 1, \ldots, s$; az $\widehat{A}$ mátrix teljes rangú, ha $m_j \le n_j,\ j = 1, \ldots, s$.

Jelölje V_{min} (V_{max}) az (1.20) vagy (1.21) probléma minimumát (maximumát). Jelölje továbbá B_1 (B_2) a minimum (maximum) probléma egy duál megengedett bázisát (olyan bázist, melyre az optimalitási feltételek teljesülnek). Ezek után, a lineáris programozás elméletét felhasználva, felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\boldsymbol{f}_{B_1}^T\boldsymbol{p}_{B_1} \le V_{min} \le E\left[f(X_1, \ldots, X_s)\right] \le V_{max} \le \boldsymbol{f}_{B_2}^T\boldsymbol{p}_{B_2}. \tag{1.27}$$

Ha B_1 (B_2) primál megengedett is, tehát optimális bázis a minimum (maximum) problémában, akkor az első (utolsó) egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy V_{min} és V_{max} éles alsó és felső korlátok az $f(X_1, \ldots, X_s)$ függvény várható értékére.

A többváltozós diszkrét hatvány momentum problémákhoz hasonlóan felírhatók a többváltozós diszkrét binomiális momentum problémák is. Mivel ezen problémáknak különösen esemény sorozatok vizsgálatánál van nagy jelentősége, ahol X_j a j-edik sorozatban az esemény előfordulásának számosságát jelenti, ezért a feladatokat a $Z_j = \{0, \ldots, n_j\}$, $j = 1, \ldots, s$ esetre írjuk fel.

Az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ rendű ($\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ nemnegatív egészek) binomiális momentumot az alábbi módon definiáljuk:

$$S_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = E\left[\binom{X_1}{\alpha_1} \cdots \binom{X_s}{\alpha_s}\right]. \tag{1.28}$$

Az előzőekhez hasonlóan két fajta feladatot írunk fel. Egyrészt

$$\begin{aligned} & \min(\max) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1 \ldots i_s} p_{i_1 \ldots i_s} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} \binom{i_1}{\alpha_i} \cdots \binom{i_s}{\alpha_s} p_{i_1 \ldots i_s} = S_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \\ & \alpha_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, s;\ \alpha_1 + \cdots \alpha_s \leq m \\ & p_{i_1 \ldots i_s} \geq 0, \text{ minden } i_1, \ldots, i_s \text{ esetén,} \end{aligned} \tag{1.29}$$

másrészt

$$\begin{aligned} & \min(\max) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1 \ldots i_s} p_{i_1 \ldots i_s} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} \binom{i_1}{\alpha_i} \cdots \binom{i_s}{\alpha_s} p_{i_1 \ldots i_s} = S_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \\ & \alpha_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, s;\ \alpha_1 + \cdots \alpha_s \leq m \text{ és} \\ & \alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, s,\ m \leq \alpha_k \leq m_k,\ k = 1, \ldots, s; \\ & p_{i_1 \ldots i_s} \geq 0, \text{ minden } i_1, \ldots, i_s \text{ esetén.} \end{aligned} \tag{1.30}$$

A fenti problémák rendre (1.20) illetve (1.21) megfelelői. Ha az (1.20) illetve (1.21) feladatban feltesszük, hogy $Z_j = \{0, \ldots, n_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, akkor léteznek nemszinguláris lineáris transzformációk, melyekkel mind az (1.20), (1.29) probléma pár, mind az (1.21), (1.30) probléma pár tagjai egymásba átkonvertálhatók. Pontosabban, ha az (1.29) ((1.30)) feladatot, az (1.25) ((1.26)) feladathoz hasonlóan, mátrix alakban írjuk fel, akkor a korlátozó egyenletrendszerek mátrixai egy nemszinguláris mátrix illetve inverze segítségével egymásba áttranszformálhatók. Ebből, az előző szakaszhoz hasonlóan, következik, hogy az (1.25) probléma ((1.26) probléma) egy bázisa pontosan akkor duál megengedett, ha duál megengedett az (1.29) ((1.30)) feladatban is. Valóban, legyen D az a nemszinguláris mátrix, melyre DA az (1.29) feladat korlátozó egyenleteinek mátrixát adja. Ekkor az (1.25) feladatban a B bázisra vonatkozó optimalitási feltétel:

$$\boldsymbol{f}_B^T B^{-1}\boldsymbol{a}_k \leq (\geq) f_k \text{ minden } k \text{ index esetén,} \tag{1.31}$$

míg (1.30) transzformált bázisára a következőnek kell teljesülnie:

$$\boldsymbol{f}_B^T (DB)^{-1} D\boldsymbol{a}_k \leq (\geq) f_k \text{ minden } k \text{ index esetén.} \tag{1.32}$$

Nyilvánvaló, hogy (1.31) és (1.32) egy és ugyanaz. A fenti gondolatmenet ugyanígy alkalmazható az (1.26) és (1.30) feladatok esetében is.

Végül, hogy kapcsolatot teremthessünk a többváltozós Lagrange interpoláció és a (1.25), (1.26) problémák között, bevezetjük a következő terminológiát.

Legyen az $U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M\}$ az $\mathbb{R}^s$ tér egy halmaza, és $H = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\}$ az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ nemnegatív egész komponensekből alkotott s dimenziós vektorok egy véges halmaza.

Azt mondjuk, hogy U megenged egy H-típusú Lagrange interpolációt, ha bármilyen valós $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in U$ függvény esetén létezik olyan $p(\boldsymbol{z})$ polinom, mely a következő alakban írható,

$$p(\boldsymbol{z}) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\in H} c(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) z_1^{\alpha_1} \cdots z_s^{\alpha_s}, \tag{1.33}$$

ahol $c(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ valós számok, és

$$p(\boldsymbol{u}_i) = f(\boldsymbol{u}_i),\ i = 1, \ldots, M. \tag{1.34}$$

Definiáljuk a $\widetilde{\boldsymbol{b}}(z_1, \ldots, z_s)$ ($\widehat{\boldsymbol{b}}(z_1, \ldots, z_s)$) vektort a $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ ($\widehat{\boldsymbol{b}}$) vektorhoz hasonlóan, azzal a különbséggel, hogy elhagyjuk a várható értéket és az X_j valószínűségi változó helyére a z_j determinisztikus változót írjuk, $j = 1, \ldots, s$.

A (1.25) ((1.26)) probléma esetén definiáljuk a H, I és U halmazokat a következő módon:

$$\begin{array}{rcl} H &=& \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)|\ 0 \leq \alpha_j,\ \alpha_j \text{ egész},\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_s \leq m,\ j = 1, \ldots, s\} \\ (H &=& \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)|\ 0 \leq \alpha_j,\ \alpha_j \text{ egész},\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_s \leq m,\ j = 1, \ldots, s; \\ && \text{vagy } \alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, s,\ m \leq \alpha_k \leq m_k,\ k = 1, \ldots, s\}), \end{array} \tag{1.35}$$

$$\begin{array}{rcl} I &=& \{(i_1, \ldots, i_s)|\ \widetilde{a}_{i_1\cdots i_s} \in \widetilde{B}\} \\ (I &=& \{(i_1, \ldots, i_s)|\ \widehat{a}_{i_1\cdots i_s} \in \widehat{B}\}), \end{array}$$

$$U = \{(z_{1i_1}, \ldots, z_{si_s})|\ (i_1, \ldots, i_s) \in I\}.$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} L_I(z_1,\dots,z_s) &= \boldsymbol{f}^T_{\widetilde{B}} \widetilde{B}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{b}}(z_1,\dots,z_s) \\ (L_I(z_1,\dots,z_s) &= \boldsymbol{f}^T_{\widehat{B}} \widehat{B}^{-1} \widehat{\boldsymbol{b}}(z_1,\dots,z_s)) \end{aligned} \tag{1.36}$$

polinom megegyezik az U halmazhoz tartozó H-típusú, egyértelműen adott Lagrange polinommal.

A $\widetilde{B}$ illetve $\widehat{B}$ bázis duál megengedettsége a minimum (maximum) problémára a következőket jelenti:

$$\begin{aligned} &f(z_1,\dots,z_s) \geq L_I(z_1,\dots,z_s), \text{ minden } (z_1,\dots,z_s) \in Z \text{ esetén} \\ &(f(z_1,\dots,z_s) \leq L_I(z_1,\dots,z_s), \text{ minden } (z_1,\dots,z_s) \in Z \text{ esetén}), \end{aligned} \tag{1.37}$$

ahol $(z_1,\dots,z_s) \in U$ esetén egyenlőség áll.

A (1.37) relációt a minimum (maximum) probléma optimalitási feltételének nevezzük. Ha a (1.37) relációkban $(z_1,\dots,z_s)$ helyére az $(X_1,\dots,X_s)$ valószínűségi vektorváltozót helyettesítjük és vesszük a kifejezés várható értékét, akkor korlátot kapunk az $E[f(X_1,\dots,X_s)]$ várható értékre. Ha a bázis egyben primál megengedett is, akkor a kapott korlát éles.

2. Többváltozós diszkrét függvények magasabb rendű konvexitása

Az előző fejezetben, már vizsgáltuk a konvexitás fogalmát egyváltozós diszkrét függvények esetére. Az $f(z)$, $z \in \{z_0, \dots, z_n\}$ diszkrét függvény elsőrendű osztott differenciáit (1.9) szerint definiáltuk, míg a magasabb rendű osztott differenciákat a szokásos induktív módon vezettük be. Megjegyeztük azt is, hogy a k rendű konvexitást a k rendű osztott differenciák nemnegatívitásával jellemezzük.

Dolgozatunkban a többváltozós diszkrét függvényeket a számegyenes véges részhalmazainak Descartes szorzatain értelmezzük. Az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_s) \in Z = Z_1 \times \cdots \times Z_s$, $Z_j = \{z_{j0}, \dots, z_{jn_j}\}$, $j = 1, \dots, s$ függvény $(k_1, \dots, k_s)$ rendű osztott differenciáját a Z halmaz valamely

$$\begin{aligned} Z_{I_1 \dots I_s} &= \{z_{1i},\ i \in I_1\} \times \cdots \times \{z_{si},\ i \in I_s\} = \\ &= Z_{1I_1} \times \cdots \times Z_{sI_s}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

részhalmazához rendeljük, ahol $|I_j| = k_j + 1,\ j = 1, \dots, s$, és az alábbi módon értelmezzük. Vesszük a z_1 változó szerinti k_1 rendű osztott differenciát, majd a z_2 szerinti k_2 rendű osztott differenciát, és így tovább, végül a z_s szerinti k_s rendű osztott differenciát. E műveleteket tetszőleges sorrendben végrehajthatjuk, az eredmény mindig ugyanaz.

Az f függvény $(k_1, \dots, k_s)$ rendű osztott differenciájának a jelölésére a

$$[z_{1i},\ i \in I_1; \cdots ; z_{si},\ i \in I_s; f] \tag{2.2}$$

szimbólumot használjuk. A $k_1 + \cdots + k_s$ összeget az osztott differencia teljes rendjének nevezzük.

Az osztott differenciákra érvényesek az alábbi állítások.

Ha $f(z)$, $z \in Z$ egyváltozós diszkrét függvény és $V_1, V_2 \in Z$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, akkor

$$[V_1; [V_2; f]] = [V_2; [V_1; f]] = [V_1 \cup V_2; f].$$

Ha $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z = Z_1 \times Z_2$ diszkrét függvény és $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, $V_1 \subset Z_1$, $V_2 \subset Z_2$, akkor

$$[V_1; [z_1; V_2; f]] = [V_2; [V_1; z_2; f]] = [V_1; V_2; f].$$

2.1. Definíció. *Az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ (többváltozós) függvényt $(m_1, \dots, m_s)$ rendben konvex diszkrét függvénynek hívjuk, ha bármely $\{z_{ji}, i \in I_j\}$, $|I_j| = m_j + 1,\ j = 1, \dots, s$ esetén fennáll az alábbi reláció:*

$$[z_{1i}, i \in I_1; \cdots ; z_{si}, i \in I_s; f] \geq 0. \tag{2.3}$$

2.2. Definíció. *Egy $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ (többváltozós) függvényt m rendű konvex függvénynek nevezünk, ha valamennyi m teljes rendű osztott differenciája nemnegatív.*

Ha $f(\boldsymbol{z})$, $g(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ ugyanolyan rendben konvex, akkor ez a tulajdonság igaz az $f(\boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ összegre is. A szorzat esetét tekintve, a következő állítást kapjuk.

2.1. Tétel. *Ha $f(\boldsymbol{z}) \geq 0$, $g(\boldsymbol{z}) \geq 0$, $\boldsymbol{z} \in Z$ bármilyen i rendben konvex, $1 \leq i \leq m$, akkor ugyanez igaz az $f(\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvényre is.*

Bizonyítás. A szorzat osztott differenciája hasonló szabállyal kapható meg, mint a szorzat deriváltja. Ebből a tényből az állítás már könnyen levezethető. □

A magasabb rendű konvexitásra adott definíciónkban csak a koordináta tengelyek irányában vett osztott differenciákat használtuk.

Előfordulhat, hogy egy függvénynek az összes második teljes rendű osztott differenciája nemnegatív, viszont valamely (a tengelyektől különböző) egyenes mentén nem konvex a függvény. Erre példa a következő.

Legyen $Z_1 = Z_2 = \{0, 1, 2\}$, és definiáljuk az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z_1 \times Z_2$ függvényt az alábbi módon:

$$\begin{array}{lll} f(0,0) = 0, & f(1,0) = 1.2, & f(2,0) = 2.6, \\ f(0,1) = 0.4, & f(1,1) = 2, & f(2,1) = 3.6, \\ f(0,2) = 1, & f(1,2) = 2.8, & f(2,2) = 4.6. \end{array} \tag{2.4}$$

A függvény nem konvex a $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$ egyenes mentén, mivel

$$f(1,1) = 2 > \frac{1 + 2.6}{2} = \frac{f(0,2) + f(2,0)}{2}.$$

Ha az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvényt az $\overline{f}(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in \overline{Z}$, $\overline{Z} = [z_{10}, z_{1n_1}] \times \cdots \times [z_{s0}, z_{sn_s}]$ folytonos függvényből származtatjuk oly módon, hogy $f(\boldsymbol{z}) = \overline{f}(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$, és $\overline{f}(\boldsymbol{z})$ $(k_1, \ldots, k_s)$ rendű deriváltjai $\overline{Z}$ belsejében folytonosak és nemnegatívak, akkor $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ összes $(k_1, \ldots, k_s)$ rendű osztott differenciája nemnegatív.

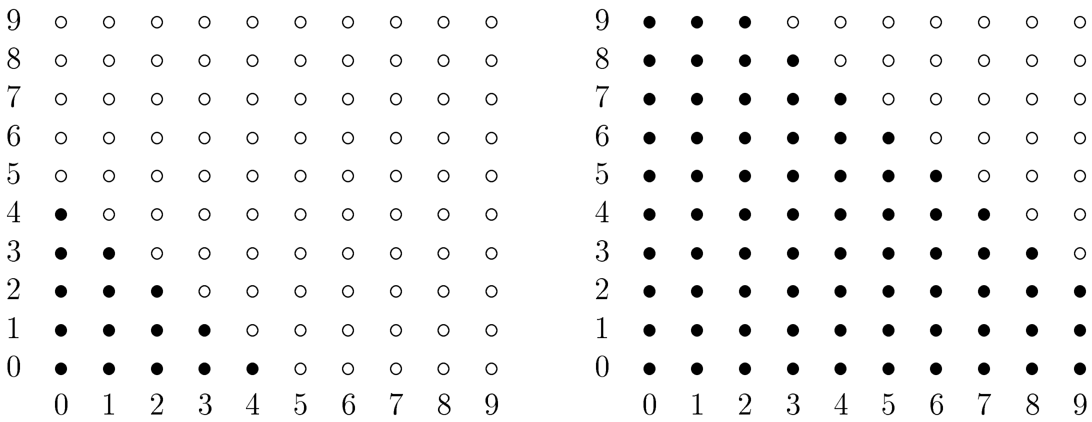
Egy $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$, diszkrét, m rendben konvex függvény esetén általában nem könnyű konstruálni egy olyan $\overline{f}(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in \overline{Z}$ folytonos, nemnegatív m rendű deriváltakkal rendelkező függvényt, mely a Z diszkrét halmazon megegyezik $f(\boldsymbol{z})$ értékeivel. Ha azonban az f függvény értelmezési tartományát megszorítjuk, akkor bizonyos esetekben mégis tudunk adni ilyen konstrukciót. Ezt fejezi ki az alábbi

2.2. Tétel. *Definiáljuk a Z_I diszkrét halmazt a következő módon:*

$$Z_I = \{(z_{i_1}, \ldots, z_{i_s}) |\ (i_1, \ldots, i_s) \in I\}, \tag{2.5}$$

ahol

$$I = \{(i_1, \ldots, i_s) |\ i_1 + \cdots + i_s \leq m,\ 0 \leq i_j \leq n_j,\ j = 1, \ldots, s\}, \tag{2.6}$$



(a) (b)

1. ábra: $s = 2$, $n_1 = n_2 = 9$, I elemeit $\bullet$ jelöli. Az (a) ábra az $m = 4$, míg a (b) ábra az $m = 11$ esetet szemlélteti.

$$m \leq n_1 + \cdots + n_s.$$

I lehetséges struktúráit a 1. ábra szemlélteti.

Ekkor létezik pontosan egy olyan $L_I(\boldsymbol{z})$ polinom, melyre

$$L_I(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{z} \in Z_I,$$

és $k_j \leq n_j$, $j = 1, \ldots, s$, $k_1 + \cdots + k_s = m$ esetén $L_I(\boldsymbol{z})$ $(k_1, \ldots, k_s)$ rendű deriváltjai megegyeznek az f függvény $(k_1, \ldots, k_s)$ rendű osztott differenciáival az alábbi halmazon:

$$\{(z_{1i_1}, \ldots, z_{si_s}) |\ 0 \leq i_j \leq k_j,\ j = 1, \ldots, s\}.$$

Az $L_I(\boldsymbol{z})$ polinom a következő:

$$L_I(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_s \leq m \\ 0 \leq i_j \leq n_j,\ j=1,\ldots,s}} [z_{10}, \ldots, z_{1i_1}; \cdots; z_{s0}, \ldots, z_{si_s}; f] \prod_{j=1}^{s} \prod_{h=0}^{i_j - 1} (z_j - z_{jh}), \tag{2.7}$$

ahol, definíció szerint, $i_j = 0$ esetén $\prod_{h=1}^{i_j - 1} (z_j - z_{jh}) = 1$.

A polinom maradéktagját az alábbi képlettel adhatjuk meg:

$$R_I(z_1, \cdots, z_s) =$$

$$\sum_{h=1}^{s} \sum_{\substack{0 \le i_j \le n_j,\ j=h,\ldots,s \\ i_h+\cdots+i_s=m, \text{ vagy} \\ i_h+\cdots+i_s<m \text{ és } i_h=n_h.}} \Big[z_1; \cdots; z_{h-1}; z_{h0}, \ldots, z_{hi_h}, z_h; z_{(h+1)0}, \ldots, z_{(h+1)i_{h+1}}; \tag{2.8}$$
$$\cdots; z_{s0}, \ldots, z_{si_s}; f\Big] \prod_{l=0}^{i_h} (z_h - z_{hl}) \prod_{h+1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) \,.$$

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $L_I(\boldsymbol{z})$ megfelelő deriváltjai eleget tesznek a kívánalmaknak. A polinom egyértelműségének illetve a maradéktag képlete speciális esetének ($m \leq \leq n_j$, $j = 1, \ldots, s$) bizonyítása megtalálható Prékopa [15] cikkében (362. old., Theorem 4.1). A maradéktag általános esete a hivatkozott bizonyítás triviális módosításával látható be. □

2.1. Megjegyzés. *Az $L_I(\boldsymbol{z})$ polinomot a Z_I ponthalmazhoz tartozó Lagrange polinom Newton féle alakjának nevezzük.*

A továbbiakban, különösen a fenti tétel általánosításának bizonyításakor, gyakran felhasználjuk az egyváltozós Lagrange interpoláció elméletéből jól ismert alábbi formulát:

$$f(z) - L(z) = [z_0, \ldots, z_k, z; f] \prod_{j=0}^{k} (z - z_j), \tag{2.9}$$

ahol $L(z)$ a $z_0, \ldots, z_k$ alappontokhoz tartozó Lagrange polinom,

$$L(z) = \sum_{i=0}^{k} f(z_i) \frac{(z - z_0) \cdots (z - z_{i-1})(z - z_{i+1}) \cdots (z - z_k)}{(z_i - z_0) \cdots (z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1}) \cdots (z_i - z_k)}. \tag{2.10}$$

Az (2.9) formulát általában intervallumon értelmezett függvények esetében használják. A mi esetünkben azonban nem csak az alappontok halmaza, hanem az f függvény értelmezési tartománya is véges.

3. Egy tétel többváltozós Lagrange interpolációra

Szakaszunkban nem tesszük fel, hogy a $Z_1, \ldots, Z_s$ halmazok rendezett lennének. Az alábbi tétel bármilyen az $\mathbb{R}^s$ halmazon értelmezett Lagrange interpoláció esetére érvényes. Tekintsük a következő indexhalmazt:

$$I = I_0 \cup \left(\cup_{j=1}^{s} I_j \right), \tag{3.1}$$

ahol

$$I_0 = \{(i_1, \ldots, i_s) |\ 0 \leq i_j \leq m-1, \text{ egészek}, \ j = 1, \ldots, s, \ i_1 + \ldots + i_s \leq m\} \tag{3.2}$$

és

$$\begin{array}{l} I_j = \{(i_1, \ldots, i_s) |\ i_j \in K_j, \ i_l = 0 \ l \neq j\} \\ K_j = \{k_j^{(1)}, \ldots, k_j^{(|K_j|)}\} \subset \{m, m+1, \ldots, n_j\}, \ j = 1, \ldots, s. \end{array} \tag{3.3}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
9 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
8 & \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
7 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
6 & \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
5 & \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
4 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
3 & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
2 & * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
1 & * & * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
0 & * & * & * & * & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9
\end{array}$$

2. ábra: A fenti ábra a fejezetben definiált I index halmazt mutatja, ahol az I_0 index halmazhoz tartozó pontokat $*$ jelöli, feltéve, hogy m=4, míg az I_1 és I_2 index halmazokhoz tartozókat $\bullet$, feltéve, hogy $K_1 = \{4, 5, 7, 9\} \subset \{4, 5, \ldots, 9\}$, $K_2 = \{5, 6, 8\} \subset \{4, 5, \ldots, 9\}$.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{array}{rcl}
Z_{ji} & = & \{z_{j0}, \ldots, z_{ji}\} \\
Z'_{ji} & = & \{z_{j0}, \ldots, z_{ji}, z_j\}, \\
 & & i = 0, \ldots, n_j, \ j = 1, \ldots, s; \\
K_{ji} & = & \{k_j^{(1)}, \ldots, k_j^{(i)}\} \\
Z_{jK_{ji}} & = & \{z_{jk_j^{(1)}}, \ldots, z_{jk_j^{(i)}}\}, \\
 & & i = 1, \ldots, |K_j|, \ j = 1, \ldots, s, \\
Z_{jK_j} & = & Z_{jK_{j|K_j|}}, \ j = 1, \ldots, s.
\end{array}$$

A $Z_I = \{(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s}) | \ (i_1, \dots, i_s) \in I\}$ pontokhoz tartozó Lagrange polinomot az alábbi Newton-féle alakkal adjuk meg:

$$L_I(z_1, \dots, z_s) =$$
$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_s \leq m \\ 0 \leq i_j \leq m-1, \ j=1,\ldots,s}} [Z_{1i_1}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{|K_j|} \left[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z_{j(m-1)} \cup Z_{jK_{ji}}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\right] \prod_{k \in \{0,\ldots,m-1\} \cup K_{j(i-1)}} (z_j - z_{jk}),$$
$$\text{ahol, definíció szerint } \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) = 1, \text{ ha } i_j = 0. \ K_{j0} := \emptyset. \tag{3.4}$$

A (3.4) kifejezésben az f függvény bármilyen függvényt jelölhet, melynek a Z halmaz elemeihez tartozó értékei megegyeznek az eredeti diszkrét függvény értékeivel.

A maradéktagot a következő módon adjuk meg:

$$R_I(z_1, \dots, z_s) = R_{1I}(z_1, \dots, z_s) + R_{2I}(z_1, \dots, z_s), \tag{3.5}$$

ahol

$$R_{1I}(z_1, \dots, z_s) =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} \left[z_{10}; \cdots; z_{(j-1)0}; Z_{j(m-1)} \cup Z_{jK_j} \cup \{z_j\}; z_{(j+1)0}; \cdots; z_{s0}; f\right] \prod_{k \in \{0,\ldots,m-1\} \cup K_j} (z_j - z_{jk}) \tag{3.6}$$

és

$$R_{2I}(z_1, \dots, z_s) =$$
$$= \sum_{h=1}^{s} \sum_{\substack{i_h+\cdots+i_s=m \\ 0 \leq i_j \leq m-1, \ j=h,\ldots,s}} \left[z_1; \cdots; z_{h-1}; Z'_{hi_h}; Z_{(h+1)i_{h+1}}; \cdots; Z_{si_s}; f\right] \prod_{l=0}^{i_h} (z_h - z_{hl}) \times$$
$$\times \prod_{h+1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \tag{3.7}$$
$$+ \sum_{j=h+1}^{s} \left[z_1; \cdots; z_{h-1}; Z'_{h0}; Z_{(h+1)0}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}\right] (z_h - z_{h0}) \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}).$$

A következő tétel általánosítása mind az egyváltozós (2.9) formulának, mind a 2.2. Tételben szereplő (2.7) és (2.8) többváltozós formuláknak.

3.1. Tétel. *Tetszőleges, az f függvény értelmezési tartományába eső, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_s)$ pontra igaz a következő egyenlőség:*

$$L_I(z_1, \ldots, z_s) + R_I(z_1, \ldots, z_s) = f(z_1, \ldots, z_s). \tag{3.8}$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $K_j = \{m, m+1, \ldots, m_j\}$, ahol $m_j \geq m,\ j = 1, \ldots, s$. Valóban, ha tekintjük a $\overline{Z_j} = Z_{j(m-1)} \cup Z_{jK_j},\ j = 1, \ldots, s$, halmazt, majd erre bebizonyítjuk az állítást, akkor lényegében az eredeti általános esetre vonatkozó állítást láttuk be.

A $K_j,\ j = 1, \ldots, s$, halmazokra tett feltétel szerint az $L_I(z_1, \ldots, z_s)$ és $R_{1I}(z_1, \ldots, z_s)$ függvények a következő formát öltik:

$$\begin{aligned} &L_I(z_1, \ldots, z_s) = \\ &= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_s \leq m \\ 0 \leq i_j \leq m-1,\ j=1,\ldots,s}} [Z_{1i_1}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{i_j=m}^{m_j} \Big[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z_{ji_j}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\Big] \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

és

$$R_{1I}(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{j=1}^{s} \Big[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{jm_j}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\Big] \prod_{k=0}^{m_j} (z_j - z_{jk}). \tag{3.10}$$

Az $R_{2I}(z_1, \ldots, z_s)$ függvényre adott képlet változatlan marad. Először a következő állítást látjuk be:

3.2. Lemma. *Érvényes az alábbi egyenlőség:*

$$\begin{aligned} &L_I(z_1, \ldots, z_s) + R_{1I}(z_1, \ldots, z_s) = \\ &= \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s \leq m \\ 0 \leq i_j \leq m-1,\ j=1,\ldots,s}} [Z_{1i_1}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{s} \Big[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\Big] \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

A 3.2. Lemma bizonyítása Tekintsük a z_j változó alábbi függvényét:

$$[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f].$$

Az ezzel a függvénnyel vett, $z_{jm}, \dots, z_{jm_j}$ pontokhoz tartozó Lagrange polinom így írható:

$$\sum_{i_j=m}^{m_j} [Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z_{ji_j}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f] \prod_{k=m}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}).$$

Ezek után, az (2.9) képletet használva, felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f] = \\
&= \sum_{i_j=m}^{m_j} [Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z_{ji_j}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f] \prod_{k=m}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\
&+ \left[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{jm_j}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\right] \prod_{k=m}^{m_j} (z_j - z_{jk}) \, .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ha a (3.12) egyenlőség minden sorát megszorozzuk a $\prod_{k=0}^{m-1}(z_j - z_{jk})$ tényezővel, majd ezeket összegezzük j szerint, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s} [Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f] \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}) = \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i_j=m}^{m_j} \left[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z_{ji_j}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\right] \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\
&+ R_{1I}(z_1, \dots, z_s).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A (3.9) és (3.13) képletekből már adódik a lemma állítása. □

Ha (3.11) harmadik sorában külön vesszük a $j = 1$ tagot, akkor a következő formulát kapjuk:

$$L_{1I}(z_1, \dots, z_s) + R_{1I}(z_1, \dots, z_s) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s \le m \\ 0 \le i_j \le m-1, \; j=1,\dots,s}} [Z_{1i_1}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \tag{3.14}$$

$$+ \left[Z'_{1(m-1)}; Z_{20}; \cdots; Z_{s0}; f\right] \prod_{k=0}^{m-1} (z_1 - z_{1k}) + \tag{3.15}$$

$$+ \sum_{j=2}^{s} \left[Z_{10}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f\right] \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}) \, . \tag{3.16}$$

Hasonlóan, ha R_{2I} képletében leválasztjuk a $h = 1$ tagot, azt kapjuk hogy:

$$R_{2I}(z_1, \dots, z_s) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_s=m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=1,\ldots,s}} \left[Z'_{1i_1}; Z_{2i_2}; \cdots; Z_{si_s}; f\right] \prod_{l=0}^{i_1} (z_1 - z_{1l}) \prod_{j=2}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \tag{3.17}$$

$$+ \sum_{j=2}^{s} \left[Z'_{10}; Z_{20}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}\right] (z_1 - z_{10}) \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}) + \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{h=2}^{s} \left(\sum_{\substack{i_h+\cdots+i_s=m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=h,\ldots,s}} \left[z_1; \cdots; z_{h-1}; Z'_{hi_h}; Z_{(h+1)i_{h+1}}; \cdots; Z_{si_s}; f\right] \times \right.\\
&\times \prod_{l=0}^{i_h} (z_h - z_{hl}) \prod_{h+1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\
&+ \sum_{j=h+1}^{s} \left[z_1; \cdots; z_{h-1}; Z'_{h0}; Z_{(h+1)0}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}\right] \times \\
&\left. \times (z_h - z_{h0}) \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}) \right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A következő lépésben meghatározzuk a (3.14), (3.15) és (3.17) tagok összegét. Először felírjuk a (3.14) sort az alábbi formában:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0<i_2+\cdots+i_s\le m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=2,\ldots,s}} \left(\sum_{i_1=0}^{m-i_2-\cdots-i_s} [Z_{1i_1}; Z_{2i_2}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{l=0}^{i_1-1} (z_1 - z_{1l}) \right) \times \\
&\times \prod_{j=2}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) +
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{m-1} [Z_{1i_1}; Z_{20}; \cdots; Z_{s0}; f] \prod_{l=0}^{i_1-1} (z_1 - z_{1l}). \tag{3.21}$$

Ezt követően a (3.17) kifejezést az alábbi alakba írjuk:

$$\sum_{\substack{0<i_2+\ldots+i_s\le m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=2,\ldots,s}} \left(\left[Z'_{1(m-i_1-\cdots-i_s)}; Z_{2i_2}; \cdots; Z_{si_s}; f\right] \prod_{l=0}^{i_1} (z_1 - z_{1l}) \right) \prod_{j=2}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) . \tag{3.22}$$

Célunk az, hogy összeadjuk a (3.20), (3.21), (3.22) és (3.15) formulákat. Egyrészt (3.21) és (3.15) összege (felhasználva az (2.9) képletet) a következő:

$$[z_1; Z_{20}; \cdots; Z_{s0}; f]. \tag{3.23}$$

Másrészt, (3.20) és (3.22) összege (először a zárójelben lévő tagokat adjuk össze) a következő:

$$\sum_{\substack{0<i_2+\cdots+i_s\le m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=2,\dots,s}} [z_1; Z_{2i_2}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=2}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) . \tag{3.24}$$

A (3.23) és (3.24) összege, és egyben a bizonyítás ezen lépésének eredménye:

$$\sum_{\substack{i_2+\cdots+i_s\le m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=2,\dots,s}} [z_1; Z_{2i_2}; \cdots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=2}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) . \tag{3.25}$$

A következő lépés az, hogy kiszámoljuk a még figyelembe nem vett (3.16) és (3.18) tagok összegét. Tekintve a j indexhez tartozó tagokat a (3.16) és (3.18) sorokban, a $\prod_{k=0}^{m-1}(z_j - z_{jk})$ tényező nélkül, a két tag összege (felhasználva az (2.9) képletet a z_1 változóra) az alábbi:

$$[z_1; Z_{20}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f]. \tag{3.26}$$

Eszerint a (3.16) és (3.18) képletek összege az alábbival egyenlő:

$$\sum_{j=2}^{s} [z_1; Z_{20}; \cdots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \cdots; Z_{s0}; f] \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}). \tag{3.27}$$

Idáig azt az eredményt kaptuk, hogy az $L_I(z_1, \dots, z_s) + R_{1I}(z_1, \dots, z_s) + R_{2I}(z_1, \dots, z_s)$ összeg megegyezik a (3.25), (3.27) és (3.19) formulák összegével. Definiáljuk a J indexhalmazt I halmazhoz hasonlóan, de csak $i_2, \dots, i_s$-re vonatkoztatva, és tekintsük az $s-1$ változós $f(z_1, z_2, \dots, z_s)$ függvényt, ahol $z_1 \in Z$, kötött. Ekkor a (3.25) és a (3.27) képlet összege egyenlő a $L_J + R_{1J}$ összeggel, míg (3.19) egyenlő az R_{2J} taggal. Ha feltesszük, hogy (3.8) igaz bármely $s-1$ változós függvényre, akkor, a fenti érvelés szerint, igaz minden s változós függvényre is. □

3.1. Megjegyzés. *A 3.1. Tételben hallgatólagosan feltettük, hogy $m-1 \le n_j$, $j = 1, \dots, s$. Vizsgáljuk meg, hogy mi is a helyzet, ha $m-1 > n_j$ valamely $j \in \{1, \dots, s\}$ esetén, lásd például a 3. ábrát.*

Ebben az esetben is megtalálható mind a ponthalmazhoz tartozó Lagrange polinom, mind annak maradéktagja. Módszerünk a következő. Tegyük fel, hogy $m-1 > n_j$. Vezessük be a $z^{új}_{j(n_j+1)}, \dots, z^{új}_{j(m-1)}$ szimbólumokat. Legyen $Z^{új}_j = \{z_{j0}, \dots, z_{jn_j}, z^{új}_{j(n_j+1)}, \dots, z^{új}_{j(m-1)}\}$. A $Z^{új}_j$ halmaz esetén már igaz, hogy $m-1 \le n^{új}_j$. Végezzük el ezt a bővítést minden olyan j-re, melyre $m-1 > n_j$ teljesült.

9	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
8	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
7	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
6	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
5	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
4	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
3	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
2	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
1	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘
0	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∘	∘	•	•	•	∘	•	∘
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

3. ábra: A fenti ábra a megjegyzésben definiált I index halmazt mutatja, ahol az I_0 index halmazhoz tartozó pontokat $*$ jelöli, feltéve, hogy m=12, míg az I_1 (és $I_2 = \emptyset$) index halmazokhoz tartozókat $\bullet$, feltéve, hogy $K_1 = \{14, 15, 16, 18\} \subset \{11, 12, \ldots, 19\}$, $K_2 = \emptyset \subset \{11, 12, \ldots, 19\}$.

A szükséges $Z_j^{új}$ halmazokkal vett Descartes szorzaton már működik a fejezet tétele, így fel tudjuk írni, mind a (3.4) képlet szerinti Lagrange polinomot, mind annak (3.6) és (3.7) szerinti maradéktagjait.

Az így kapott tagokban még szerepelnek az újonnan bevezetett szimbólumok. Ahhoz, hogy az eredetileg keresett $L_I(\boldsymbol{z})$ és $R_{1I}(\boldsymbol{z})$, $R_{2I}(\boldsymbol{z})$ képleteit megkapjuk, szükségünk van még az alábbi átalakításokra.

- *Először, törüljük ki az (3.4) illetve (3.7) összegek összes olyan tagját, ahol az osztott differenciában újonnan bevezetett szimbólum szerepel a koordinátához tartozó szabad változó nélkül, i.e., a*

$$\left[\cdots; z_{j0}, \ldots, z_{jn_j}, z_{j(n_j+1)}^{új}, \ldots, z_{ji_j}^{új}; \cdots; f\right] \times \cdots \times \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) \times \cdots \tag{3.28}$$

  alakú tagokat.

- *Az így kapott összegekben, illetve a (3.6) képletben a még előforduló új szimbólumokat (és a hozzá tartozó szabad változót) tartalmazó*

$$\left[\cdots; z_{j0}, \ldots, z_{jn_j}, z_{j(n_j+1)}^{új}, \ldots, z_{ji_j}^{új}, z_j; \cdots; f\right] \times \cdots \times \prod_{k=0}^{i_j} (z_j - z_{jk}) \times \cdots \tag{3.29}$$

  alakú tagokat helyettesítsük a nekik megfelelő új szimbólumot nem tartalmazó tagokkal.

I.e., írjuk a (3.29) tag helyett az alábbit:

$$\Big[\cdots; z_{j0}, \ldots, z_{jn_j}, z_j; \cdots; f\Big] \times \cdots \times \prod_{k=0}^{n_j} (z_j - z_{jk}) \times \cdots. \tag{3.30}$$

3.3. Lemma. *A 3.1. Megjegyzés módszerét követve valóban a megfelelő Lagrange polinomhoz, és annak maradéktagjaihoz jutunk.*

Bizonyítás. *Tekintsük az egyváltozós esetet.* $Z := \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, *és legyen* $m-1 > n$. *Ekkor* $Z^{új} = \{z_0, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}^{új}, \ldots, z_{m-1}^{új}\}$. *A Lagrange polinom (3.4) szerinti alakja*

$$L_I^{új}(z) = \sum_{i=0}^{m-1} \Big[z_0, \ldots, z_i^{(új)}; f\Big] \prod_{k=0}^{i-1} (z - z_k^{(új)}), \tag{3.31}$$

míg a maradéktag (3.6) szerinti alakja

$$R_I^{új}(z) = \Big[z_0, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}^{új}, \ldots, z_{m-1}^{új}, z; f\Big] \prod_{k=0}^{m-1} (z - z_k^{(új)}). \tag{3.32}$$

Elvégezve a megjegyzés módszerét a (3.31) képletre (csak a (3.28) alakú tagokat kell törölni), az alábbi polinomot kapjuk:

$$L_I(z) = \sum_{i=0}^{n} [z_0, \ldots, z_i; f] \prod_{k=0}^{i-1} (z - z_k), \tag{3.33}$$

ami pedig pont az eredeti Z *halmazra illeszkedő Lagrange polinom.*

Alkalmazva a fent leírt módszert a maradéktagra (esetünkben csak a (3.30) alakú tag helyettesítésére van szükség), éppen az

$$R_I(z) = [z_0, z_1, \ldots, z_n, z; f] \prod_{k=0}^{n} (z - z_k). \tag{3.34}$$

képletet kapjuk, amely megegyezik a Z *halmazhoz tartozó Lagrange polinom maradéktagjával.*

Ezzel az egyváltozós esetre beláttuk az állítást.

Vegyük észre, hogy a 3.1. Tétel bizonyításában végig csak az egyváltozós Newton féle alakban megadott Lagrange polinom és annak maradéktagja képleteit használtuk fel (egész pontosan azt, hogy a maradéktag ilyen alakban felírható), ezentúl még a szummázások megfelelő sorrendje, struktúrája segített az átláthatóságban. Mivel lemmánk állítása egyváltozós esetben igaz, így ezt kihasználva, ezt a tényt a 3.1. Tétel bizonyításán végigvezetve, megkapjuk a lemma állítását a többváltozós esetre. □

3.1. Példa. *A 3.1. Megjegyzés módszerére jó példa, ha tekintjük a 3. Ábrán szereplő esetet:* $m = 12$, $Z_1 = \{z_{10}, \dots, z_{1,19}\}$, $Z_2 = \{z_{20}, \dots, z_{29}\}$. *Mivel* $11 = m - 1 > n_2 = 9$, *ezért új szimbólumok bevezetésére van szükség, így* $Z_2^{új} = \{z_{20}, \dots, z_{29}, z_{2,10}^{új}, z_{2,11}^{új}\}$. *írjuk fel ezek segítségével a 3.1. Tételhez tartozó Lagrange polinomot illetve maradéktagokat. A (3.4) szerinti képlet*

$$
\begin{aligned}
&L_I^{új}(z_1, z_2) = \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2 \le 12 \\ 0 \le i_j \le 11,\ j=1,2}} [z_{10}, \dots z_{1i_1}; z_{20}, \dots, z_{2i_2}^{(új)}; f] \prod_{k=0}^{i_1-1} (z_1 - z_{1k}) \prod_{l=0}^{i_2-1} (z_1 - z_{2l}^{(új)}) + \\
&+ \sum_{i=1}^{4} [z_{10}, \dots, z_{1,11}, z_{1k_1^{(1)}}, \dots, z_{1k_1^{(i)}}; z_{20}; f] \prod_{k \in \{0,\dots,11,k_1^{(1)},\dots,k_1^{(i-1)}\}} (z_1 - z_{1k}).
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

A (3.6) formula szerint:

$$
\begin{aligned}
&R_{1I}^{új}(z_1, z_2) = \\
&= [z_{10}, \dots, z_{1,11}, z_{1,14}, z_{1,15}, z_{1,16}, z_{1,18}, z_1; z_{20}; f] \prod_{k \in \{0,\dots,11\} \cup K_1} (z_1 - z_{1k}) + \\
&+ [z_{10}; z_{20}, \dots, z_{29}, z_{2,10}^{új}, z_{2,11}^{új}, z_2; f] \prod_{k \in \{0,\dots,11\}} (z_2 - z_{2k}^{(új)}),
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Végül (3.7) formája:

$$
\begin{aligned}
&R_{2I}^{új}(z_1, z_2) = \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2 = 12 \\ 0 \le i_j \le 11,\ j=1,2}} [z_{10}, \dots, z_{1i_1}, z_1; z_{20}, \dots, z_{2i_2}^{(új)}; f] \prod_{l=0}^{i_1} (z_1 - z_{1l}) \prod_{k=0}^{i_2-1} (z_2 - z_{2k}^{(új)}) + \\
&+ [z_{10}, z_1; z_{20}, \dots, z_{29}, z_{2,10}^{új}, z_{2,11}^{új}, z_2; f](z_1 - z_{10}) \prod_{k=0}^{9} (z_2 - z_{2k})(z_2 - z_{2,10}^{új})(z_2 - z_{2,11}^{új}).
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Most végezzük el a (3.28) szerinti tagok törlését. A (3.35) képletre:

$$
\begin{aligned}
&L_I(z_1, z_2) = \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2 \le 12 \\ 0 \le i_1 \le 11,\ 0 \le i_2 \le 9}} [z_{10}, \dots z_{1i_1}; z_{20}, \dots, z_{2i_2}; f] \prod_{k=0}^{i_1-1} (z_1 - z_{1k}) \prod_{l=0}^{i_2-1} (z_1 - z_{2l}) + \\
&+ \sum_{i=1}^{4} [z_{10}, \dots, z_{1,11}, z_{1k_1^{(1)}}, \dots, z_{1k_1^{(i)}}; z_{20}; f] \prod_{k \in \{0,\dots,11,k_1^{(1)},\dots,k_1^{(i-1)}\}} (z_1 - z_{1k}).
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Mivel a fenti képletben már nem szerepel új szimbólum, így máris megkaptuk a 3. Ábra indexhalmazához tartozó Lagrange polinomot.

Az (3.36) képletben nincsenek (3.28) szerint tagok, viszont vannak a (3.37) maradéktagban. Ebből kitörölve a megfelelő tagokat, azt kapjuk, hogy:

$$
\begin{gathered}
R_{2I}^{köztes}(z_1,z_2) = \\
= \sum_{\substack{i_1+i_2=12 \\ 0\le i_1\le 11,\ 0\le i_2\le 9}} [z_{10},\dots,z_{1i_1},z_1;z_{20},\dots,z_{2i_2};f]\prod_{l=0}^{i_1}(z_1-z_{1l})\prod_{k=0}^{i_2-1}(z_2-z_{2k})+ \\
+[z_{10},z_1;z_{20},\dots,z_{29},z_{2,10}^{új},z_{2,11}^{új},z_2;f](z_1-z_{10})\prod_{k=0}^{9}(z_2-z_{2k})(z_2-z_{2,10}^{új})(z_2-z_{2,11}^{új}).
\end{gathered}
\tag{3.39}
$$

Következik a (3.29) szerinti tagok helyettesítése (3.30) tagokkal. A (3.36) képletre:

$$
\begin{gathered}
R_{1I}(z_1,z_2) = \\
= [z_{10},\dots,z_{1,11},z_{1,14},z_{1,15},z_{1,16},z_{1,18},z_1;z_{20};f]\prod_{k\in\{0,\dots,11\}\cup K_1}(z_1-z_{1k})+ \\
+[z_{10};z_{20},\dots,z_{29},z_2;f]\prod_{k\in\{0,\dots,9\}}(z_2-z_{2k}),
\end{gathered}
\tag{3.40}
$$

Míg a (3.39) formulát tovább alakítva:

$$
\begin{gathered}
R_{2I}(z_1,z_2) = \\
= \sum_{\substack{i_1+i_2=12 \\ 0\le i_1\le 11,\ 0\le i_2\le 9}} [z_{10},\dots,z_{1i_1},z_1;z_{20},\dots,z_{2i_2};f]\prod_{l=0}^{i_1}(z_1-z_{1l})\prod_{k=0}^{i_2-1}(z_2-z_{2k})+ \\
+[z_{10},z_1;z_{20},\dots,z_{29},z_2;f](z_1-z_{10})\prod_{k=0}^{9}(z_2-z_{2k}).
\end{gathered}
\tag{3.41}
$$

Végül, tehát megkaptuk az eredeti ponthalmazhoz tartozó maradéktagokat is.

4. Korlátok TDMP feladatokra

Fejezetünkben végig a TDMP feladatok azon fajtájával foglalkozunk, ahol a $\mu_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$, $\alpha_1+\cdots+$ $+\alpha_s \le m$, momentumokon kívül ismertek az $E(X_j^{\beta_j})$, $\beta_j = 1,\ldots,m_j$ momentumok is, ahol $m \le m_j \le n_j$, $j=1,\ldots,s$. Eddigi jelölésünket használva

$$E(X_j^{\beta_j}) = \mu_{0\ldots0\beta_j0\ldots0},\ j=1,\ldots,s,$$

ahol a jobb oldalon β_j a j-edik index.

4.1. Korlátok rendezett tartók esetén

Jelölje H a (1.35) zárójelében definiált halmazt. A 3. Fejezetben bevezetett $K_j \subset \{m, m+$ $+1,\ldots,n_j\}$ halmazokra vonatkozólag az alábbi struktúrák valamelyikének az érvényességét fogjuk megkívánni:

$$\begin{array}{lll} & |K_j| \text{ páros} & |K_j| \text{ páratlan} \\ min & u^{(j)}, u^{(j)}+1,\ldots,v^{(j)},v^{(j)}+1 & m, u^{(j)}, u^{(j)}+1,\ldots,v^{(j)},v^{(j)}+1 \\ max & m, u^{(j)}, u^{(j)}+1,\ldots,v^{(j)},v^{(j)}+1, n_j & u^{(j)}, u^{(j)}+1,\ldots,v^{(j)},v^{(j)}+1, n_j. \end{array} \tag{4.1}$$

Az eddigiekben nem tételeztük fel, hogy a $Z_1,\ldots,Z_s$ halmazok elemei rendezettek. A most következő tételekben azonban elemeiket növekvő vagy csökkenő sorrendben rendezzük el.

4.1. Tétel. *Legyen $z_{j0} < z_{j1} < \cdots < z_{jn_j}$, $j=1,\ldots,s$. Tegyük fel, hogy az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvény $m+1$ rendű osztott differencái nemnegatívak, továbbá, hogy a z_j változója szerinti $m+|K_j|$ rendű osztott differenciái is nemnegatívak, ahol K_j (4.1) valamelyik min struktúráját követi, $j=1,\ldots,s$.*

Ekkor igaz az, hogy a (3.4) képlettel definiált $L_I(z_1,\ldots,z_s)$ megegyezik a Z_I halmazhoz tartozó, H-típusú, egyértelműen adott Lagrange polinommal, és teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$f(z_1,\ldots,z_s) \ge L_I(z_1,\ldots,z_s),\ (z_1,\ldots,z_s)\in Z. \tag{4.2}$$

Eszerint, a (1.26) minimum probléma $\widehat{A}$ mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló $\widehat{B}$ bázis duál megengedett, és

$$E[f(X_1,\ldots,X_s)] \ge E[L_I(X_1,\ldots,X_s)]. \tag{4.3}$$

Ha $\widehat{B}$ egyben primál megengedett is, akkor a (4.3) képlettel adott korlát éles.

Ha a fent említett osztott differenciák mindegyike nempozitív, akkor (4.2) és (4.3) fordított relációjelekkel állnak.

Bizonyítás. A (3.9) H-típusú Lagrange polinom egyértelműségét, illetve, azt hogy $\widehat{B}$ a (1.26) LP feladat bázisa, a következőképp láthatjuk be. Abból, hogy ($\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_s)$) $L_I(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z_I$ esetén, következik, hogy $\boldsymbol{f}_{\widehat{B}}$ előáll $\widehat{B}$ sorainak lineáris kombinációiként. Mivel ez bármilyen f függvényre, és így bármilyen $\boldsymbol{f}_{\widehat{B}}$ vektorra igaz, ezért a $\widehat{B}$ mátrix nem szinguláris. Ebből már következik a Lagrange polinom egyértelműsége.

Azt, hogy a (4.2) egyenlőtlenség ekvivalens a $\widehat{B}$ bázis (1.26) feladatbeli duál megengedettségével, a 1.2. szakaszban már levezettük.

A (4.2) reláció bizonyításához használjuk a (3.8) egyenletet. Mivel $R_I(z_1, \ldots, z_s) = R_{1I}(z_1, \ldots, z_s) + R_{2I}(z_1, \ldots, z_s)$, ezért elég, ha belátjuk, hogy $R_{1I}(z_1, \ldots, z_s) \geq 0$ és $R_{2I}(z_1, \ldots, z_s) \geq 0$, $(z_1, \ldots, z_s) \in Z$ esetén.

Az $R_{1I}(z_1, \ldots, z_s)$ függvény (3.6) képlettel adott alakjából és K_j speciális struktúrájából következik, hogy

$$\prod_{k \in \{0,\ldots,m-1\} \cup K_j} (z_j - z_{jk}) > 0, \text{ ha } z_j \notin \{z_{j0}, \ldots, z_{jm-1}\} \cup Z_{jK_j}. \tag{4.4}$$

Ha pedig $z_j \in \{z_{j0}, \ldots, z_{jm-1}\} \cup Z_{jK_j}$, akkor a fenti szorzat eltűnik. Mivel a feltétel szerint az f függvény z_j, $j = 1, \ldots, s$ változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciái nemnegatívak, ezért $R_{1I}(z_1, \ldots, z_s) \geq 0$ minden $(z_1, \ldots, z_s) \in Z$ esetén.

Az $R_{2I}(z_1, \ldots, z_s)$ függvény (3.7) képletével adott összeg tagjaiban mind az osztott differenciák, melyek teljes rendje $m+1$, mind pedig azok szorzói nemnegatívak bármely $(z_1, \ldots, z_s) \in Z$ esetén. Ebből következik, hogy $R_{2I}(z_1, \ldots, z_s) \geq 0$, $(z_1, \ldots, z_s) \in Z$, ami egyenértékű a (4.2) relációval. Ebből viszont (4.3) reláció érvényessége közvetlenül adódik.

Végül, ha $\widehat{B}$ egyszerre primál és duál megengedett bázisa a (1.26) problémának, akkor ez optimális bázis, és célfüggvény értéke az alábbi:

$$\begin{aligned} minE[f(z_1, \ldots, z_s)] &= \\ = f_{\widehat{B}}^T \boldsymbol{p}_{\widehat{\boldsymbol{B}}} &= f_{\widehat{B}}^T \widehat{B}^{-1} \widehat{\boldsymbol{b}} = \\ = f_{\widehat{B}}^T \widehat{B}^{-1} E[\widehat{\boldsymbol{b}}(X_1, \ldots, X_s)] &= \\ = E[f_{\widehat{B}}^T \widehat{B}^{-1} \widehat{\boldsymbol{b}}(X_1, \ldots, X_s)] &= \\ = E[L_I(X_1, \ldots, X_s)]. & \end{aligned}$$

□

Az következő tétel, a fenti feltételek módosítása mellett, alsó illetve felső korlátot szolgáltat az $f(z_1, \ldots, z_s)$, $(z_1, \ldots, z_s) \in Z$ függvény várható értékére.

4.2. Tétel. *Legyen $z_{j0} > z_{j1} > \cdots > z_{jn_j}$, $j = 1, \ldots, s$. Tegyük fel, hogy az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvény $m + 1$ rendű osztott differencái nemnegatívak, továbbá, hogy a z_j változója szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciái ugyancsak nemnegatívak, ahol K_j (4.1) valamelyik, az alábbiakban jelzett, struktúráját követi, $j = 1, \ldots, s$. Ekkor igazak a következők:*

(a) *Ha $m+1$ páros, $|K_j|$ páros és K_j (4.1) megfelelő max struktúráját követi vagy ha $m+1$ páros, $|K_j|$ páratlan és K_j (4.1) megfelelő min struktúráját követi, akkor a (3.4) képlettel definiált $L_I(z_1, \ldots, z_s)$ megegyezik a Z_I halmazhoz tartozó, H-típusú, egyértelműen adott Lagrange polinommal, és teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:*

$$f(z_1, \ldots, z_s) \geq L_I(z_1, \ldots, z_s), \; (z_1, \ldots, z_s) \in Z. \tag{4.5}$$

Eszerint, a (1.26) minimum probléma $\widehat{A}$ mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló $\widehat{B}$ bázis duál megengedett, és

$$E[f(X_1, \ldots, X_s)] \geq E[L_I(X_1, \ldots, X_s)]. \tag{4.6}$$

Ha $\widehat{B}$ egyben primál megengedett is, akkor a (4.6) képlettel adott korlát éles.

(b) *Ha $m+1$ páratlan, $|K_j|$ páros és K_j (4.1) megfelelő max struktúráját követi vagy ha $m+1$ páratlan, $|K_j|$ páratlan és K_j (4.1) megfelelő min struktúráját követi, akkor a (3.4) képlettel definiált $L_I(z_1, \ldots, z_s)$ megegyezik a Z_I halmazhoz tartozó, H-típusú, egyértelműen adott Lagrange polinommal, és teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:*

$$f(z_1, \ldots, z_s) \leq L_I(z_1, \ldots, z_s), \; (z_1, \ldots, z_s) \in Z. \tag{4.7}$$

Eszerint, a (1.26) maximum probléma $\widehat{A}$ mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló $\widehat{B}$ bázis duál megengedett, és

$$E[f(X_1, \ldots, X_s)] \leq E[L_I(X_1, \ldots, X_s)]. \tag{4.8}$$

Ha $\widehat{B}$ egyben primál megengedett is, akkor a (4.8) képlettel adott korlát éles.

Bizonyítás. Bizonyításunkat az (a) pont első feltételei szerint mondjuk el, a többi állítás ugyanígy igazolható.

A 4.1. Tétel bizonyításában már beláttuk, hogy $\widehat{B}$ bázisa az (1.26) LP feladatnak. Azt is tisztáztuk, hogy (4.5) ekvivalens a $\widehat{B}$ bázisnak az (1.26) minimum feladatra vonatkozó duál megengedettségével.

Lényegében csak (4.5) bizonyítására van szükség, mivel egyrészt (4.6) triviális következménye a (4.5) egyenlőtlenségnek, másrészt (4.6) esetén a korlát élességére tett megjegyzés igazolása (mikor $\widehat{B}$ egyúttal primál megengedett is) a 4.1. Tétel bizonyításában szereplő úton véghezvihető.

Egész pontosan, belátjuk, hogy $R_{1I}(\boldsymbol{z}) \geq 0$ és $R_{2I}(\boldsymbol{z}) \geq 0$ minden $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_s) \in Z$ esetén. $R_{1I}(\boldsymbol{z})$ nemnegatívitása abból következik, hogy $R_{1I}(\boldsymbol{z})$ tagjai nemnegatív osztott differenciák illetve az alábbi képlet szorzatai:

$$\prod_{k \in \{0, \ldots, m-1\} \cup K_j} (z_j - z_{jk}). \tag{4.9}$$

Mivel $m+1$ páros, így igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\prod_{k\in\{0,\dots,m-1\}} (z_j - z_{jk}) \le 0. \tag{4.10}$$

A (4.10) szorzat eltűnik, ha $z_j \in \{z_{j0}, \dots, z_{jm-1}\}$. Másrészt, K_j speciális struktúrájának köszönhetően, $z_j \in Z_{jK_j}$ esetén:

$$\prod_{k\in K_j} (z_j - z_{jk}) \le 0. \tag{4.11}$$

Tehát $R_{1I}(z_1, \dots, z_s) \ge 0$ minden $(z_1, \dots, z_s) \in Z$ esetén.

$R_{2I}(\boldsymbol{z})$ nemnegatívitása abból következik, hogy minden egyes tagja nemnegatív osztott differenciák illetve páros számú $z_j - z_{jk} \le 0$ alakú tényező szorzata. Így, $R_{2I}(z_1, \dots, z_s) \ge 0$ minden $(z_1, \dots, z_s) \in Z$ esetén. □

Következő tételünkben az alábbi jelöléseket használjuk:

$$\begin{aligned} &I = I_0 \cup \left(\cup_{j=1}^{s} I_j\right), \text{ ahol} \\ &I_0 = \{(i_1, \dots, i_s) |\ i_j \text{ egész},\ 0 \le n_j - i_j \le m-1,\ j = 1, \dots, s,\ n_1 - i_1 + \dots + n_s - i_s \le m\}, \\ &I_j = \{(i_1, \dots, i_s) |\ (n_j - i_j) \in K_j,\ i_l = 0,\ l \ne j\},\ j = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{4.12}$$

A Z_I alappontrendszerhez tartozó Lagrange polinom:

$$\begin{aligned} L_I(z_1, \dots, z_s) = \\ \sum_{\substack{i_1+\dots+i_s \le m \\ 0 \le i_j \le m-1,\ j=1,\dots,s}} \left[z_{1n_1}, \dots, z_{1(n_1-i_1)}; \cdots; z_{sn_s}, \dots, z_{s(n_s-i_s)}; f\right] \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=n_j-i_j+1}^{n_j} (z_j - z_{jk}) + \\ \sum_{j=1}^{s} \sum_{i_j=1}^{|K_j|} \left[z_{1n_1}; \cdots; z_{(j-1)n_{j-1}}; z_{jn_j}, \dots, z_{j(m-1)}, z_{j(n_j-k_j^{(1)})}, \dots, z_{j(n_j-k_j^{(i_j)})}; z_{(j+1)n_{j+1}}; \cdots; z_{sn_s}; f\right] \times \\ \times \prod_{k=0}^{n_j-m+1} (z_j - z_{jk}) \prod_{l=1}^{i_j-1} (z_j - z_{j(n_j-k_j^{(l)})}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3. Tétel. *Legyen $z_{j0} < z_{j1} < \dots < z_{jn_j}$, $j = 1, \dots, s$. Tegyük fel, hogy az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvény $m+1$ rendű osztott differencái nemnegatívak, továbbá, hogy a z_j változója szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciái ugyancsak nemnegatívak, ahol $n_j - K_j$ (4.1) valamelyik, az alábbiakban jelzett, struktúráját követi, $j = 1, \dots, s$. Ekkor igazak a következők:*

(a) Ha $m+1$ páros, $|K_j|$ páros és $n_j - K_j$ (4.1) megfelelő max struktúráját követi vagy ha $m+1$ páros, $|K_j|$ páratlan és $n_j - K_j$ (4.1) megfelelő min struktúráját követi, akkor

a (3.4) képlettel definiált $L_I(z_1,\ldots,z_s)$ megegyezik a Z_I halmazhoz tartozó, H-típusú, egyértelműen adott Lagrange polinommal, és teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$f(z_1,\ldots,z_s) \geq L_I(z_1,\ldots,z_s),\ (z_1,\ldots,z_s) \in Z. \tag{4.14}$$

Eszerint, a (1.26) minimum probléma $\widehat{A}$ mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló $\widehat{B}$ bázis duál megengedett, és

$$E[f(X_1,\ldots,X_s)] \geq E[L_I(X_1,\ldots,X_s)]. \tag{4.15}$$

Ha $\widehat{B}$ egyben primál megengedett is, akkor a (4.6) képlettel adott korlát éles.

(b) *Ha $m+1$ páratlan, $|K_j|$ páros és $n_j - K_j$ (4.1) megfelelő max struktúráját követi vagy ha $m+1$ páratlan, $|K_j|$ páratlan és $n_j - K_j$ (4.1) megfelelő min struktúráját követi, akkor a (3.4) képlettel definiált $L_I(z_1,\ldots,z_s)$ megegyezik a Z_I halmazhoz tartozó, H-típusú, egyértelműen adott Lagrange polinommal, és teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:*

$$f(z_1,\ldots,z_s) \leq L_I(z_1,\ldots,z_s),\ (z_1,\ldots,z_s) \in Z. \tag{4.16}$$

Eszerint, a (1.26) maximum probléma $\widehat{A}$ mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló $\widehat{B}$ bázis duál megengedett, és

$$E[f(X_1,\ldots,X_s)] \leq E[L_I(X_1,\ldots,X_s)]. \tag{4.17}$$

Ha $\widehat{B}$ egyben primál megengedett is, akkor a (4.8) képlettel adott korlát éles.

Bizonyítás. Az, hogy $\widehat{B}$ bázis, a szokásos úton látható be. Egyébként pedig tételünk a 4.2. Tétel következménye, csak fel kell cserélnünk a $z_{j(n_j-0)}, z_{j(n_j-1)}, \ldots, z_{j(n_j-n_j)}$ jelöléseket a $z_{j0}, z_{j1}, \ldots, z_{jn_j}$ jelölésekkel, $j = 1,\ldots,s$ illetve $(z_1,\ldots,z_s) \in Z$. □

Mint az előzőekben is utaltunk rá, a függvény várható értékének éles alsó (felső) korlátait a megfelelő TDMP minimum (maximum) probléma optimális célfüggvény értéke szolgáltatja. A TDMP feladatot megoldhatjuk duál szimplex algoritmussal. Ebben az esetben a fenti állításokban szereplő duál megengedett bázisok, azontúl, hogy korlátokat szolgáltatnak a függvény várható értékére, a duál algoritmus kezdeti bázisaiként is nagy segítséget nyújthatnak. Egy kezdeti duál megengedett bázis ismerete két lényeges előnnyel is jár: egyrészt a duál algoritmus első fázisának elhagyásával megtakarítjuk a futási idő körülbelül felét, másrészt a kevesebb művelet miatt a numerikus pontosság is jobb lesz.

Befejezésül, nézzünk egy-egy példát alsó illetve felső korlátokat szolgáltató Lagrange polinomokra a kétdimenziós esetben.

4.1. Példa. *Tegyük fel, hogy az* $f(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ *függvény 3 rendű osztott differencái nemnegatívak, továbbá, hogy a* z_j *változója szerinti 5 rendű osztott differenciái ugyancsak nemnegatívak,* $j = 1, 2$. *Ebben az esetben (*$m = 2$, $|K_1| = |K_2| = 3$*) a 4.1. Tétel a következő fajta, alulról közelítő Lagrange polinomot adja:*

$$
\begin{aligned}
&L_I(z_1, z_2) = \\
&= [z_{10}; z_{20}; f] + [z_{10}, z_{11}; z_{20}; f](z_1 - z_{10}) + \\
&+ [z_{10}; z_{20}, z_{21}; f](z_2 - z_{20}) + \\
&+ [z_{10}, z_{11}; z_{20}, z_{21}; f](z_1 - z_{10})(z_2 - z_{20}) + \\
&+ [z_{10}, z_{11}, z_{12}; z_{20}; f](z_1 - z_{10})(z_1 - z_{11}) + \\
&+ [z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{1i}; z_{20}; f](z_1 - z_{10})(z_1 - z_{11})(z_1 - z_{12}) + \\
&+ [z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{1i}, z_{1(i+1)}; z_{20}; f](z_1 - z_{10})(z_1 - z_{11})(z_1 - z_{12})(z_1 - z_{1i}) + \\
&+ [z_{10}; z_{20}, z_{21}, z_{22}; f](z_2 - z_{20})(z_2 - z_{21}) + \\
&+ [z_{10}; z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{2k}; f](z_2 - z_{20})(z_2 - z_{21})(z_2 - z_{22}) + \\
&+ [z_{10}; z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{2k}, z_{2(k+1)}; f](z_2 - z_{20})(z_2 - z_{21})(z_2 - z_{22})(z_1 - z_{2k}).
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Ugyanekkor a 4.3. Tétel (b) részének segítségével az alábbi, felülről közelítő Lagrange polinomot kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&L_I(z_1, z_2) = \\
&= [z_{1n_1}; z_{2n_2}; f] + [z_{1n_1}, z_{1(n_1-1)}; z_{2n_2}; f](z_1 - z_{1n_1}) + \\
&+ [z_{1n_1}; z_{2n_2}, z_{2(n_2-1)}; f](z_2 - z_{2n_2}) + \\
&+ [z_{1n_1}, z_{1(n_1-1)}; z_{20}, z_{2(n2-1)}; f](z_1 - z_{1n_1})(z_2 - z_{2n_2}) + \\
&+ [z_{1n_1}, z_{1(n_1-1)}, z_{1(n_1-2)}; z_{2n_2}; f](z_1 - z_{1n_1})(z_1 - z_{1(n_1-1)}) + \\
&+ [z_{1n_1}, z_{1(n_1-1)}, z_{1(n1-2)}, z_{1i}; z_{2n_2}; f](z_1 - z_{1n_1})(z_1 - z_{1(n_1-1)})(z_1 - z_{1(n_1-2)}) + \\
&+ [z_{1n_1}, z_{1(n_1-1)}, z_{1(n_1-2)}, z_{1i}, z_{1(i+1)}; z_{2n_2}; f](z_1 - z_{1n_1})(z_1 - z_{1(n_1-1)})(z_1 - z_{1(n_1-2)})(z_1 - z_{1i}) + \\
&+ [z_{1n_1}; z_{2n_2}, z_{2(n_2-1)}, z_{2(n_2-2)}; f](z_2 - z_{2n_2})(z_2 - z_{2(n_2-1)}) + \\
&+ [z_{1n_1}; z_{2n_2}, z_{2(n_2-1)}, z_{2(n2-2)}, z_{2i}; f](z_2 - z_{2n_2})(z_2 - z_{2(n_2-1)})(z_2 - z_{2(n_2-2)}) + \\
&+ [z_{1n_1}; z_{2n_2}, z_{2(n_2-1)}, z_{2(n_2-2)}, z_{2k}, z_{2(k+1)}; f](z_2 - z_{2n_2})(z_2 - z_{2(n_2-1)})(z_2 - z_{2(n_2-2)})(z_2 - z_{2k}).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Ha a (4.18), (4.19) polinomokban a z_1, z_2 *változókat az* X_1, X_2 *valószínűségi változókkal helyettesítjük, és vesszük a nyert valószínűségi változók várható értékét, akkor alsó és felső korlátokat kapunk* $E[f(X_1, X_2)]$ *értékére. Az* X_1, X_2 *valószínűségi változók fent említett polinomjai várható értékét könnyen megkaphatjuk, ha ismerjük az*

$$E(X_j^k),\ k = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2$$

momentumokat és a $Cov(X_1, X_2)$ *kovarianciát.*

4.2. Egy dekompozíciós eljárás

A 4.1. szakasz tételeiben az I_0 illetve $I_j,\ j = 1, \ldots, s$ indexhalmazok rögzítettek voltak, viszont a $K_j,\ j = 1, \ldots, s$ halmazok megválasztásában volt némi szabadságunk. Ez azt jelenti, hogy általában mind a minimum, mind a maximum problémához több duál megengedett bázist találtunk, melyek mindegyike korlátot szolgáltat a célfüggvény értékére. A következőkben bemutatunk egy módszert, mely segítségével egyszerűbben találhatjuk meg ezek közül a legszorosabb korláthoz tartozókat.

Első lépésként, a Z halmazra illetve a célfüggvényre tett, az általánosságot nem megszorító, feltételek mellett, a változók (oszlopok) megfelelő rendezésével a (1.21) feladatot megfelelő alakra hozzuk. Az így kapott struktúra, azon túl, hogy feltárja a feladat szerkezetét, alkalmas lesz egy egyszerűbb dekompozíciós eljárás bevezetésére is, mely lényege hogy a legoptimálisabb struktúrához tartozó $K_j,\ j = 1, \ldots, s$ halmazokat egymástól függetlenül, kisebb feladatokon keresztül találja meg.

Az említett feltételek a következők:

$$z_{j0} = 0,\ j = 1, \ldots, s \tag{4.20}$$

és

$$f(z_{10}, \ldots, z_{s0}) = 0. \tag{4.21}$$

Könnyen látható, hogy ezek nem jelentenek megszorítást, mivel bármely feladat átkonvertálható egy, a fentieknek megfelelő ekvivalens alakra. Egyrészt, az (4.20) feltételnek megfelelő

$$f^{új}(\boldsymbol{z}) = f^{régi}(z_1 + z_{10}^{régi}, \ldots, z_s + z_{s0}^{régi})$$

függvény a régivel megegyező konvexitású marad a $Z^{új} = Z^{régi} - (z_{10}^{régi}, \ldots, z_{s0}^{régi})$ tartományon, és ugyanazt a célfüggvényértéket adja a fenti eltolásnak megfelelően átkonvertált momentumok esetén. Másrészt, a (4.21) egyenlőséget kielégítő

$$f^{új}(\boldsymbol{z}) = f^{régi}(\boldsymbol{z}) - f^{régi}(z_{10}, \ldots, z_{s0})$$

függvényt eltolással kaptuk, így figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{p} = 1$, a megfelelő célfüggvényérték pontosan a konstans $f^{régi}(z_{10}, \ldots, z_{s0})$ értékkel lesz kisebb bármely megoldás esetén.

A következőkben a 4.1. Tétel szerinti (minimum feladathoz tartozó) bázisstruktúrák szerint fogunk továbbhaladni, de eljárásunk az előző szakasz bármely tételére hasonlóan alkalmazható. Célunk azon K_j halmazrendszer megtalálása, mely a (4.3) egyenlőtlenségben a legerősebb becslést adja, i.e., melyre az $E[L_I(X_1, \ldots, X_s)]$ várható érték a legnagyobb lesz. Képletekkel felírva ez pontosan az alábbi problémát jelenti:

$$\begin{array}{lrcl} & \max & & \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{p} \\ \text{feltéve, hogy} & & & \\ & \widehat{A}\boldsymbol{p} & = & \widehat{\boldsymbol{b}} \\ & \boldsymbol{p} & \in & \text{a 4.1. Tétel szerinti bázismegoldásoknak.} \end{array} \tag{4.22}$$

A feladat megfelelő alakba történő átírásához tekintsük az alábbi index halmazokat:

$$
\begin{aligned}
I_0^{int} &= \{(i_1,\dots,i_s) |\; 1 \le i_j \le m-1, \text{ egész}, \; j = 1,\dots,s, \; i_1+\dots+i_s \le m\}, \\
I_j^{axes} &= \{(i_1,\dots,i_s) |\; 1 \le i_j \le n_j, \text{ egész}; \; i_l = 0 \; l \ne j \text{ esetén}\}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Ha átrendezzük az (4.22) feladat oszlopait és sorait a fenti indexhalmazok szerint, akkor a következő, jobban áttekinthető szerkezethez jutunk:

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
 & \mathbf{0} & \overbrace{\qquad}^{z_{I_1^{axes}}} & \overbrace{\qquad}^{z_{I_2^{axes}}} & & \overbrace{\qquad}^{z_{I_s^{axes}}} & \overbrace{\qquad}^{z_{I_0^{int}}} & \overbrace{\qquad}^{\text{a többi oszlop}} & & \widehat{\boldsymbol{b}} & \\
\hline
\boldsymbol{f}^T: & 0 & \boldsymbol{f}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{f}^T_{I_s^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_0^{int}} & & & & \\
\hline
\widehat{A}: & 1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & \cdots & 1\cdots1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & & \mu_{0\dots0} & =1 \\
\hline
 & 0 & \begin{matrix} z_{11}\dots z_{1n_1} \\ \vdots\widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_1^{axes}}\vdots \\ z_{11}^{m_1}\dots z_{1n_1}^{m_1} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 & \widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_0^{int}} & & & \begin{matrix} \mu_{10\dots0} \\ \vdots \\ \mu_{m_10\dots0} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_1^{axes}} \\
\hline
 & 0 & 0 & \begin{matrix} z_{21}\dots z_{2n_2} \\ \vdots\widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_2^{axes}}\vdots \\ z_{21}^{m_2}\dots z_{2n_2}^{m_2} \end{matrix} & \cdots & 0 & \widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_0^{int}} & & & \begin{matrix} \mu_{01\dots0} \\ \vdots \\ \mu_{0m_2\dots0} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_2^{axes}} \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} z_{s1}\dots z_{sn_s} \\ \vdots\widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_s^{axes}}\vdots \\ z_{s1}^{m_s}\dots z_{sn_s}^{m_s} \end{matrix} & \widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_0^{int}} & & & \begin{matrix} \mu_{0\dots01} \\ \vdots \\ \mu_{0\dots0m_s} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_s^{axes}} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \widehat{A}^{I_0^{int}}_{I_0^{int}} & & & & \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}} \\
\hline
\boldsymbol{p}^T: & p_{\mathbf{0}} & \boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_0^{int}} & 0 & & & \\
\hline
 & \| & \cup & \cup & & \cup & \| & & & & \\
\boldsymbol{p}_B^T: & (p_{\mathbf{0}})_B & (\boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}})_B & (\boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}})_B & & (\boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}})_B & (\boldsymbol{p}^T_{I_0^{int}})_B & & & &
\end{array}
\tag{4.24}
$$

Az (4.24) feladat felírása során sor került új jelölések bevezetésére, melyek további érveléseinkben is segítségünkre lesznek.

Egyrészt, az alábbi elveket követjük: az alsó index a mátrixban részt vevő oszlopokat jelöli, míg a felső index a sorokra utal. Ezentúl (lásd majd később), ha az indexben a sorok negatív előjellel szerepelnek, az azt jelenti, hogy minden más sor részt vesz a mátrixban, kivéve ezek.

Másrészt, különösen fontos, és talán némi magyarázatra szorul az utolsó két sor. Esetünkben $\boldsymbol{p}$ egy megfelelő bázismegoldást jelöl, míg $\boldsymbol{p}_B$ csak a bázisváltozók komponenseit tartalmazza. A 4.1. tételbeli bázisstruktúrából következően $\boldsymbol{p}^T$ utolsó blokkjához nem tartozik bázisváltozó, így az itteni értékek nullák lesznek. A másik fontos megjegyzés az a tény, melyre a $\boldsymbol{p}_B^T$ és a $\boldsymbol{p}^T$ sorai viszonyában függőleges egyenlőségjelekkel utaltunk, hogy $p_{0\ldots0}$ és $\boldsymbol{p}_{I_0^{int}}$ minden változója egyben bázisváltozó is, bármely tételbeli bázismegoldás esetén.

Kihasználva, hogy egy 4.1. tételbeli $\boldsymbol{p}$ bázismegoldás utolsó blokkja csupa nulla értékeket vesz fel, a (4.24) struktúrát tovább egyszerűsíthetjük:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
\mathbf{0} & \overbrace{}^{Z_{I_1^{axes}}} & \overbrace{}^{Z_{I_2^{axes}}} & & \overbrace{}^{Z_{I_s^{axes}}} & \overbrace{}^{Z_{I_0^{int}}} & \widehat{\boldsymbol{b}} & \\
\hline
0 & \boldsymbol{f}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{f}^T_{I_s^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_0^{int}} & & \\
\hline
1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & \cdots & 1\cdots1 & 1\cdots1 & \mu_{0\ldots0} & =1 \\
\hline
0 & \begin{array}{c} z_{11}\ldots z_{1n_1} \\ :\widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_1^{axes}}: \\ z_{11}^{m_1}\ldots z_{1n_1}^{m_1} \end{array} & 0 & \cdots & 0 & \widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_0^{int}} & \begin{array}{c} \mu_{10\ldots0} \\ \vdots \\ \mu_{m_10\ldots0} \end{array} & \boldsymbol{\mu}_{I_1^{axes}} \\
\hline
0 & 0 & \begin{array}{c} z_{21}\ldots z_{2n_2} \\ :\widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_2^{axes}}: \\ z_{21}^{m_2}\ldots z_{2n_2}^{m_2} \end{array} & \cdots & 0 & \widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_0^{int}} & \begin{array}{c} \mu_{01\ldots0} \\ \vdots \\ \mu_{0m_2\ldots0} \end{array} & \boldsymbol{\mu}_{I_2^{axes}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \begin{array}{c} z_{s1}\ldots z_{sn_s} \\ :\widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_s^{axes}}: \\ z_{s1}^{m_s}\ldots z_{sn_s}^{m_s} \end{array} & \widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_0^{int}} & \begin{array}{c} \mu_{0\ldots01} \\ \vdots \\ \mu_{0\ldots0m_s} \end{array} & \boldsymbol{\mu}_{I_s^{axes}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \widehat{A}^{I_0^{int}}_{I_0^{int}} & \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}} & \\
\hline
p_{\mathbf{0}} & \boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_0^{int}} & & \\
\end{array}
\tag{4.25}
$$

Mivel az $\widehat{A}^{I_0^{int}}_{I_0^{int}}$ minor négyzetes mátrix, és mivel csak az ő oszlopai szerepelnek $\boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}}$ bázisbeli előállításában, így függetlenül a tengelyekhez tartozó bázisoszlopok megválasztásától (i.e., a K_j halmazok megválasztásától), a $\boldsymbol{p}_{I_0^{int}}$ vektor egyértelműen adott az alábbi egyenlőség által:

$$\boldsymbol{p}_{I_0^{int}} = \left(\widehat{A}^{I_0^{int}}_{I_0^{int}}\right)^{-1} \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}}. \tag{4.26}$$

Ezáltal, tekintve, hogy $\boldsymbol{p}_{I_0^{int}}$ konstans, a (4.22) feladatot az alábbi alakba írhatjuk át:

$$
\begin{array}{lrcl}
& \max & \boldsymbol{f}^T_{(\mathbf{0},I_1{}^{axes},\dots,I_s{}^{axes})}\boldsymbol{p}_{(\mathbf{0},I_1{}^{axes},\dots,I_s{}^{axes})} & \left(+\overbrace{\boldsymbol{f}^T_{I_0{}^{int}}\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}}}^{konstans}\right) \\
\text{feltéve, hogy} & & & \\
& \widehat{A}_{(\mathbf{0},I_1{}^{axes},\dots,I_s{}^{axes})}\boldsymbol{p}_{(\mathbf{0},I_1{}^{axes},\dots,I_s{}^{axes})} & = & \widehat{\boldsymbol{b}} - A_{I_0{}^{int}}\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}} = \widehat{\boldsymbol{b}}_1 \\
& \boldsymbol{p}_{(\mathbf{0},I_1{}^{axes},\dots,I_s{}^{axes})} & = & \\
& \text{egy 4.1. Tétel szerinti bázismegoldás megfelelő komponenseivel.} & &
\end{array}
\tag{4.27}
$$

A feladat mátrixalakja az alábbi:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\mathbf{0} & \overbrace{\qquad}^{Z_{I_1^{axes}}} & \overbrace{\qquad}^{Z_{I_2^{axes}}} & & \overbrace{\qquad}^{Z_{I_s^{axes}}} & \widehat{\boldsymbol{b}}_1 \\
\hline
0 & \boldsymbol{f}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{f}^T_{I_s^{axes}} & \\
\hline
1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & \cdots & 1\cdots1 & \mu_{0\dots0} - \mathbf{1}^T\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}} \\
\hline
0 & \begin{matrix} z_{11}\dots z_{1n_1} \\ \vdots\,\widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_1^{axes}}\,\vdots \\ z_{11}^{m_1}\dots z_{1n_1}^{m_1} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{\mu}_{I_1^{axes}} - \widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_0^{int}}\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}} \\
\hline
0 & 0 & \begin{matrix} z_{21}\dots z_{2n_2} \\ \vdots\,\widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_2^{axes}}\,\vdots \\ z_{21}^{m_2}\dots z_{2n_2}^{m_2} \end{matrix} & \cdots & 0 & \boldsymbol{\mu}_{I_2^{axes}} - \widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_0^{int}}\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} z_{s1}\dots z_{sn_s} \\ \vdots\,\widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_s^{axes}}\,\vdots \\ z_{s1}^{m_s}\dots z_{sn_s}^{m_s} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_s^{axes}} - \widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_0^{int}}\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}} - \widehat{A}^{I_0^{int}}_{I_0^{int}}\boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}} = \mathbf{0} \\
\hline
p_{\mathbf{0}} & \boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}} &
\end{array}
\tag{4.28}
$$

A fenti feladatban az I_0^{int} indexekhez tartozó sorokban már csak csupa nulla szerepel, ezért ezeket elhagyjuk. Az így kapott, továbbra is ekvivalens, feladatot a következőképp írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max & \boldsymbol{f}^T_{(\mathbf{0},{I_1}^{axes},\ldots,{I_s}^{axes})}\boldsymbol{p}_{(\mathbf{0},{I_1}^{axes},\ldots,{I_s}^{axes})} & \\
\text{feltéve, hogy} & & & \\
 & \widehat{A}^{(-I_0^{int})}_{(\mathbf{0},{I_1}^{axes},\ldots,{I_s}^{axes})}\boldsymbol{p}_{(\mathbf{0},{I_1}^{axes},\ldots,{I_s}^{axes})} & = & \widehat{\boldsymbol{b}}_1^{(-I_0^{int})} \\
 & \boldsymbol{p}_{(\mathbf{0},{I_1}^{axes},\ldots,{I_s}^{axes})} & = & \\
 & \multicolumn{3}{l}{\text{egy 4.1. Tétel szerinti bázismegoldás megfelelő komponenseivel.}}
\end{array}
\tag{4.29}
$$

Mivel az (4.21) feltétel szerint $f(z_{10},\ldots,z_{s0}) = 0$, másrészt mivel $\widehat{A}$ első oszlopának csak a legelső komponense nem tűnik el, így a korlátozó feltételeket érdemes az alábbi módon csoportosítani:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\mathbf{0} & \overbrace{\qquad}^{Z_{I_1^{axes}}} & \overbrace{\qquad}^{Z_{I_2^{axes}}} & & \overbrace{\qquad}^{Z_{I_s^{axes}}} & \widehat{\boldsymbol{b}}_1^{(-I_0^{int})} \\
\hline
0 & \boldsymbol{f}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{f}^T_{I_s^{axes}} & \\
\hline
1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & \cdots & 1\cdots1 & \widehat{\boldsymbol{b}_1}^{\mathbf{0}} \\
\hline
0 & \begin{matrix} z_{11}\ldots z_{1n_1} \\ \vdots\widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_1^{axes}}\vdots \\ z_{11}^{m_1}\ldots z_{1n_1}^{m_1}\end{matrix} & 0 & \cdots & 0 & \widehat{\boldsymbol{b}_1}^{I_1^{axes}} \\
\hline
0 & 0 & \begin{matrix} z_{21}\ldots z_{2n_2} \\ \vdots\widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_2^{axes}}\vdots \\ z_{21}^{m_2}\ldots z_{2n_2}^{m_2}\end{matrix} & \cdots & 0 & \widehat{\boldsymbol{b}_1}^{I_2^{axes}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} z_{s1}\ldots z_{sn_s} \\ \vdots\widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_s^{axes}}\vdots \\ z_{s1}^{m_s}\ldots z_{sn_s}^{m_s}\end{matrix} & \widehat{\boldsymbol{b}_1}^{I_s^{axes}} \\
\hline
p_{\mathbf{0}} & \boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}} &
\end{array}
\tag{4.30}
$$

Látható, hogy $p_{\mathbf{0}}$ megválasztásától nem függ a célfüggvényérték, másrészt, hogy $p_{\mathbf{0}}$ csak a (4.30) felírásban külön vett, első feltételben vesz részt. Ezeket figyelembe véve, feladatunkat optimalizálhatjuk csak az $I_1,\ldots,I_s$ indexekhez tartozó változókon, majd $p_{\mathbf{0}}$ értékét utána számoljuk ki, az első sorban szereplő korlátozó feltételnek megfelelően. i.e.,

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max & & \boldsymbol{f}^T_{(I_1{}^{axes},\ldots,I_s{}^{axes})}\boldsymbol{p}_{(I_1{}^{axes},\ldots,I_s{}^{axes})} \\
\text{feltéve, hogy} & & & \\
 & \widehat{A}^{(-I_0^{int}-\mathbf{0})}_{(I_1{}^{axes},\ldots,I_s{}^{axes})}\boldsymbol{p}_{(I_1{}^{axes},\ldots,I_s{}^{axes})} & = & \widehat{\boldsymbol{b}}_1^{(-I_0^{int}-\mathbf{0})} \\
 & p_{\mathbf{0}} & = & (\widehat{\boldsymbol{b}}_1)^{\mathbf{0}} - (1,\ldots,1)^T\boldsymbol{p}_{(I_1{}^{axes},\ldots,I_s{}^{axes})} \\
 & \boldsymbol{p}_{I_1{}^{axes},\ldots,I_s{}^{axes})} & = & \\
 & \text{egy 4.1. Tétel szerinti bázismegoldás megfelelő komponenseivel.} & &
\end{array}
\tag{4.31}
$$

Írjuk fel (4.31) első korlátozó feltételét illetve a célfüggvényt mátrix alakban, úgy hogy a csupa nullából álló minorokat kihagyjuk:

$$
\begin{array}{ccccc}
\overbrace{}^{Z_{I_1^{axes}}} & \overbrace{}^{Z_{I_2^{axes}}} & & \overbrace{}^{Z_{I_s^{axes}}} & \widehat{\boldsymbol{b}}_1^{(-I_0^{int}-\mathbf{0})} \\
\boxed{\boldsymbol{f}^T_{I_1^{axes}}} & \boxed{\boldsymbol{f}^T_{I_2^{axes}}} & \cdots & \boxed{\boldsymbol{f}^T_{I_s^{axes}}} & \\
\boxed{\begin{array}{c} z_{11}\ldots z_{1n_1} \\ \vdots\,\widehat{A}^{I_1^{axes}}_{I_1^{axes}}\,\vdots \\ z_{11}^{m_1}\ldots z_{1n_1}^{m_1} \end{array}} & & & & \boxed{\widehat{\boldsymbol{b}}_1^{I_1^{axes}}} \\
 & \boxed{\begin{array}{c} z_{21}\ldots z_{2n_2} \\ \vdots\,\widehat{A}^{I_2^{axes}}_{I_2^{axes}}\,\vdots \\ z_{21}^{m_2}\ldots z_{2n_2}^{m_2} \end{array}} & & & \boxed{\widehat{\boldsymbol{b}}_1^{I_2^{axes}}} \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \boxed{\begin{array}{c} z_{s1}\ldots z_{sn_s} \\ \vdots\,\widehat{A}^{I_s^{axes}}_{I_s^{axes}}\,\vdots \\ z_{s1}^{m_s}\ldots z_{sn_s}^{m_s} \end{array}} & \boxed{\widehat{\boldsymbol{b}}_1^{I_s^{axes}}} \\
\boxed{\boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}}} & \boxed{\boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}}} & \cdots & \boxed{\boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}}} &
\end{array}
\tag{4.32}
$$

Látható, hogy a (4.31) feladat ezen része szétesik s darab alábbi alakú, egymástól független részfeladatra:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max & & \boldsymbol{f}^T_{I_j{}^{axes}}\boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} \\
\text{feltéve, hogy} & & & \\
 & \widehat{A}^{I_j{}^{axes}}_{I_j{}^{axes}}\boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} & = & \widehat{\boldsymbol{b}}_1^{I_j^{axes}} \\
 & \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} & = & \\
 & \text{egy 4.1. Tétel szerinti bázismegoldás megfelelő komponenseivel.} & &
\end{array}
\tag{4.33}
$$

$j = 1, \ldots, s$. Vegyük észre, hogy az utolsó korlátozó feltétel azt jelenti, hogy a $\boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}}$ vektorban szereplő bázisváltozók indexeinek egyrészt a (3.2) által definiált I_0 halmazba (annak a tengelyt tartalmazó részébe), másrészt egy, a (3.3) által definiált, K_j által meghatározott I_j halmazba kell esnie.

Így, megfejtve a (4.22) feladat szerkezetét, kihasználva, hogy a tengelyeken egymástól függetlenül kereshetjük meg a legjobb bázismegoldást, máris adódik a dekompoziciós eljárás. Metódusunk, pontosabban leírva a következő:

(i) Az (4.26) egyenlőség alapján tudjuk, hogy $\boldsymbol{p}_{I_0^{int}} = \left(\widehat{A}^{I_0^{int}}_{I_0^{int}}\right)^{-1} \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}}$.

(ii) Az (4.27) feladatban szereplő definíció szerint, $\widehat{\boldsymbol{b}}_1 = \widehat{\boldsymbol{b}} - \widehat{A}_{I_0{}^{int}} \boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}}$. Innen már az (4.33) feladatok könnyen felírhatók.

(iii) Minden $j = 1, \ldots, s$ értékre megoldjuk az (4.33) problémát. Az optimális megoldásokat jelölje $\boldsymbol{p}^{opt}_{I_j{}^{axes}}$, $j = 1, \ldots, s$.

(iv) Az (4.31) feladatból, $p^{opt}_{\mathbf{0}} = (\widehat{\boldsymbol{b}}_1)^{\mathbf{0}} - (1, \ldots, 1)^T \boldsymbol{p}^{opt}_{(I_1{}^{axes}, \ldots, I_s{}^{axes})}$.

(v) A többi változó értéke nulla, így máris megkaptuk (4.22) optimális megoldását:

$$(\boldsymbol{p}^{opt})^T = (p_{\mathbf{0}}, (\boldsymbol{p}^{opt}_{(I_1{}^{axes}, \ldots, I_s{}^{axes})})^T, \mathbf{0}).$$

4.3. További duál megengedett bázisok, algoritmusok és korlátok a kétváltozós esetre

A kétváltozós esetben, az alább bemutatandó módszer segítségével, a (1.26) feladathoz jóval több duál megengedett bázisstruktúra található. Ezek segítségével általában jobb becslések kaphatók a 4.1. szakasz korlátainál. A továbbiakban eltekintünk az X_1, X_2 valószínűségi változók tartóinak rendezettségétől, csupán azt tesszük fel, hogy mind a $Z_1 = \{z_{10}, \ldots, z_{1n_1}\}$, mind a $Z_2 = \{z_{20}, \ldots, z_{2n_2}\}$ halmaz különböző elemekből áll.

Az átláthatóság kedvéért, újra felírjuk a (3.4) Lagrange polinomot,illetve a maradéktag

(3.6), (3.7) képleteit az $s=2$ esetre:

$$
\begin{aligned}
&L_I(z_1,z_2)= \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2\le m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=1,2}} [z_{10},\dots z_{1i_1}; z_{20},\dots,z_{2i_2}; f] \prod_{j=1}^{2}\prod_{k=0}^{i_j-1}(z_j-z_{jk})+ \\
&+\sum_{i=1}^{|K_1|}[z_{10},\dots,z_{1(m-1)},z_{1k_1^{(1)}},\dots,z_{1k_1^{(i)}};z_{20};f] \prod_{k\in\{0,\dots,m-1,k_1^{(1)},\dots,k_1^{(i-1)}\}}(z_1-z_{1k})+ \\
&+\sum_{i=1}^{|K_2|}[z_{10};z_{20},\dots,z_{2(m-1)},z_{2k_2^{(1)}},\dots,z_{2k_2^{(i)}};f] \prod_{k\in\{0,\dots,m-1,k_2^{(1)},\dots,k_2^{(i-1)}\}}(z_2-z_{2k}),
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{1I}(z_1,z_2)= \\
&=[z_{10},\dots,z_{1(m-1)},Z_{1K_1},z_1;z_{20};f]\prod_{k\in\{0,\dots,m-1\}\cup K_1}(z_1-z_{1k})+ \\
&+[z_{10};z_{20},\dots,z_{2(m-1)},Z_{2K_2},z_2;f]\prod_{k\in\{0,\dots,m-1\}\cup K_2}(z_2-z_{2k}),
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{2I}(z_1,z_2)= \\
&=\sum_{\substack{i_1+i_2=m\\ 0\le i_j\le m-1,\ j=1,2}}[z_{10},\dots,z_{1i_1},z_1;z_{20},\dots,z_{2i_2};f]\prod_{l=0}^{i_1}(z_1-z_{1l})\prod_{k=0}^{i_2-1}(z_2-z_{2k})+ \\
&+[z_{10},z_1;z_{20},\dots,z_{2(m-1)},z_2;f](z_1-z_{10})\prod_{k=0}^{m-1}(z_2-z_{2k}).
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Célunk, hogy a Z_I alappontokhoz tartozó Lagrange polinom, i.e., (4.34), kielégítse a következő feltételek valamelyikét:

$$L_I(z_1,z_2)\le f(z_1,z_2),\ (z_1,z_2)\in Z \tag{4.37}$$

illetve

$$L_I(z_1,z_2)\ge f(z_1,z_2),\ (z_1,z_2)\in Z. \tag{4.38}$$

Az (4.37) ((4.38)) képlet teljesüléséhez elégséges, ha $R_{1I}(z_1,z_2)\ge 0$ és $R_{2I}(z_1,z_2)\ge 0$ ($R_{1I}(z_1,z_2)\le 0$ és $R_{2I}(z_1,z_2)\le 0$), minden $(z_1,z_2)\in Z$ esetén.

$R_{1I}(z_1,z_2)$ együtthatói $m+|K_j|$ rendű, míg $R_{2I}(z_1,z_2)$ együtthatói $m+1$ rendű osztott differenciák. Feltesszük, hogy ezek nemnegatívak. Ez azt jelenti, hogy a (4.37) ((4.38)) feltétel teljesüléséhez úgy kell az I index halmazt megválasztani, hogy az (4.35) és (4.36) képletekben szereplő, együttható utáni szorzatok nemnegatívak (nempozitívak) legyenek.

Tekintsük az alábbi $m \times (m+1)$ méretű mátrixot:

$$\begin{array}{cccccccc} z_{10} & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1(m-2)} & z_{1(m-1)} & z_{20} \\ z_{10} & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1(m-2)} & z_{20} & z_{21} \\ & & & \vdots & & & \\ z_{10} & z_{11} & z_{20} & \cdots & z_{2(m-4)} & z_{2(m-3)} & z_{2(m-2)} \\ z_{10} & z_{20} & z_{21} & \cdots & z_{2(m-3)} & z_{2(m-2)} & z_{2(m-1)}, \end{array} \tag{4.39}$$

és feleltessük meg az első $m-1$ sort a (4.36) második sorában szereplő, hozzá tartozó szorzatnak. Hasonlóan, feleltessük meg (4.39) utolsó sorát a (4.36) harmadik sorában lévő szorzatnak. Annak, hogy az $R_{2I}(z_1, z_2)$ maradéktagot definiáló, (4.36) szorzatai nemnegatívak legyenek minden $(z_1, z_2) \in Z$ esetén, elégséges feltétele, ha (4.39) minden sorára, i.e., minden $i_1 \geq 0,\ i_2 \geq 0$ egészre, melyre $i_1 + i_2 = m-1$ igaz, hogy

$$\begin{array}{l} |\{i|\ 0 \leq i \leq i_1,\ z_{1i} > z_1\}| \\ +\,|\{i|\ 0 \leq i \leq i_2,\ z_{2i} > z_2\}| \end{array} = \text{páros szám} \tag{4.40}$$

minden $(z_1, z_2) \in Z$ esetén. Hasonlóan, (4.36) szorzatai nemnegatívitásának ($(z_1, z_2) \in Z$ esetén) elégséges feltétele, ha (4.39) minden sorára, i.e., minden $i_1 \geq 0,\ i_2 \geq 0$ egészre, melyre $i_1 + i_2 = m-1$ igaz, hogy

$$\begin{array}{l} |\{i|\ 0 \leq i \leq i_1,\ z_{1i} > z_1\}| \\ +\,|\{i|\ 0 \leq i \leq i_2,\ z_{2i} > z_2\}| \end{array} = \text{páratlan szám} \tag{4.41}$$

minden $(z_1, z_2) \in Z$ esetén.

Tekintsük először azt az esetet, amikor alsó korlátot akarunk konstruálni, i.e., amikor a (4.37) feltételt akarjuk kielégíteni. Az alábbiakban bemutatunk egy algoritmust, mely a feltételnek megfelelő $z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \ldots, z_{2(m-1)}$ sorozatokat szolgáltat, a hozzájuk tartozó Z_{jK_j} halmazokkal együtt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a Z_1 és Z_2 halmazok elemei növekvő sorrendben a következők: $Z_1 = \{0, 1, \ldots, n_1\}$, $Z_2 = \{0, 1, \ldots, n_2\}$.

Minimum algoritmus

Algoritmus a (4.40) feltételt kielégítő $z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \ldots, z_{2(m-1)}$ sorozatok megtalálására

0. Lépés Legyen $t = 0$, $-1 \leq q_1 \leq m-1$, $L = \{0, 1, \ldots, q_1\}$, $U = \{n_1, n_1 - 1, \ldots, n_1 - -(m - q_1 - 2)\}$, $V^0 = \{$az L és U halmazok tetszőleges összefésülése$\} = \{v^0, v^1, \ldots, v^{m-1}\}$. Ha $|U|$ páros, akkor legyen $h^0 = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = n_2$, ha pedig $|U|$ páratlan, akkor legyen $h^0 = n_2$, $l^0 = 0$, $u^0 = n_2 - 1$. Ugorjunk az 1. Lépésre.

Megjegyzés: Az L, U, V^0 halmazok rendezett halmazok (sorozatok)! (4.39) első sorának az első m elemét a V^0 sorozattal tesszük egyenlővé, míg az $m+1$-ik elem legyen h^0.

1. Lépés Ha $t = m$, ugorjunk a 3. Lépésre. Egyébként ugorjunk a 2. Lépésre.

2. Lépés Legyen $V^t = \{v^0, v^1, \ldots, v^{m-1-t}\}$, $H^t = \{h^0, h^1, \ldots, h^t\}$. Ha $v^{m-1-t} \in L$, akkor legyen $h^{t+1} = l^t$, $l^{t+1} = l^t + 1$, $u^{t+1} = u^t$, és ha $v^{m-1-t} \in U$, akkor legyen $h^{t+1} = u^t$, $u^{t+1} = u^t - 1$, $l^{t+1} = l^t$. $t := t + 1$ és ugorjunk az 1. Lépésre.

Megjegyzés: A (4.39) mátrix t-edik sorát a V^t, H^t sorozatok ilyen sorrendben történő összeláncolásával tesszük egyenlővé.

3. Lépés Állj, a (4.39) mátrixnak mind az m sorát meghatároztuk, i.e., a $t+1$-edik sor $= \{V^t, H^t\}$, $t = 0, 1, \ldots, m-1$.

Írjuk fel a (1.26) probléma I_0 indexhalmazhoz tartozó oszlopait reprezentáló pontokat:

$$\begin{array}{lllll}
(z_{10}, z_{20}), & (z_{11}, z_{20}), & \cdots & (z_{1(m-2)}, z_{20}), & (z_{1(m-1)}, z_{20}), \\
(z_{10}, z_{21}), & (z_{11}, z_{21}), & \cdots & (z_{1(m-2)}, z_{21}), & \\
\vdots & \vdots & & & \\
(z_{10}, z_{2(m-2)}), & (z_{11}, z_{2(m-2)}), & & & \\
(z_{10}, z_{2(m-1)}). & & & &
\end{array} \tag{4.42}$$

Hátra van még a $R_{1I}(z_1, z_2) \geq 0$, $(z_1, z_2) \in Z$ feltételt kielégítő K_1 és K_2 halmazok megtalálása.

Tegyük fel, hogy a $z_{20}, z_{21}, \ldots, z_{2(m-1)}$ sorozat megkonstruálásához a $0, 1, \ldots, q_2, n_2, \ldots, n_2 - (m - q_2 - 2)$ számokat használtuk fel. Ekkor a K_j elemeit a $\{q_j + 1, q_j + 2, \ldots, n_j - (m - q_j - 1)\}$ halmazból fogjuk kiválasztani, $j = 1, 2$, mivel ezeket nem használtuk (4.42) megkonstruálásakor. Mindkét j esetén igaz, hogy a

$$\prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}), \ (z_1, z_2) \in Z \tag{4.43}$$

szorzat nem vált előjelet, $z_{j0}, \ldots, z_{j(m-1)}$ konstrukciójától függően végig nemnegatív illetve nempozitív marad, $j = 1, 2$.

Ha (4.43) nemnegatív, akkor a $\{q_j + 1, q_j + 2, \ldots, n_j - (m - q_j - 1)\}$ halmazt a sorrend megtartásával a $\{m, m+1, \ldots, n_j\}$ halmazra képezve, a K_j képének (4.1) egy min struktúrájával, míg ha (4.43) nempozitív, akkor a K_j képének max struktúrával kell rendelkeznie.

Készen vagyunk az I index halmazhoz tartozó duál megengedett bázis konstrukciójával. □

A (4.38) reláció teljesítéséhez, i.e., felső korlát konstruálásához a fenti, $z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}$; $z_{20}, \ldots, z_{2(m-1)}$ sorozatot definiáló, algoritmusnak csupán némi módosítása szükséges. Így csak a 0. Lépését írjuk újra, a többi lépés változatlan marad.

Maximum algoritmus

Az (4.41) feltételt kielégítő $z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \dots, z_{2(m-1)}$ sorozatokat megtaláló algoritmus 0. Lépése

0. Lépés Legyen $t = 0$, $-1 \le q_1 \le m-1$, $L = \{0, 1, \dots, q_1\}$, $U = \{n_1, n_1 - 1, \dots, n_1 - (m - - q_1 - 2)\}$, $V^0 = \{$az L és U halmazok tetszőleges összefésülése$\} = \{v^0, v^1, \dots, v^{m-1}\}$. Ha $|U|$ páratlan, akkor $h^0 = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = n_2$, ha pedig $|U|$ páros, akkor legyen $h^0 = n_2$, $l^0 = 0$, $u^0 = n_2 - 1$. Ugorjunk az 1. Lépésre stb.

Az (1.26) feladat I_0 index halmazhoz tartozó oszlopait reprezentáló pontokat a (4.42) táblázatban találjuk.

Hátra van még a megfelelő K_1 és K_2 halmazok megtalálása, melyekre $R_{1I}(z_1, z_2) \le 0$ minden $(z_1, z_2) \in Z$ esetén.

K_j elemeit a $\{q_j + 1, q_j + 2, \dots, n_j - (m - q_j - 1)\}$ halmazból fogjuk választani, $j = 1, 2$.

Felső korlát keresésénél K_j megválasztása pont fordítva történik, mint a Minimum algoritmusnál. Ha (4.43) nemnegatív, akkor K_j megfelelő képe max struktúrát, egyébként pedig min struktúrát kell, hogy kövessen.

Készen vagyunk, megkaptuk az I indexhalmazhoz tartozó duál megengedett bázis struktúrát. □

Az általános esetben, mikor Z_1 nem feltétlenül a $\{0, 1, \dots, n_1\}$ és Z_2 sem feltétlenül a $\{0, 1, \dots, n_2\}$ halmaz, a következőképp járhatunk el. Rendezzük Z_1 és Z_2 elemeit növekvő sorrendbe, majd létesítsünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (párosítást) Z_1 és a $\{0, 1, \dots, n_1\}$ rendezett halmaz elemei közt. Tegyük ugyanezt a Z_2 és $\{0, 1, \dots, n_2\}$ halmazokkal. Ezután hajtsuk végre a Minimum vagy Maximum algoritmust a $\{0, 1, \dots, n_1\}$, $\{0, 1, \dots, n_2\}$ halmazokkal. Az így kapott (4.42) illetve K_j, $j = 1, 2$ halmazokra alkalmazva a fenti párosítást (annak inverzét) megkapjuk a megfelelő duál megengedett bázist.

Látható, hogy a fenti eljárással, az előzőekhez képest, jóval több duál megengedett bázis (struktúra) állítható elő. Azonban, ellentétben pl. a duál módszerrel, nem áll rendelkezésünkre semmilyen egyszerű kritérium, mely megmondaná, hogy a fenti Minimum illetve Maximum algoritmussal kapott bázis javít-e a korláton (a célfüggvényen). Ennek ellenére, mivel a fenti konstrukció egyszerű és gyors, azon túl, hogy megkapjuk a duál megengedett bázist illetve a hozzá tartozó $L_I(z_1, z_2)$ Lagrange polinomot, az esetek többségében az $E[L_I(X_1, X_2)]$ korlát is egyszerűen számolható. Ekképpen aránylag kevés idő alatt tesztelhetünk aránylag sok duál megengedett bázist, majd ezek közül kiválasztva a legjobbat, korlátozhatjuk illetve becsülhetjük az $E[f(X_1, X_2)]$ értéket. Tapasztalatok szerint (lásd a következő fejezetet), módszerünkkel meglehetősen szoros korlátok adhatóak, a duál algoritmus lefutásánál jóval rövidebb idő alatt.

5. Példák, numerikus eredmények

5.1. Kétváltozós feladatok

Szakaszunk első felében bemutatunk két példát, melyekkel egyrészt illusztráljuk a 4. Fejezetben leírtakat, másrészt a numerikus eredményeken keresztül bemutatjuk a különböző módszerek pontosságát, hatékonyságát. Ezek után is hasonlóan járunk el, csak eltekintünk a módszerek részletes leírásától, és inkább a számszerű eredményekre helyezzük a hangsúlyt.

5.1. Példa. *Legyen $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 9\}$, $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$. Alapul véve a 4.1. Tétel feltételeit, és tekintve a $K_1 = K_2 = \{4, 8, 9\}$ halmazokat, melyek (4.1) egy min struktúráját követik, megadhatunk egy duál megengedett bázis a (1.25) minimum problémára, és egyúttal egy alsó korlátot a $E[f(X_1, X_2)]$ várható értékre, (4.3) segítségével. Bázisunk szemléletes képe a 4.(a) ábrán látható.*

Felhasználva a 4.3. Tételt, az (1.25) maximum problémára ugyancsak megadhatunk egy duál megengedett bázist, és ezzel együtt egy felső korlátot a $E[f(X_1, X_2)]$ várható értékre. Legyen K_1, K_2 ugyanaz, mint az előbb. A bázishoz tartozó indexhalmazt a 4.(b) ábra mutatja.

9	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
8	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
7	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
6	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
5	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
4	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
3	$\ast$	$\ast$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
2	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
1	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
0	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(a)

9	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\ast$
8	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$\ast$
7	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\ast$	$\ast$	$\ast$
6	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\ast$	$\ast$
5	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
4	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
2	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
1	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
0	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(b)

4. ábra: $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 9\}$. $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$. $K_1 = K_2 = \{4, 8, 9\}$. Az (a) ábra az (1.25) minimum feladat 4.1. Tétel szerint kapott duál megengedett bázisát mutatja, míg a (b) ábra az (1.25) maximum feladat 4.3. Tétel által kapott duál megengedett bázisát szemlélteti. Az I_0 index halmazhoz tartozó pontokat $\ast$ jelöli, míg az I_1 és I_2 index halmazokhoz tartozókat $\bullet$.

Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényt,

$$f(z_1, z_2) = log[(e^{\alpha z_1 + a} - 1)(e^{\beta z_2 + b} - 1) - 1], \tag{5.1}$$

az következő értelmezési tartománnyal,

$$e^{\alpha z_1+a} > 2,\ e^{\beta z_2+b} > 2,$$

ahol α, β positív konstans. Függvényünk a biztosítás matematikában használatos Frank-féle függvény (lásd Bowers Jr., Hickman, Jones and Nesbitt [1]) némileg módosított alakja.

Könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_j^2} < 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial z_j^3} > 0,\ \frac{\partial^4 f}{\partial z_j^4} < 0,\ \frac{\partial^5 f}{\partial z_j^5} > 0, \ldots,$$

$$j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} < 0, \frac{\partial^3 f}{\partial z_1^2 \partial z_2} > 0, \frac{\partial^3 f}{\partial z_1 \partial z_2^2} > 0,\ stb.$$

Tehát a függvény minden páros (páratlan) rendű deriváltja negatív (pozitív).

Így, a függvény értelmezési tartományát a $Z = Z_1 \times Z_2$ halmazra megszorítva, az kielégíti a 4.1. Tétel és a 4.3. Tétel feltételeit. Feltesszük, hogy egyrészt $\alpha = \beta = 1,\ a = b = 0$, másrészt hogy az alábbi momentumok ismertek:

μ_{ij}	0	1	2	3	4	5	6
0	1	3.1855	18.5564	133.5470	1057.8635	8786.6576	74906.2014
1	3.1855	13.9179	91.0830	693.3256			
2	18.5564	91.0830	623.6111				
3	133.5470	693.3256					
4	1057.8635						
5	8786.6576						
6	74906.2014						

Az $E[f(X_1, X_2)]$ várható értékre alsó és felső korlátot nyerhetünk, ha kiszámoljuk a $\boldsymbol{f}_{\widehat{B}}^T \widehat{B}^{-1} \widehat{\boldsymbol{b}}$ kifejezés értékét, ahol a $\widehat{B}$ mátrix oszlopait a szakasz elején definiált két bázishoz tartozó oszlopok alkotják. Az alsó korlátra kapott eredmény $-\mathbf{23.0067}$, míg a felső korlátra a $\mathbf{8.1465}$ értéket kapjuk. Korlátaink közt nagy a differencia, így nem alkalmasak használható becslésre.

Azonban, a 4.3. szakasz algoritmusai segítségével javithatunk a korlátokon. A alábbiakban bemutatunk egy-egy példát alsó illetve felső korlátot szolgáltató, duál megengedett bázis megtalálására. Először a Minimum algoritmust futtatjuk le a következőképp:

0. Lépés $t = 0,\ q_1 = -1,\ L = \emptyset,\ U = \{9, 8, 7, 6\},\ V^0 = U,\ |U|$ *páros, így* h^0*=0*, $l^0 = 1$, $u^0 = 9$.

2. Lépés $v^{m-1} \in U$, *ezért* $h^1 = u^0 = 9,\ l^1 = l^0 = 0,\ u^1 = u^0 - 1 = 8.\ t = t + 1 = 1.$

2. Lépés $v^{m-1} \in U$, *ezért* $h^2 = u^1 = 8,\ l^2 = l^1 = 0,\ u^2 = u^1 - 1 = 7.\ t = t + 1 = 2.$

2. Lépés $v^{m-1} \in U$, *ezért* $h^3 = u^2 = 7$, $l^3 = l^2 = 0$, $u^3 = u^2 - 1 = 6$. $t = t + 1 = 3$.

2. Lépés $v^{m-1} \in U$, *ezért* $h^1 = u^0 = 9$, $l^1 = l^0 = 0$, $u^1 = u^0 - 1 = 8$. $t = t + 1 = 1$.

3. Lépés $t = 3 = m - 1$, *ezért megállunk.*

Eddig a pontig a $z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}$ *és* $z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}$ *értékeket definiáltuk. Írjuk fel őket a (4.39) szerinti elrendezésben:*

$$\begin{matrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 9 & 0 & 9 & 8 & 7. \end{matrix}$$

A teljes duál megengedett bázis indexhalmaz megtalálásához szükség van még a $K_1 \subset \{0, \ldots, 5\}$ *és* $K_2 \subset \{1, \ldots, 6\}$ *halmazokra. Legyen* $K_1 = \{0, 1, 2\}$, *amely min struktúrát követ, és* $K_2 = \{1, 2, 6\}$, *amely max struktúrát követ.*

Alább egy példa következik felső korlátot szolgáltató duál megengedett bázis megtalálására. Futtassuk le a Maximum algoritmust.

0. Lépés $t = 0$, $q_1 = -1$, $L = \emptyset$, $U = \{9, 8, 7, 6\}$, $V^0 = \{9, 8, 7, 6\}$, $|U|$ *páros, így* $h^0 = 9$, $l^0 = 0$, $u^0 = 8$.

2. Lépés $v^3 \in U$, *ezért* $h^1 = u^0 = 8$, $l^1 = l^0 = 0$, $u^1 = u^0 - 1 = 7$. $t = t + 1 = 1$.

2. Lépés $v^2 \in U$, *ezért* $h^2 = u^1 = 7$, $l^2 = l^1 = 0$, $u^2 = u^1 - 1 = 6$. $t = t + 1 = 2$.

2. Lépés $v^1 \in U$, *ezért* $h^3 = u^2 = 6$, $l^3 = l^2 = 0$, $u^3 = u^2 - 1 = 5$. $t = t + 1 = 3$.

3. Lépés $t = m - 1 = 3$. *Állj.*

Eredményünket a (4.39) formátumban felírva:

$$\begin{matrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & 8 & 7 & 6. \end{matrix}$$

Legyen $K_1 = K_2 = \{0, 1, 5\}$, *amely max struktúrát követ.*

Az összes így kapható duál megengedett bázist megvizsgálva a legjobb alsó korlát **8.0402**, *míg a legjobb felső korlát* **8.1465** *lett.*

Végül, megoldjuk a feladatot a duál algoritmus segítségével is. A fenti bázisok bármelyikét választhatjuk kiinduló bázisnak, és elég csak a módszer második fázisát lefuttatni. Problémánkra a következő eredményeket kaptuk: **8.06605** *az éles alsó korlátra, a 6.(a) ábrán szereplő bázis esetén;* **8.1256** *az éles felső korlátra, a 6.(b) ábrán szereplő bázis esetén.*

5.2. Példa. *Tekintsük az alábbi függvényt:*

$$f(z_1, z_2) = e^{\frac{z_1}{20} + \frac{z_1 z_2}{200} + \frac{z_1}{5}}, \tag{5.2}$$

9	○	○	○	○	○	○	∗	∗	∗	∗
8	○	○	○	○	○	○	○	∗	∗	∗
7	○	○	○	○	○	○	○	○	∗	∗
6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●
0	●	●	●	○	○	○	∗	∗	∗	∗
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(a)

9	●	●	○	○	○	●	∗	∗	∗	∗
8	○	○	○	○	○	○	∗	∗	∗	∗
7	○	○	○	○	○	○	○	∗	∗	∗
6	○	○	○	○	○	○	○	○	∗	∗
5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●
0	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(b)

5. ábra: $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 9\}$. $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$. Az (a) esetben $K_1 = \{0, 1, 2\}$, $K_2 = \{1, 2, 6\}$, és az ábrázolt bázis duál megengedett az (1.25) minimum feladatra; a (b) esetben $K_1 = K_2 = \{0, 1, 5\}$ és az ábrázolt bázis duál megengedett az (1.25) maximum feladatra. A bázisokat a 4.3. szakasz algoritmusaival kaptuk. Az I_0 index halmazhoz tartozó pontokat $\ast$ jelöli, míg az I_1 és I_2 index halmazokhoz tartozókat $\bullet$.

a $z_1, z_2 \geq 0$ értelmezési tartományon. A függvény összes deriváltja pozitív a nemnegatív ortánsban.

Legyen $Z_1 = \{2, 4, \ldots, 20\}$, $Z_2 = \{0.5, 1, \ldots, 5\}$, $Z = Z_1 \times Z_2$. Az előző példához hasonlóan $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$.

Látható, hogy a függvény kielégíti a 4.1. és 4.3. Tételek feltételeit. Eképpen az 4. ábra bázisai duál megengedettek az (1.25) minimum illetve maximum feladatban. A következő momentumok ismertek:

μ_{ij}	0	1	2	3	4	5	6
0	1	11	154	2420	40532.8	706640	12661792
1	2.75	29.5928	408.6112	6353.312			
2	9.625	102.368	1399.2232				
3	37.8125	398.8574					
4	158.33125						
5	690.078125						
6	3091.25781						

A 4.1. és a 4.3. Tételek összes bázisát megvizsgálva a 4. ábra bázisai szolgáltatták a legjobb becsléseket. Alsó korlátra a **3.857** *értéket, míg felső korlátra a* **4.635** *értéket kaptuk.*

Mindkét korlát javítható a 4.3. szakasz algoritmusai segítségével.

9	○	●	○	○	○	●	○	○	●	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●
7	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5	○	●	○	○	●	●	○	○	○	●
4	○	●	●	○	○	●	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	○	●	○	●	○	○	○	○	○
1	○	●	○	○	●	●	○	○	○	●
0	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(a)

9	○	●	○	●	○	○	○	○	○	●
8	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○
7	○	●	○	●	○	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○	○	○	●	○	●
2	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	○	●	○	○	○	○	○	●	●	●
0	○	○	●	●	○	○	○	○	○	○
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(b)

6. ábra: $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 9\}$, $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$. (a) az (1.25) minimum probléma optimális bázisát mutatja, míg (b) az (1.25) maximum problémáét. Bázisainkat a duál algoritmus szolgáltatta.

Először a minimum feladathoz tartozó duál megengedett bázis megtalálását írjuk le.

0. Lépés $t = 0$, $q_1 = 1$, $L = \{0, 1\}$, $U = \{9, 8\}$, $V^0 = \{0, 9, 1, 8\}$, $|U|$ *páros, ezért* $h^0 = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = 9$.

2. Lépés $v^3 \in U$, *ezért* $h^1 = u^0 = 9$, $l^1 = l^0 = 1$, $u^1 = u^0 - 1 = 8$. $t = t + 1 = 1$.

2. Lépés $v^2 \in L$, *ezért* $h^2 = l^1 = 1$, $l^2 = l^1 + 1 = 2$, $u^2 = u^1 = 8$. $t = t + 1 = 2$.

2. Lépés $v^1 \in U$, *ezért* $h^3 = u^2 = 8$, $l^3 = l^2 = 2$, $u^3 = u^2 - 1 = 7$. $t = t + 1 = 3$.

3. Lépés $t = m - 1 = 3$. *Állj.*

Megvannak a V^0 *és* H^{m-1} *sorozatok. Írjuk fel a* Z_1, Z_2 *rendezett halmazokból vett elemekkel a (4.39) mátrixot:*

$$\begin{matrix} 2 & 20 & 4 & 18 & 0.5 \\ 2 & 20 & 4 & 0.5 & 5 \\ 2 & 20 & 0.5 & 5 & 1 \\ 2 & 0.5 & 5 & 1 & 4.5 \end{matrix}$$

Legyen $K_1 = K_2 = \{2, 5, 6\}$. *A bázist a 7.(a) ábra szemlélteti. A kapott korlát* **3.9122**.

Hajtsuk most végre a felső korlátot szolgáltató algoritmust.

0. Lépés $t = 0$, $q_1 = 2$, $L = \{0, 1, 2\}$, $U = \{9\}$, $V^0 = \{0, 1, 9, 2\}$, $|U|$ *páratlan, ezért* $h^0 = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = 9$.

2. Lépés $v^3 \in L$, *ezért* $h^1 = l^0 = 1$, $l^1 = l^0 + 1 = 2$, $u^1 = u^0 = 9$. $t = t + 1 = 1$.

2. Lépés $v^2 \in U$, *ezért* $h^2 = u^1 = 9$, $l^2 = l^1 = 2$, $u^2 = u^1 - 1 = 8$. $t = t + 1 = 2$.

2. Lépés $v^1 \in L$, *ezért* $h^3 = l^2 = 2$, $l^3 = l^2 + 1 = 3$, $u^3 = u^2 = 8$. $t = t + 1 = 3$.

3. Lépés $t = m - 1 = 3$. *Állj.*

Eredményünket a (4.39) formátumban felírva:

2	4	20	6	0.5
2	4	20	0.5	1
2	4	0.5	1	5
2	0.5	1	5	1.5

Legyen $K_1 = K_2 = \{3, 6, 7\}$. *A bázist a 7.(b) ábra szemlélteti. A kapott korlát* **4.0103**.

A feladatot duál módszerrel megoldva az alábbi eredményeket kapjuk: **3.9489** *az alsó korlátra és* **3.9619** *a felső korlátra.*

5	∗	∗	○	○	○	○	○	○	∗	∗
4.5	∗	○	○	○	○	○	○	○	○	∗
4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3.5	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2.5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1.5	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	∗	∗	○	○	○	○	○	○	○	∗
0.5	∗	∗	•	○	○	•	•	○	∗	∗
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

(a)

5	∗	∗	○	○	○	○	○	○	○	∗
4.5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3.5	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2.5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	•	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1.5	∗	∗	○	○	○	○	○	○	○	○
1	∗	∗	∗	○	○	○	○	○	○	∗
0.5	∗	∗	∗	•	○	○	•	•	○	∗
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

(b)

7. ábra: $Z_1 = \{2, 4, \ldots, 20\}$, $Z_2 = \{0.5, 1, \ldots, 5\}$. $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$. Az (a) esetben $K_1 = K_2 = \{2, 5, 6\}$, és a pontok az (1.25) minimum feladat egy duál megengedett bázisát mutatják. A (b) esetben $K_1 = K_2 = \{3, 6, 7\}$ és a pontok az (1.25) maximum feladat egy duál megengedett bázisát mutatják. Az I_0 index halmazhoz tartozó pontokat $*$ jelöli, míg az I_1 és I_2 index halmazokhoz tartozókat $\bullet$.

A következő három példában csak a 4.3. szakaszbeli Minimum és Maximum algoritmusok által szolgáltatott legjobb korlátokat adjuk meg.

5.3. Példa. *A feladat Prékopa, Vizvári and Regős [17] cikkéből származik. Tekintsünk* 40 *eseményt, két* 20 *elemű csoportba osztva; az* X_j *valószínűségi változó a* j*-edik csoportban bekövetkezett események száma,* $j = 1, 2$, $Z_1 \times Z_2 = \{0, \ldots, 20\} \times \{0, \ldots, 20\}$.

Korlátot keresünk annak a valószínűségére, hogy a 40 esemény közül legalább egy bekövetkezik, i.e.,

$$P(X_1 + X_2 \geq 1) = E[f(X_1, X_2)],$$

ahol

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & \textit{if } (z_1, z_2) = (0, 0) \\ 1, & \textit{különben.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Prékopa [15] cikkében megmutatta, hogy ha $m+1$ páros (páratlan), akkor (5.3) összes $m+$ $+1$ rendű osztott differenciája nempozitív (nemnegatív). Tegyük fel, hogy az alábbi (kereszt) binomiális momentumok ismertek:

1. *csoport*	2. *csoport* 0	1	2	3	4	5	6
0	1.00	1.93	4.70	12.19	41.05	127.37	317.72
1	6.23	3.28	31.15	186.89	794.26	2541.64	
2	46.04	31.15	295.90	1775.41	7545.49		
3	216.09	186.89	1775.41	10652.46			
4	724.30	794.26	7545.49				
5	1848.66	2541.64					
6	3739.79.						

Alkalmazva a 4.3. szakasz algoritmusait az (1.30) feladatra, a következő eredményeket kapjuk:

m	m_1	m_2	*alsó korlát*	*felső korlát*
4	4	4	0.54074	1
4	6	6	0.78259	0.81423
6	6	6	0.64435	1

A legjobb korlátokat a második esetben kaptuk, amikor is $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$, annak ellenére, hogy a harmadik esetben több momentumot vettünk figyelembe. A jelenség azzal magyarázható, hogy a második esetben van némi szabadságunk (az (4.1) struktúrán belül) a K_1, K_2 halmazok megválasztásában.

Prékopa, Vizvári and Regős [17] cikkében a minimum feladat optimális célfüggvény értéke **0.80325**, *míg a maximum feladaté* **0.80410** *az $m = m_1 = m_2 = 6$ esetben. Eredményeiket a duál módszer végrehajtásával nyerték.*

Az alábbi példában korlátokat keresünk abban az esetben, ha az X_j, $j = 1, 2$ valószínűségi változók várható értéke, szórása, ferdesége és csúcsossága illetve kovarianciájuk ismert, i.e., adott az első négy momentum illetve a $Cov(X_1, X_2)$ kovariancia.

5.4. Példa. *Tekintsük a (5.1) hasznossági függvényt. Legyen* $\alpha = \beta = 1$, $a = b = 0$ *és* $Z_1 = Z_2 = \{1, \ldots, 10\}$.

1. eset

Feltesszük, hogy a μ_{11} *vegyes momentumon kívül, a következő tiszta momentumok ismertek:* ($\mu_{00} = 1$), $\mu_{10} = \mu_{01} = 11/2$, $\mu_{20} = \mu_{02} = 33/2$, $\mu_{30} = \mu_{03} = 33$, $\mu_{40} = \mu_{04} = 231/5$.

A kapott eredményeket az alábbiakban soroljuk fel. Az "alsó korlát" és "felső korlát" oszlopok a 4.3. szakasz Minimum és Maximum algoritmusaival kapott értékeket, míg a "min" és "max" oszlopok a duál algoritmus által szolgáltatott eredményeket tartalmazzák.

μ_{11}	*alsó korlát*	*felső korlát*	*min*	*max*
30.25	10.77220	10.89995	10.7761	10.89184
35	10.77218	10.89995	10.77590	10.88837
25	10.77224	10.89995	10.8224	10.89191

Megjegyzés: Az első sorban $\mu_{11} = 30.25 = (11/2)^2 = \mu_{01}\mu_{10}$, *tehát a két valószínűségi változó korrelálatlan.*

2. eset

Most azt tesszük fel, hogy ($\mu_{00} = 1$), $\mu_{10} = \mu_{01} = 2615937/625000$, $\mu_{20} = \mu_{02} = 5435467/500000$, $\mu_{30} = \mu_{03} = 108634563/5000000$, $\mu_{40} = \mu_{04} = 162205043/5000000$, $\mu_{11} = 2615937/625000$.

A következő eredményeket kapjuk:

alsó korlát	*felső korlát*	*min*	*max*
8.00326	8.1915	8.05739	8.1590

5.5. Példa. *Végül, tekintsük az alábbi függvényt:*

$$f(z_1, z_2) = e^{\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10} + \frac{z_1 z_2}{200}},$$

a $Z_1 \times Z_2 = \{0, \ldots, 20\} \times \{0, \ldots, 20\}$ *tartón. A következő hatvány momentumok ismertek:*

μ_{ij}	0	1	2	3	4	5	6
0	1.00	6.23	98.31	1579.01	25813.23	429472.13	7269694.11
1	1.93	3.28	65.58	1311.52	26229.7	524590	
2	11.33	65.58	1311.48	26229.5	524590		
3	103.27	1311.52	26229.5	524590			
4	1491.77	26229.7	524590				
5	27107.8	524590					
6	528938						

Eredményeink az alábbiak:

m	m_1	m_2	*alsó korlát*	*felső korlát*
3	6	6	6.000222	6.004789
4	6	6	6.003941	6.00455.

5.2. Egy többváltozós hasznossági függvény

Tekintsük a (5.1) kétváltozós függvény, az alábbiakban felírt, többváltozós általánosítását:

$$u(z_1, \ldots, z_s) = log\left[k(e^{\alpha_1 z_1 + a_1} - 1) \cdots (e^{\alpha_s z_s + a_s} - 1) - 1\right], \tag{5.4}$$

ahol $k \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ pozitív, $a_1, \ldots, a_s$ pedig nemnegatív állandók, a függvény értelmezési tartománya pedig a

$$D = \left\{(z_1, \ldots, z_s) | e^{\alpha_i z_i + a_i} > 2, \ i = 1, \ldots, s\right\} \tag{5.5}$$

halmaz.

Nyilvánvaló, hogy az $u(z_1, \ldots, z_s)$ függvény az értelmezési tartományában mindegyik változója szerint (mint egyváltozós függvény) szigorúan növekvő. Nem nyilvánvaló, de igaz az az állítás is, hogy az (5.4) függvény az értelmezési tartományában konkáv. Ugyancsak igaz az alábbi

5.1. Tétel. *Minden $z \in D$ esetén fennáll, hogy*

$$\frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_s} u}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_s^{i_s}} > 0, \ \textit{ha } i_1 + \cdots + i_s \textit{ páratlan,}$$

illetve

$$\frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_s} u}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_s^{i_s}} < 0, \ \textit{ha } i_1 + \cdots + i_s \textit{ páros.}$$

A konkávitás illetve a tétel bizonyítása Nagy és Prékopa [9] cikkében található.

A fentiek egyrészt azt jelentik, hogy a (5.4) függvény teljesíti a hasznossági függvényekre jellemző tulajdonságokat, másrészt pedig a 5.1. Tétel szerint a függvény véges diszkrét halmazok Descartes szorzatára való megszorításai megfelelnek a 4.1. és a 4.3. Tételekben szereplő feltételeknek.

Az alábbiakban numerikus korlátokat mutatunk be az $u(X_1, X_2, X_3)$ várható értékére, ahol X_1, X_2, X_3 diszkrét valószínűségi változók. A vizsgálandó célfüggvény illetve a hozzá tartozó értelmezési tartomány (egyben az (X_1, X_2, X_3) véletlen vektor tartója) a következő:

$$\begin{gathered} u(z_1, z_2, z_3) = log\left[(e^{\alpha_1 z_1 + a_1} - 1)(e^{\alpha_2 z_2 + a_2} - 1)(e^{\alpha_3 z_3 + a_3} - 1) - 1\right] \\ (z_1, z_2, z_3) \in Z, \end{gathered} \tag{5.6}$$

ahol

$$Z = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).$$

Tegyük fel, hogy $e^{\alpha_j z_j + a_j} > 2, \ j = 1, 2, 3, \ (z_1, z_2, z_3) \in Z$ esetén.

Tekintve a 4.1. és a 4.3. Tételeket, adott m, m_j, $j = 1, 2, 3$, páros számok esetén a (5.6) függvénnyel vett TDMP problémák közül mind a maximum mind a minimum feladathoz találhatóak duál megengedett bázisok. Ezt kihasználva, a következő konkrét példák megoldásában elég csak a duál algoritmus második fázisát lefuttatni, (például) az alábbi kiinduló bázisokkal. Minimum feladat esetén az

$$\{(i_1, i_2, i_3) | i_1 + i_2 + i_3 \leq m \text{ vagy } i_k = 0, k \neq j, m \leq i_j \leq m_j, j = 1, \ldots, s\} \tag{5.7}$$

változókhoz tartozó oszlopokkal, míg maximum feladat esetén az

$$\begin{gathered}\{(i_1, i_2, i_3) | i_1 + i_2 + i_3 \geq 27 - m \text{ vagy } i_k = 9, k \neq j, 9 - m \geq i_j \geq 9 - m_j, \\ j = 1, \ldots, s\}\end{gathered} \tag{5.8}$$

változókhoz tartozó oszlopokkal.

5.6. Példa. *Tekintsük a (5.6) függvényt az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ esetre. Korlátozó feltételeink jobb oldalán pedig álljanak a Z_I tartójú egyenletes eloszlás megfelelő momentumai.*

Ha a vegyes momentumok közül csak a kovarianciákat vesszük figyelembe, akkor a tiszta momentumok maximális rendjétől függően a következő eredményeket kapjuk:

1. táblázat:

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
2	2	2	2	16.083862403	93	16.439400518	69
2	4	4	4	16.236742070	124	16.337970820	128
2	6	6	6	16.265375750	211	16.297838921	123
2	8	8	8	16.272378408	309	16.294804990	294

Tekintve a fentieket, látható, hogy a függvény várható értékére kapott alsó illetve felső korlátok, a peremeloszlások egyre több momentumának figyelembe vételével, egyre közelebb kerülnek egymáshoz, az utolsó két esetben már három jegy pontossággal becsülve a célfüggvényt. Kicsit pontosabban vizsgálva az eredményeket az is kiderül, hogy az utolsó esetben a minimum és maximum értékek relatív eltérése kisebb mint 2 ezrelék.

Ha a megfelelő tiszta momentumok mellett az összes, legfeljebb 4 rendű vegyes momentumot szerepeltetjük a korlátozó feltételek között, akkor a 2. táblázat eredményeit kapjuk.

Összehasonlítva a két táblázatot a következő tanulságokat szűrhetjük le. Egyrészt, mint az várható volt, a második esetben pontosabb eredményeket kaptunk. Az utolsó sor esetén a relatív eltérés kevesebb mint 4 tízezrelék.

Másrészt viszont ennek a pontosságnak ára van. A táblázatokban az eredmények mellett szerepel, hogy a CPLEX program hány lépésben jut el az optimális megoldásig. Láthatjuk,

2. táblázat:

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
4	4	4	4	16.256237098	331	16.337929898	364
4	6	6	6	16.284878189	466	16.297815868	686
4	8	8	8	16.288316597	802	16.294784936	669

hogy hasonló pontosság (pl. három számjegy) eléréséhez az 1. táblázatban jóval kevesebb lépésre volt szükség. Ha emellett még azt is figyelembe vesszük, hogy a 2. táblázat esetén jóval több sorral (és így persze nagyobb mátrixszal) számolunk, akkor máris vonzóbbnak tűnik újabb tiszta momentumok figyelembe vétele a becslés javítására, mintsem a momentumok teljes rendjének növelése.

Természetesen, bizonyos határon túl, mikor már a pontosság tiszta momentumok figyelembe vételével már nem, vagy csak elhanyagolható mértékben javítható, szükség lehet magasabb rendű momentumok figyelembe vételére. Általánosságban annyit mondhatunk, hogy ajánlott először a tiszta momentumokban rejlő lehetőségeket kiaknázni, és csak utána ugrani egy nagyságrendet a vegyes momentumok teljes rendjével.

A fenti példában mind az u függvény, mind a momentumok generálására használt eloszlás szimmetrikus volt. Érdemes egy általánosabb példát is megvizsgálni, egyrészt abból a szempontból hogy a kapott becslések lesznek-e olyan pontosak mint a 5.6 példában, másrészt hogy az eddig leírt következtetéseket más példával is alátámaszthassuk.

A következő feladat korlátozó momentumait előállító eloszlás egyrészt aszimmetrikus lesz, másrészt, az előző példától eltérően, peremeloszlásai sem lesznek függetlenek egymástól. Az (5.6) függvény paramétereinek is új értéket adunk. Megjegyezzük, hogy ezen paraméterek változtatása lényegében ekvivalens az 5.6 példában szereplő u függvény Z értelmezési tartományának eltolásával (ha az a_j tagokat tekintjük) illetve nyújtásával (ha az α_j tényezőket vesszük figyelembe).

5.7. Példa. *Tekintsük a következő, Poisson eloszlású, valószínűségi változókat,* X, Y_1, Y_2, Y_3, *rendre a következő* λ *paraméterekkel,* $1, 2, 2.5, 3$. *Korlátozó feltételeink jobb oldalára az alábbi valószínűségi vektorváltozó megfelelő momentumai kerülnek:*

$$(min\,(X+Y_1,9)\,, min\,(X+Y_2,9)\,, min\,(X+Y_3,9))\,.$$

Az u *függvény, melynek várható értékét becsülni fogjuk, legyen a (5.6) függvény az alábbi paraméterekkel:*

$$\alpha_1 = 1.75,\ \alpha_2 = 1.25,\ \alpha_3 = 0.75,\ a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_1 = 1.$$

Ha a vegyes momentumok közül csak a kovarianciákat vesszük figyelembe, akkor a 3. táblázat eredményeit kapjuk, míg az $m = 4$ *esethez tartozó becsléseket a 4. táblázat tartalmazza.*

3. táblázat:

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
2	2	2	2	18.466954935	62	18.572924791	46
2	4	4	4	18.532630264	111	18.550298509	126
2	6	6	6	18.541879509	178	18.544391959	148
2	8	8	8	18.543136443	263	18.543344110	191

4. táblázat:

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
4	4	4	4	18.532852070	254	18.550297658	325
4	6	6	6	18.541926465	742	18.544391052	658
4	8	8	8	18.543148260	542	18.543343503	736

Megvizsgálva a fenti adatokat, az összes legfeljebb 8 rendű tiszta momentumot tekintve, az alsó illetve felső becslés közti relatív eltérés mind kovariancia, mind a legfeljebb negyedrendű vegyes momentumok esetén kisebb mint $2 \cdot 10^{-5}$*, ami a 5.6. példánál jobb eredmény. A most kapott lépésszámok és pontosságok összevetése pedig alátámasztja az előző példa következtetéseit.*

Tanulságok, további kutatási irányok

Befejezésül, érdemes áttekinteni egyrészt mégegyszer, hogy milyen eredmények, módszerek állnak rendelkezésünkre a TDMP területén, támaszkodva a dolgozatban szereplő eredményekre. Másrészt szót kell ejtenünk arról is, hogy mely alapvető kérdések maradtak megválaszolatlanul. Megemlítjük még az ezek megoldására felmerült, egyelőre kidolgozatlan ötleteket, melyek egyúttal tükrözik a szerző gondolkodását, véleményét a további kutatások irányairól, módszereiről.

Az elért konkrét eredményeket a dolgozat 4. Fejezete tartalmazza, melynek alapját a 3. Fejezet tétele adja, alkalmazhatóságát az 5. Fejezet mutatja. Disszertációnk analízálásához érdemes a 4. Fejezet pontjain keresztül haladni.

A 4.1. szakaszban szerepelő duál megengedett bázisstruktúrák jellemzője, hogy bármennyi dimenziós feladat esetén alkalmazhatóak, azonban sajnos nemhogy nem találtuk meg az összes duál megengedett struktúrát, szemben az egyváltozós esettel, hanem általában a struktúrák számossága általában szoros korlátok megadására sem elégséges. Az itt felsorolt tételeknek, elméleti jelentőségükön túl, fontos alkalmazási területe a kezdeti bázisok legyártása a duál algoritmus második fázisához.

A struktúrák számosságának növelésére több kiút is lehetségesnek tűnik. Egyrészt érdemesnek tűnik egy olyan TDMP feladat kitűzése, melyben a momentumok rendszere lehetővé teszi a 4.3. szakaszhoz hasonló algoritmusok kidolgozását, ezáltal jóval nagyobb számosságú struktúrarendszer megadását, mely már alkalmas lenne szoros korlátok megadására. Másrészt érdekes kérdés, hogy lehetséges-e csak a függvény osztott differenciáira tett feltételek alapján az összes duál megengedett bázis megtalálása, és ha nem, akkor milyen (további) tulajdonságokat kellene a függvénytől megkövetelnünk. Azt, hogy valószínűleg a csak az osztott differenciákra vonatkozó feltételek nem lesznek elegendőek, az a tény is sugallja, hogy míg az egyváltozós esetben (ahol ismert az összes duál megengedett bázisstruktúra) az osztott differencia szoros összefüggésben van a függvény konvexitási tulajdonságaival, addig a többváltozós esetben, mint azt a (2.4) függvénye is mutatja, csak a tengelyek mentén biztosított ez a kapcsolat.

A 4.2. szakasz eljárása jelen formájában inkább csak elméleti jelentőséggel bír, tekintve a 4.1. szakasz által adott szűkös lehetőségeket. Könnyen látható viszont, hogy a leírt módszer analóg módon alkalmazható a 4.3. szakasz bázisstruktúrái esetében is, lehetőséget adva annak gyakorlati alkalmazására. Annak, hogy a dolgozatban csak a 4.1. szakasz struktúrájára vonatkoztatva dolgoztuk ki az eljárást, két fő oka van. Egyrészt a módszer lényege ezen belül is megfogható, másrészt így egy egyszerűbb, jobban érthető eljáráshoz jutottunk, amely emellett alkalmazások szerint könnyen általánosítható.

A 4.3. szakasz eredményei széleskörű gyakorlati alkalmazhatóságot tesznek lehetővé, mint ezt az 5.1. szakasz példái is alátámasztják. Annak ellenére, hogy itt a kétváltozós esetben, nagy számosságú duál megengedett struktúrát találtunk, erre is vonatkozik, a 4.1. szakasznál már említett kritika, mely szerint az összes megengedett duál bázis itt sem ismert.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy ugyan dolgozatunk, az egyváltozós esettel ellentétben, nem tárta fel a duál megengedett bázisok teljes rendszerét, de viszont egy, az eddigieknél általánosabb, jobban alkalmazható feladatra a duál megengedett bázisok eddigieknél jóval bővebb halmazát tárta fel (különösen a kétváltozós esetben). Így, és ezt az 5. Fejezet eredményei is alátámasztják, jelentősen közelebb kerültünk a TDMP problémák kezeléséhez, megoldásához.

Köszönetnyilvánítás

Először is, szeretnék köszönetet mondani Prékopa Andrásnak a témavezetésért, beleértve mind a számomra igen érdekes téma kiválasztásában, mind annak kidolgozásában nyújtott segítségét.

Ugyancsak köszönettel tartozom Vizvári Bélának, akinek a matematikus szakon harmadévben tartott kurzusa irányította rá figyelmemet az operációkutatás témakörére, és akitől a sávelőadások folyamán a lineáris és egészértékű programozás alapjait elsajátítottam.

Köszönettel tartozom még mind az ELTE Operációkutatási Tanszék, mind a BME Differenciálegyenletek Tanszék munkatársainak, külön köszönet Szántai Tamásnak és Garay Barnának tudományos pályám alakításában nyújtott segítségükért, tanácsaikért.

Köszönet jár még az Eberhard Karls Universität Tübingen Funkcionálanalízis Tanszékének, illetve vezetőjének Prof. Rainer Nagelnek, akik a doktori értekezés megírásához szükséges hátteret biztosították.

Az anyagi támogatásért a Tempus és a DAAD ösztöndíjbizottságokat illeti köszönet.

Végezetül hálás vagyok családomnak és barátnőmnek, akik mindvégig támogattak célom elérésében és türelemmel viseltettek irántam.

Összefoglaló a 'Többváltozós diszkrét momentum problémák' című doktori értekezéshez

Nagy Gergely

Témavezető: Prékopa András

A diszkrét momentum probléma (DMP) célja, egy diszkrét (általában véges) tartójú, ismeretlen valószínűségi eloszláson definiált lineáris funkcionál maximumának illetve minimumának megtalálása, bizonyos momentumok ismeretében. Tekinthetünk binomiális, hatvány vagy általánosabb típusú momentumokat. A többváltozós diszkrét momentum probléma (TDMP) bevezetése Prékopa nevéhez fűződik, aki egyrészt kidolgozta DMP illetve TDMP problémák lineáris programozási elméletét, másrészt bizonyos, a célfüggvény együtthatók osztott differenciáira tett, feltételek mellett módszereket adott azok megoldására. Legfontosabb eredményei a duál megengedett bázisok struktúráival kapcsolatosak.

A doktori értekezésben további, a TDMP területén született, eredményeket mutatunk be, mind a hatvány, mind a binomiális momentumok esetére. A 3. Fejezet tétele illetve annak 4. fejezetbeli alkalmazásai lehetőséget adnak duál megengedett bázisok megadására, feltételezve, hogy a célfüggvény együtthatók függvényének adott teljes rendű osztott differenciái illetve néhány további, csak egy változó szerinti, osztott differenciája nemnegatív. Egy duál megengedett bázis alsó vagy felső korlátot szolgáltat mind a célfüggvény együtthatóiból képzett diszkrét függvényre, mind magára a lineáris funkcionálra. Az utóbbira kapott korlát éles, ha a bázis egyben duál megengedett is.

Tekintve a 4. Fejezetet, az első szakasz a duál megengedett bázisok struktúrájáról szóló tételeket tartalmaz, melyek általánosításai az eddigi eredményeknek. A következő szakasz egy dekompozíciós eljárást mutat be az említett struktúrákon belüli legjobb korlát megtalálására. A harmadik szakaszban található algoritmusok segítségével további, jóval nagyobb számosságú duál megengedett struktúra található a kétváltozós esetre.

Végül az utolsó fejezetben numerikus példákat mutatunk be, mind véletlen vektorok függvényei várható értékének, mind eseménysorozatok Boole függvényeinek korlátokon keresztüli becslésére.

Summary of Ph.D. dissertation entitled 'Többváltozós diszkrét momentum problémák' ('Multivariate Discrete Moment Problems')

Gergely Nagy

Supervisor: András Prékopa

The discrete moment problem (DMP) has been formulated as a methodology to find the minimum and/or maximum of a linear functional acting on an unknown probability distribution, the support of which is a known discrete (usually finite) set, where some of the moments are known. The moments may be binomial, power or of more general type. The multivariate discrete moment problem (MDMP) has been initiated by Prékopa who developed a linear programming theory and methodology for the solution of the DMP's and MDMP's under some assumptions, that concern the divided differences of the coefficients of the objective function. The central results in this respect are there that concern the structure of the dual feasible bases.

In the Ph.D. dissertation further results are presented in connection with MDMP's for the case of power and binomial moments. The theorem in Section 3 and its applications in Section 4 help us to find dual feasible bases under the assumption that the objective coefficient function has nonnegative divided differences of a given total order and further nonnegative divided differences related to each variable. Any dual feasible basis provides us with a bound for the discrete function that consists of the coefficients of the objective function and also for the linear functional. The latter bound is sharp if the basis is primal feasible as well.

Detailing Section 4, the first subsection contains generalizations of the former theorems concerning dual feasible basis structures. In the following subsection, there is a decomposition method to find the best bound among these dual feasible bases. The last subsection shows algorithms providing much larger variety of dual feasible structures in the bivariate case.

Finally, in the last section numerical examples are presented for bounding the expectations of functions of random vectors as well as probabilities of Boolean functions of event sequences.

Irodalom

[1] Bowers Jr., N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt (1997).*Actuarial Mathematics*, 2nd edition, The Society of Actuaries, Ithaca, Ill.

[2] Horn, R.A. and C.R. Johnson (1991). *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, New York.

[3] Jordan, C. (1947). *Calculus of Finite Differences.* Chelsea Publishing Company, New York.

[4] Karlin, S. and W.J. Studden (1966). *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics.* Interscience, New York.

[5] Krein, M. and A. Nudelman (1977). The Markov Moment Problem and Extremal Problems. In *Translations of Mathematical Monographs* **50**, American Mathematical Society, Providence, RI.

[6] Lemke, C. E. (1954). The Dual Method for Solving the Linear Programming Problem. *Naval Research Logistics Quarterly* **1**, 36–47.

[7] Nagy, G. and A. Prékopa (2000). On Multivariate Discrete Moment Problems and their Applications to Bounding Expectations and Probabilities. *RUTCOR Research Report* 41-2000.

[8] Nagy G. és Prékopa A. (2000). Többváltozós diszkrét függvények féloldalas approximációja polinomokkal. *Alkalmazott Matematikai Lapok* **20**, 195-215.

[9] Nagy G. és Prékopa A. (2001). Egy többváltozós hasznossági függvény. *Alkalmazott Matematikai Lapok* **21**, közlésre elfogadva.

[10] Popoviciu, T. (1944). Les Fonctions Convexes. *Actualités Scientifiques et Industrielles* **992**, Hermann, Paris.

[11] A. Prékopa (1995). *Stochastic Programming.* Akadémia Kiadó, Budapest.

[12] Prékopa, A. (1990). The Discrete Moment Problem and Linear Programming. *Discrete Applied Mathematics* **27**, 235-254.

[13] Prékopa, A. (1992). Inequalities on Expectations Based on the Knowledge of Multivariate Moments. In: *Stochastic Inequalities* (M. Shaked and Y.L. Tong, eds.), Institute of Mathematical Statistics, Lecture Notes — Monograph Series, Vol 22, 309–331.

[14] Prékopa, A. (1996). A Brief Introduction to Linear Programming. *The Mathematical Scientist* **21**, 85-111.

[15] Prékopa, A. (1998). Bounds on Probabilities and Expectations Using Multivariate Moments of Discrete Distributions. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **34**, 349-378.

[16] Prékopa, A. (2000). *On Multivariate Discrete Higher Order Convex Functions and their Applications.* RUTCOR Research Report 39-2000. Also in: Proceedings of the Sixth International Conference on Generalized Convexity and Monotonicity, Karlovasi, Samos, Greece, August 29 - September 2, to appear.

[17] Prékopa, A., Vizvári, B. and Regős, G. (1997). Lower and Upper Bounds on Probabilities of Boolean Function of Events, *RUTCOR Research Report* 21-97.

[18] Riordan, J. (1968). *Combinatorial Identities.* Wiley, New York.

[19] Samuels, S. M., and W. J. Studden (1989). Bonferroni-Type Probability Bounds as an Application of the Theory of Tchebycheff System. *Probability, Statistics and Mathematics, Papers in Honor of Samuel Karlin.* Academic Press, 271-289.

Függelék:

a numerikus számításokhoz használt programkódok