Kvadratikus programozás alkalmazása a portfólió problémára

Nagy Gergely

Tartalomjegyzék

Előszó

A dolgozatban a közgazdaságtan egy pénzügyi területéről, a portfólió problémáról lesz szó. A probléma lényege úgy foglalható össze, hogy van egy befektetőnk, aki értékpapírokból egy olyan portfóliót (értékpapírok egy csoportját) akar összeállítani, amely kívánalmainak legjobban megfelel. Ezen probléma megoldásához általában a matematikai modellezés eszközeit veszik segítségül. A modellezés a szokásos módon történik, a változók definiálása után egyrészt felírnak egy célfüggvényt, amely a befektető kívánalmainak való megfelelést reprezentálja, másrészt pedig korlátozó feltételeket, amelyek például a befektető által megkívánt kritériumokból, a befektető korlátos tőkéjéből, a portfólió kiválasztás költségeiből adódnak. A portfólió probléma pénzügyi modelljei ma már szinte a matematikai modellezés összes részterületére kiterjednek. Léteznek lineáris programozási, kvadratikus programozási, sztochasztikus programozási, és ezenkívül számos más egyéb nem lineáris programozási modellek is. Az 1. fejezet, a portfólió probléma pontosabb leírása mellett ezekbe a modellekbe ad némi betekintést.

A dolgozatban, a továbbiakban, elsősorban a kvadratikus programozási modellekről (ezek felállításáról illetve megoldási módozatairól) lesz szó. A kvadratikus programozás, a portfólió elmélet egyik "legősibb" matematikai eszköze, a portfólió probléma kezelésénél a mai napig meghatározó szerepet játszik.

A portfólió elmélet "születését" Harry Markowitz 1952-ben megjelent cikkétől [28] szokás számítani. A cikk azon a feltételezésen alapult, hogy egy befektető minél nagyobb várható hozamú, de minél kisebb hozamszórású portfólióra vágyik. Markowitz megmutatta, hogyan csökkentheti a befektető a portfólió hozamának szórását, olyan részvények kiválasztásával, amelyek hozamai nem mozognak teljesen együtt, és ebből kiindulva kidolgozta a portfóliók kialakításainak alapelveit is, amely egy kvadratikus problémával volt felírható. A 2. fejezetben ennek a problémának illetve egy variánsának különféle alakjairól és az őket megoldó Markowitz-féle algoritmusról lesz szó.

Markowitz eredeti cikkében feltette, néhány későbbi írásában pedig statisztikai elemzésekkel próbálta bizonyítani, hogy a befektetőnek a maximális várható hozamú és minimális szórású portfóliók közül érdemes választania. A 3. fejezetben egyrészt utalunk Markowitz ezen későbbi írásaira, másrészt pedig leírjuk Kingnek a Markowitz-féle modellel szemben tett kritikai észrevételeit, illetve a King által ajánlott, a valóságot bizonyos szempontból jobban tükröző, alternatív modelleket.

A 4. fejezet a manapság gyakran alkalmazott belső pontos módszerek közül mutat be egy olyan algoritmust, amely hatékonyan old meg különféle portfólió optimalizálási feladatokat.

Az 5. fejezet a Markowitz-féle értelemben hatékony portfóliókban ténylegesen szereplő értékpapírok számáról mond ki két elméleti tételt, majd a fejezet második felében az ezzel kapcsolatos, a fejezet alapjául szolgáló cikk szerzői által Japánban szerzett, gyakorlati tapasztalatokról lesz szó. A fejezet témája pénzügyi elméletek (pl.CAPM) szempontjából nagy jelentőséggel bír.

Végül az utolsó fejezetben azt mutatjuk meg, hogy "milyen eredményeket produkál a gyakorlatban az elmélet". Pontosabban arról lesz szó, hogy azok a manapság használt módszerek, amelyek kvadratikus programozási modelleket is használnak, milyen eredményeket produkálnak a Tokiói Értéktőzsdén.

1. A portfólió probléma és modelljei

1.1. A portfólió probléma

A probléma tárgya a *portfólió*, mely fogalom alatt pénzügyi eszközök egy halmazát szokás érteni. A dolgozatban a portfólió alatt általában ennél szűkebb halmazt, *értékpapírok egy csoportját* fogjuk érteni, és külön fogunk szólni róla, ha egyéb származtatott pénzügyi eszközt (pl. opciót) is megengedünk elemeként. Maga a *portfólió kiválasztási probléma* a következőképpen szól: adva van értékpapírok egy halmaza (pl. tőzsdén szereplő részvények) és adva van bizonyos mennyiségű tőke, melyből megvásárolhatjuk az értékpapírokat. Feladatunk az, hogy megadjuk az adott papírokból előállítható portfóliók közül a hatékonyakat. A megadott feltételek mellett (értékpapír halmaz, tőkekorlát) előállítható portfóliók közül azokat nevezzük *hatékony*nak, melyekre a következők teljesülnek:

1. nem állítható elő a porfolióénál nem kisebb várható hozamú, de kisebb kockázatú portfólió,

2. nem állítható elő a porfolióénál nem nagyobb kockázatú, de nagyobb várható hozamú portfólió.

A hatékony portfóliók definíciójából látszik, hogy keresésüknek akkor van igazán jelentősége, ha a választható értékpapírok között található olyan is, melynek jövőbeli hozama véletlenszerű. Ha mindegyik papír hozama egyértelmű, akkor a legnagyobb hozamú értékpapírból vagy értékpapírokból előállított portfóliók lennének hatékonyak. A *portfólió várható hozamán* tudjuk mit értsünk (a benne lévő értékpapírok várható hozamának súlyozott átlagát), de a *portfólió kockázatának* mérése már kevésbé egyértelmű. Mint a későbbiekben látni fogjuk, a kockázat mérésére több módszer is létezik, ezek közül az egyik legkézenfekvőbb és leginkább használt a portfólió hozamának varianciája.

A valóság és a portfólió probléma kapcsolatáról ebben a szakaszban csak annyit érdemes megemlíteni, hogy bár a racionális befektető igyekszik minél nagyobb hozamú és minél kisebb kockázatú portfóliók közül választani, tehát ténylegesen a hatékony portfóliók közül választja ki a számára legmegfelelőbbet, mégis a valósághű modellezés a kockázat megfelelő mérésének nehézségei miatt elég problematikus. Erről a problémáról a 3. fejezetben bővebben szólunk.

Végül még arról, hogy a portfólió problémát miért így hívjuk, és miért nem pl. "értékpapír összeválogatási problémának". Annak, hogy a problémát magáról a portfólióról nevezték el, az az oka, hogy egy hatékony portfóliónál nemcsak az egyes értékpapírok tulajdonságai (pl. hozam, szórás), hanem a köztük lévő kapcsolat (pl. korreláció) is szerepet játszik.

1.2. A probléma modellezése

A portfólió problémával foglalkozó első cikket Harry Markowitz publikálta 1952- ben. Később, 1959-ben –miután a témakört bővebben kidolgozta– jelentette meg "Portfolio

Selection: Efficient Diversification of Investment” című könyvét [30], mely ma is a témakör egyik klasszikus alapművének számít.

Mint ahogy már az előző alfejezetben is szerepelt, azokat a portfóliókat, melyek egy adott várható hozam mellett minimalizálják a kockázatot, illetve adott kockázat mellett maximalizálják a várható hozamot *hatékony portfóliók*nak nevezzük. A hatékony portfóliók halmazát *hatékony határgörbé*nek hívjuk.

Markowitz modelljében a kockázatot a portfólió hozamának varianciájával mérte, és így magára a problémára egy kvadratikus programozási feladatot kapott, melynek rövid leírását adjuk meg a következőkben.

A j-edik értékpapír hozamát jelölje a ξ_j valószínűségi változó, x_j pedig jelentse azt a pénzmennyiséget, amennyit az értékpapírba fektetünk, $j = 1, \ldots, n$. Jelölje M az értékpapírokba fektethető tőkénket. Ezek után már ki tudjuk számolni a teljes várható hozamot, melynek értéke $E\left(\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x}$, ahol

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \\
\boldsymbol{\mu} &= (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \\
\boldsymbol{x} &= (x_1, \ldots, x_n)^T \\
\mu_i &= E(\xi_i), \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Jejölje C a $\boldsymbol{\xi}$ kovariancia mátrixát, tehát

$$C = (c_{ij}), \quad C = E\left[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T\right].$$

Ebből a hozam varianciája:

$$\begin{aligned}
Var\left(\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{x}\right) &= E\left\{\left[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{x}\right]^2\right\} \\
E\left[\boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{x}\right] &= \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Az optimális portfólió kiválasztási probléma a következő kvadratikus programozási feladatként írható fel:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} \\
\text{tekintve a} \quad & \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq \rho M \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = M \\
& 0 \leq x_j \leq u_j, \ j = 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{1}$$

megszorításokat, ahol u_j, $j = 1, \ldots, n$ előírt felső korlátok.

Ha a ρ paramétert –amely a befektető által elvárt hozamot jelöli– egy bizonyos intervallumon belül választjuk meg, (lásd majd a 2. fejezetben a (12) problémát,) akkor az (1) feladatnak az adott ρ-hoz tartozó optimális megoldása(i) esetén az első egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Az ilyen megoldás(oka)t *optimális portfólió*nak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy egy optimális portfólió egyben hatékony is, mivel egyrészt a várható hozam egy adott alsó korlátja mellett a variancia nem csökkenthető (mivel az optimális portfólió (1) optimális megoldása), másrészt a variancia egy adott alsó korlátja mellett a hozam nem növelhető (mivel az első egyenlőtlenség ilyen ρ esetén optimális megoldásra egyenlőséggel teljesül). Megjegyezzük, hogy ρ-t a bekezdés elején említett intervallumon végigmozgatva a hatékony határgörbe összes pontját megkaphatjuk.

A (1) feladat gyakorlati alkalmazásához szükséges $n(n+1)/2$ kovariancia ismerete, melyeket a múltbeli adatok segítségével számolhatunk ki. Ha pl. $n = 500$, akkor ez nagyon sok időt vesz igénybe. Másrészről a fent leírt választható értékpapírszám mellett a feladat megoldása is nehézségekbe ütközhet.

A portfólió kiválasztási probléma másik megfogalmazása a következő:

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\ \text{tekintve a} & \\ & \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} \le v \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = M \\ & 0 \le x_j \le u_j,\ j = 1, \ldots, n \end{array} \tag{2}$$

feltételeket. A v paramétert megfelelően változtatva ebben az esetben is kiszámolhatók a hatékony határgörbe elemei.

A probléma felírható parametrikus kvadratikus programozási feladatként is:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \displaystyle\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} - \lambda \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\ \text{tekintve a} & \\ & 0 \le x_j \le u_j,\ j = 1, \ldots, n \\ & \lambda \in [0, \infty) \end{array} \tag{3}$$

feltételeket, ahol λ egyfajta átváltási paraméter a várható hozam és kockázat között, melyet (megfelelő feltételek mellett) változtatva megkaphatjuk a hatékony határgörbe pontjait.

A kockázat mérésére szolgáló másik módszer lehet, ha a $\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\mu}$ hozam mellett tekintjük az

$$E\left[\left|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{x}\right|\right] \tag{4}$$

formulát, mint a kockázat mértékét. Az egyik legfontosabb esetben, amikor $\boldsymbol{\xi}$ többdimenziós normális eloszlású, (4) minimalizálása és $\sqrt{\boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x}}$ minimalizálása ugyanazt az eredményt adja. Valóban, mivel igaz a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

egyenlet, ezért

$$E\left[\left|(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{x}\right|\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{x}^TC\boldsymbol{x}}. \tag{5}$$

Konno és Yamakazi [25] vezették be az átlagos eltérést, mint a kockázat mértékét, olyan problémákra, ahol a már megbecsült várható hozamok és varianciák helyett a múltbéli adatokra közvetlenül támaszkodunk. Ha T jelöli a múltbéli megfigyelési periódusok számát, és r_{jt} jelöli a j-edik értékpapír hozamát a t-edik periódusban, és ha

$$r_j=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}r_{jt},\quad a_{jt}=r_{jt}-r_j,$$

akkor a fent leírt mértéket tekintve a portfólió optimalizációs probléma a következő alakban írható:

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{jt}x_j\right| \\
&\text{tekintve hogy} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}r_jx_j\geq\rho M \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}x_j=M \\
&\qquad 0\leq x_j\leq u_j,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ez viszont ekvivalens a következő lineáris programozási feladattal:

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_t \\
&\text{tekintve a} \\
&\qquad -y_t\leq\sum_{j=1}^{n}a_{jt}x_t\leq y_t \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}r_jx_j\geq\rho M \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}x_j=M \\
&\qquad 0\leq x_j\leq u_j,\ j=1,\dots,n
\end{aligned} \tag{7}$$

megszorításokat. Az (7) feladat előnye a (1) feladattal szemben, egyrészt hogy nem kell a kovariancia mátrixot előzőleg kiszámolni, másrészt hogy ez LP feladat, és ezért könnyebben kezelhető.

A fejezet végén még bemutatnánk egy modellt, amely nem kifejezetten a hatékony portfóliók keresésére irányul, hanem a befektetők más célkitűzéseit veszi figyelembe. Pontosabban arról van szó, hogy a befektető itt is nagyjából az előző megszorítások mellett vásárolhat értékpapírokat, de kitűzött célja nem a hatékony portfólió, hanem hogy hozamát az általa megválasztott valószínűséggel maximalizálja. Az ezt leíró sztochasztikus programozási feladat a következő:

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & \rho \\ \text{tekintve a} & \\ & P\left(\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x} \geq \rho\right) \geq p \\ & \boldsymbol{x} \in D \end{array} \tag{8}$$

feltételeket, ahol $\boldsymbol{\xi}$ és $\boldsymbol{x}$ ugyanazt jelenti, mint az előzőekben ($M = 1$-et feltételezve), p egy előirt (kellően nagy) valószínűség ($0 < p < 1$), és D pedig a megszorító feltételek által meghatározott $\boldsymbol{R}^n$-beli halmaz. (Természetesen D lehet akár az előző modellekben szereplő megszorításokkal is definiálva.) Ehhez hasonló sztochasztikus programozási modellt Kataoka állított fel 1963-ban [19].

Érdemes azt a speciális esetet tovább boncolgatnunk, amikor $\boldsymbol{\xi}$-ről azt feltételezzük, hogy többdimenziós normális eloszlású.

Ha az optimális $\boldsymbol{x}$ esetén a $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x}$ valószínűségi változó eloszlása nem degenerált, akkor

$$P\left(\boldsymbol{\xi}^T \geq \rho\right) = p, \tag{9}$$

mert

$$P\left(\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x} \geq \rho\right) > p$$

esetén ρ-t növelni tudnánk a (8) feladat megszorításainak megsértése nélkül. Ha $\boldsymbol{\mu}$ és C ugyanazt jelöli, mint az előzőekben, akkor (9) alapján a következő eredményre jutunk:

$$\rho = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Phi}^{-1}(p)\sqrt{\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x}}, \tag{10}$$

ahol $\boldsymbol{\Phi}$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Másrészről pedig ha $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x}$ eloszlása degenerált, akkor

$$P\left(\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x}\right) = 1,$$

Tehát a legnagyobb értéke ρ-nak, amely még teljesíti (8) feltételeit, ebben az esetben is a (10) formulával számolható, ahol most $\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x} = 0$.

Tehát többdimenziós normális eloszlás esetén sztochasztikus problémánkat a következő alakra tudtuk hozni:

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & \left\{\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Phi}^{-1}(p)\sqrt{\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x}}\right\} \\ \text{tekintve az} & \\ & \boldsymbol{x} \in D \end{array} \tag{11}$$

feltételt. A (11) probléma már sokkal jobban hasonlít az alfejezet által vizsgált problémákra. Sőt, ha azt mondjuk, hogy $\lambda := \boldsymbol{\Phi}^{-1}(p)$, akkor már látjuk, hogy a (11) probléma egy olyan

λ paraméterű feladat, hogy λ értékének a $[0, \infty)$ intervallumon belüli változtatásával (tehát amikor $p \geq 1/2$) a feladat megoldásai a hatékony határgörbe pontjait fogják megadni arra az esetre, ha a kockázatot a portfólió szórásával mérjük.

Tehát összefoglalva utolsó példánkat: azt láthattuk, hogy ha az értékpapírok hozamának eloszlása megfelelő (esetünkben többdimenziós normális), akkor a befektető más racionális célkitűzéseket követő portfóliója éppen egy hatékony portfólió lesz (a kockázatot a szórással mérve). Hasonló esetekkel fogunk még találkozni a 3. fejezetben.

2. A "Kritikus egyenes" algoritmus

2.1. Az átlag-variancia probléma

Az *átlag-variancia probléma* alatt az 1. fejezetben klasszikus Markowitz-féle modellnek nevezett portfólió keresési feladatot értjük, tehát amelyben a kockázatot a portfólió hozamának szórásával mérjük. Az ehhez tartozó parametrikus kvadratikus programozási feladat a következő:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & Var = \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve a} & \\ & \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x} = E, \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \\ \text{feltételeket minden} & E \in [E_{min}, E_{max}] \text{-ra,} \end{array} \tag{12}$$

ahol az $\boldsymbol{x}$ n-dimenzós vektor koordinátái a portfólióban tartott egyes értékpapírokba fektetett összegek súlyait, a $\boldsymbol{\mu}$ n-dimenziós vektor az értékpapírok hozamának várható értékeit jelöli, az $A\,(n \times m)$-es mátrix ill. a $\boldsymbol{b}$ m-dimenziós vektor pedig a lineáris megszorító feltételeket határozza meg. E jelöli a portfóliótól elvárt hozamot, E_{max} pedig a maximális elérhető E-t, míg E_{min} a minimális varianciához tartozó E-t jelöli.

Látható, hogy a (12) probléma lényegében csak általánosabb megszorító feltételeiben különbözik az eddig tárgyalt Markowitz-féle modelltől.

A átlag-variancia problémának létezik a (12) feladattal ekvivalens másik megfogalmazása, mégpedig a következő parametrikus kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} - \lambda_E \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve a} & \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \\ \text{feltételeket minden} & \lambda_E \in [0, \infty) \text{-ra,} \end{array} \tag{13}$$

ahol λ_E egyfajta átváltási paraméter a hozam és kockázat között. Megjegyezzük, hogy $\lambda_E = 0$ esetén a (13) problémának létezhet olyan megoldása amely nem hatékony portfólió, de majd látni fogjuk, hogy a fejezetben bemutatandó algoritmus erre az esetre is helyes megoldást ad.

2.2. A Kuhn-Tucker tétel

A fejezetben szereplő megoldási módszerekhez szükségünk lesz a címben szerplő tétel egy speciális változatára.

Tétel 2.1 (Kuhn-Tucker) *Vegyük a következő problémát:*

$$\begin{aligned} Min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ tekintve\ a \quad & \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{aligned} \tag{14}$$

feltételeket, ahol f n-változós valós, differenciálható, konvex függvény, $\boldsymbol{x}$ n-dimenziós vektor, $A\,(n \times m)$-es mátrix, $\boldsymbol{b}$ pedig m-dimenziós vektor.

Az $\boldsymbol{x}$ vektor pontosan akkor megoldása a (14)-nek, ha léteznek olyan m-dimenziós $\boldsymbol{\lambda}$ és n-dimenziós $\boldsymbol{\eta}$ Lagrange- szorzók, amelyekre teljesül, hogy:

$$\bigtriangledown f(\boldsymbol{x}) + A^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{o}, \tag{15}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{o},\ \boldsymbol{\eta} \geq \mathbf{o},\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\eta} = 0. \tag{17}$$

Bizonyítás: A (15, 16, 17) feltételek szükségessége következik a közismert eredeti Kuhn-Tucker tételből lásd [21] magyarul [1].

A feltételek elégségessége a következők miatt igaz: tegyük föl, adva egy $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}$ n-dimenziós vektor, melyre $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Erre f konvexitása miatt igaz, hogy

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \geq (\bigtriangledown f(\boldsymbol{x}))^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Minthogy (15)-ből következik, hogy

$$(\bigtriangledown f(\boldsymbol{x}))^T = \boldsymbol{\eta}^T - \boldsymbol{\lambda}^T A,$$

ezért

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^T A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\lambda}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{y} - 0 - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{y} \geq 0.$$

Ebből pedig már következik, hogy $\boldsymbol{x}$ optimális megoldása a (14) feladatnak. □

2.3. Az algoritmus leírása

Az algoritmust a (13) probléma megoldására fogjuk használni. Az előbb leírt Kuhn-Tucker tételt a problémára alkalmazva azt kapjuk, hogy adott λ_E esetén a (13) feladatnak akkor és csak akkor lesz $\boldsymbol{x}$ az optimális megoldása, ha léteznek olyan $\boldsymbol{\lambda}$ és $\boldsymbol{\eta}$ Lagrange- szorzók, hogy:

$$C\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} - \lambda_E\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{o}, \tag{18}$$

$$Ax = \boldsymbol{b}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{o},\ \boldsymbol{\eta} \geq \mathbf{o},\ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\eta} = 0. \tag{20}$$

Legyen a BE és a KI halmaz az értékpapírok összeségének egy partíciója. Jelölje C_{BE} azt a részmátrixot, melyet a C mátrix KI sorainak és KI oszlopainak törlésével kapunk. Legyen A_{BE} az a részmátrix, melyet A KI oszlopainak elhagyásával nyerünk, $\boldsymbol{\mu}_{BE}$, $\boldsymbol{\eta}_{BE}$ és $\boldsymbol{x}_{BE}$ ($\boldsymbol{x}_{KI}$) pedig jelöljék az eredeti vektorok KI (BE) koordinátáinak elhagyásával kapott vektorokat. Ha a BE és KI partíció olyan, hogy $\boldsymbol{x}_{KI} = \boldsymbol{\eta}_{BE} = \mathbf{o}$ fenáll, akkor együttesen felírva a (18) és (19) egyenletek BE részét, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{pmatrix} C_{BE} & A_{BE}^T \\ A_{BE} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{BE} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \lambda_E \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{BE} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Minden adott BE és KI partícióra legyen az $\left(\boldsymbol{x}^T(\lambda_E), \boldsymbol{\lambda}^T(\lambda_E), \boldsymbol{\eta}^T(\lambda_E)\right)^T \in \boldsymbol{R}^{2n+m}$ *kritikus egyenes* a következőképpen definiálva:

$$\begin{pmatrix} C_{BE} & A_{BE}^T \\ A_{BE} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{BE} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \lambda_E \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{BE} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

$$x_i = 0,\ i \in KI, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \left(C, A^T\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} - \lambda_E \boldsymbol{\mu}. \tag{24}$$

A (20)-ből látszik, hogy a kritikus egyenes egy pontja akkor hatékony, ha teljesíti a

$$\eta_i > 0,\ i \in KI \tag{25}$$

$$x_i > 0,\ i \in BE \tag{26}$$

feltételeket. Egy adott BE halmazra

$$M_{BE} := \begin{pmatrix} C_{BE} & A_{BE}^T \\ A_{BE} & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

A *"kritikus egyenesek" algoritmusa* a következő lépésekből áll:

1. először is keresünk egy megoldást a "$\lambda_E = \infty$" esetre, tehát megoldjuk a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve a} & \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}, \end{array} \tag{28}$$

   feltételeket.

2. Így a későbbiekben tárgyalandó feltételezéseink mellett ez a megoldás elég nagy λ_E^0 mellett meghatároz egy BE halmazt, úgy, hogy a hozzátartozó M_{BE} mátrix nem-szinguláris lesz, és a (23, 25, 26) feltételek teljesülnek.

3. Az algoritmus során a hatékony határgörbe pontjait λ_E csökkentésének irányában rajzoljuk ki, mégpedig úgy hogy először elindulunk a kezdeti elég nagy λ_E csökkentésével a kezdeti megoldáshoz tartozó BE halmaz által meghatározott kritikus egyenesen, és addig megyünk, míg a (23, 25, 26) feltételek teljesülnek. Tegyük fel, hogy λ^0 az az érték, ahol (25, 26) valamelyike először megsérül, jelölje ennek indexét γ. Ekkor a γ-ik koordinátát vagy törüljük a BE halmazból és a KI-be belevesszük vagy fordítva, attól függően, hogy eredetileg hova tartozott. Így egy új partíciót kapunk, és ennek a kritikus egyenesén megyünk tovább egészen a λ_E^2-ig, ahol (25, 26) közül megint megsérül valamelyik, ennek megfelelően megint megváltoztatjuk a partíciót és megyünk az új egyenesen tovább stb.. Ezt a módszert folytatjuk egészen, míg el nem jutunk $\lambda_E = 0$-ig. Így azt kaptuk, hogy λ_E-t a $[\lambda_E^1, \infty], [\lambda_E^2, \lambda_E^1], \ldots, \left[\lambda_E^{t+1}, \lambda_E^t\right], \ldots, \left[\lambda_E^T, \lambda_E^{T-1}\right]$ szakaszokon mozgatva egy-egy kritikus egyenesen haladva megkapjuk a hatékony pontokat a legnagyobb λ_E értékektől egészen $\lambda_E^T = 0$-ig.

   Az algoritmus leírása során feltételeztük, hogy az M_{BE} mátrix minden iterációkor nem-szinguláris marad, másrészt, hogy a λ_E^t-hez tartozó portfólió a t-edik és $t+1$-edik kritikus egyenesen ugyanaz, harmadrészt, hogy $\left[\lambda_E^{t+1}, \lambda_E^t\right]$szakaszokon a (25, 26) feltételek igazak maradnak, negyedrészt, hogy az algoritmus véges. Ezeknek, az algoritmus működéséhez feltétlenül szükséges állításoknak, a bizonyítása alkotja a következő szakaszok tartalmát.

2.4. Az algoritmus működésének feltételei

Az egyszerűség kedvéért teszünk pár feltételezést, hogy az algoritmus működő képességének bizonyításainál ne kelljen bizonyos speciális esetekkel foglalkoznunk. Ha valakit mégis érdekelnek ezen esetek, kezelésük módozatait megtalálhatja [29]-ben.

Tehát feltesszük, hogy az (28)-nek egyértelmű, véges, nem degenerált megoldása van.

2.5. Az M_{BE} mátrix nem-szingularitása

Mint már az algoritmus leírásának végén említettük, a "kritikus egyenes" algoritmus akkor működik jól, ha teljesülnek a következők:

1. minden egyes iterációs lépésben az M_{BE} mátrix nem-szinguláris,
2. a λ_E^t-hez tartozó portfólió a t-edik egyenesen ugyanaz legyen, mint a $t+1$- en,
3. $\eta_j > 0$ minden $j \notin BE(t)$ esetén, $x_j > 0$ minden $j \in BE(t)$, ha $\lambda_E^{t-1} > \lambda_E > \lambda_E^t$,
4. $\lambda_E^T = 0$-át elérjük valamilyen véges T idő alatt.

Az 1. és 3. feltételek az első kritikus egyenesen fennállnak. A következő szakaszokban azt fogjuk megmutatni, hogy ha ezek állnak a t- edik egyenesre, akkor a $t+1$-edikre is, és a 2. feltétel fennáll a t- edik és $t+1$-edik egyenesek között.

Ebben a szakaszban azt fogjuk belátni, hogy M_{BE} nem-szinguláris marad.

Először tekintsük azt az esetet, amikor x_j "bejön" a $(t+1)$- edik iteráció során. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_1, \ldots, x_k$ voltak *benn* a t-edik iterációban, és x_{k+1} *jött be* a $(t+1)$-ik iterációban. Legyen

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \sigma_{kk} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}^T = (\sigma_{k+1,1}, \cdots, \sigma_{k+1,k}),$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{m,k+1} \end{pmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \sigma_{k+1,k+1}.$$

A t-edik kritikus egyenesen

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \lambda_E \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_E = \lambda_E^t$ helyen η_{k+1} úgy vált zérussá, hogy λ_E^t egy jobb oldali környezetében pozitív volt, ezért a $\lambda_E = \lambda_E^t$ helyen létezik egyértelmű megoldása az

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T & \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \mu_{k+1} \\ \overline{A} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ -\lambda_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{29}$$

egyenletnek. Ha $M_{BE(t+1)}$ nem-szinguláris, akkor a formula a $(t+1)$-edik kritikus egyenesre:

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} & \overline{A}^T \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \overline{A} & \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ x_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \lambda_E \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \mu_{k+1} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}.$$

Mivel feltettük, hogy

$$M_{BE(t)} = \begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix} \text{ nem-szinguláris,}$$

és mivel η_{k+1} zérussá válik a t-edik kritikus egyenesen, ezért a

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T & \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \mu_{k+1} \\ \overline{A} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mátrix sem lehet szinguláris.}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$M_{BE(t+1)} = \begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} & \overline{A}^T \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \overline{A} & \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \text{ nem-szinguláris.}$$

Ha $M_{BE(t+1)}$ szinguláris lenne, akkor létezne egy $\left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}, \boldsymbol{\delta}^T\right) \neq \mathbf{o}$ vektor, hogy

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} & \overline{A}^T \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \overline{A} & \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 0 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix},$$

ahol $\boldsymbol{y}$ k-dimenziós, $\boldsymbol{\delta}$ m-dimenziós vektor, y_{k+1} pedig skalár. Ebből következik, hogy

$$\overline{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha} y_{k+1} = \left(\overline{A}\boldsymbol{\alpha}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{o},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \overline{A}^T \\ \boldsymbol{\alpha}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} Var\left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}\right) &= \left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}\right) \begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} \\ &= -\left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}\right) \begin{pmatrix} \overline{A}^T \\ \boldsymbol{\alpha}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bármilyen $(\overline{\boldsymbol{x}}, x_{k+1})$ esetén

$$Var\left(\overline{\boldsymbol{x}}^T + \boldsymbol{y}^T, x_{k+1} + y_{k+1}\right) =$$

$$Var\left(\overline{\boldsymbol{x}}^T, x_{k+1}\right) + 2\left(\overline{\boldsymbol{x}}^T, x_{k+1}\right)\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} + Var\left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}\right).$$

Mivel $Var\left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}\right) = 0$, ezért igaznak kell lennie, hogy

$$\left(\overline{\boldsymbol{x}}^T, x_{k+1}\right)\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = 0,$$

ellenkező esetben $Var\left(\overline{\boldsymbol{x}}^T + \theta\boldsymbol{y}^T, x_{k+1} + y_{k+1}\right)$ negatív lenne egy megfelelően választott θ-ra. Ezért

$$Var\left(\overline{\boldsymbol{x}}^T + \boldsymbol{y}^T, x_{k+1} + y_{k+1}\right) = Var\left(\overline{\boldsymbol{x}}, x_{k+1}\right).$$

Másrészt, ha

$$\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\alpha} x_{k+1} = \boldsymbol{b},$$

akkor

$$\overline{A}\left(\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}\right) + \boldsymbol{\alpha}\left(x_{k+1} + y_{k+1}\right) = \boldsymbol{b}.$$

A Kuhn-Tucker tétel megfelelő alkalmazásával látszik, hogy a t-edik kritikus egyenesen a λ_E^t-nél (ahol η_{k+1} zérussá válik) lévő portfólió ($\boldsymbol{x}^0$) minimalizálja az $1/2Var - \lambda_E^t E$ kifejezést azon $\boldsymbol{x}$-ek között, melyekre teljesül, hogy

1. $\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\alpha} x_{k+1} = \boldsymbol{b}$ és
2. $x_j = 0$ minden $j = k+2, \ldots, n$ esetén.

(Megjegyezzük, hogy nem tettünk megszorítást x_j előjelére $j = 1, \ldots, k+1$ esetén.) Ebből következik, hogy

$$(\mu_1, \ldots, \mu_k)\,\boldsymbol{y} + \mu_{k+1} y_{k+1} = 0.$$

Ellenkező esetben vagy a

$$\boldsymbol{x}^0 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \quad \text{vagy a} \quad \boldsymbol{x}^0 - \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$$

portfólió várható hozama nagyobb lenne ugyanakkora szórás mellett, és ez ellentmondana $\boldsymbol{x}^0$ előbb említett minimalizáló tulajdonságának. Tehát

$$\left(\overline{\boldsymbol{\mu}}^T, \mu_{k+1}\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Ebből pedig az következik, hogy

$$\left(\boldsymbol{y}^T, y_{k+1}, \boldsymbol{\delta}^T\right)\begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T & \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \mu_{k+1} \\ \overline{A} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{o}^T, \mathbf{o}^T, 0\right),$$

ez pedig ellentmond annak a feltételnek, hogy

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T & \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \mu_{k+1} \\ \overline{A} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nem-szinguláris.}$$

Most vegyük azt az esetet, amikor egy változó, amely *benn* volt a t- edik iterációban "kimegy" a $t+1$-ben. Megint az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $x_1, \ldots, x_{k+1}$ változók voltak *benn* a t-edik iterációban, és x_{k+1} "megy ki" a $t+1$-edik iterációban. $\overline{C}, \boldsymbol{c}^T, \overline{A}, \boldsymbol{\alpha}, \overline{\boldsymbol{\mu}}, \overline{\boldsymbol{x}}, \sigma$ jelentse ugyanazt, mint az előbbiekben.

A t-edik kritikus egyenes:

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} & \overline{A}^T \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \overline{A} & \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ x_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \lambda_E \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \mu_{k+1} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}.$$

Feltesszük, hogy a fenti $M_{BE(t)}$ nem-szinguláris. A t-edik kritikus egyenes azon pontján, ahol x_{k+1} zérussá válik, a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} & \overline{A}^T & \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma & \boldsymbol{\alpha}^T & \mu_{k+1} \\ \overline{A} & \boldsymbol{\alpha} & 0 & 0 \\ \mathbf{o}^T & 1 & \mathbf{o}^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ x_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ -\lambda_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 0 \\ \boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel x_{k+1} a t-edik egyenesen pozitívból vált zérussá, ezért a fenti egyenlet megoldása egyértelmű, ezért pedig a fenti mátrix nem-szinguláris.

Most azt kell megmutatni, hogy az

$$M_{BE(t+1)} = \begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sem szinguláris. A bizonyítás hasonló az előző esethez.

Ha $M_{BE(t+1)}$ szinguláris lenne, akkor létezne egy $\left(\boldsymbol{y}^T, \boldsymbol{\delta}^T\right)$ vektor úgy, hogy

$$\begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{A}^T \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} = \mathbf{o}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\overline{C}\boldsymbol{y} &= -\overline{A}^T\boldsymbol{\delta}, \\
\overline{A}\boldsymbol{y} &= \mathbf{o}, \\
Var\left(\boldsymbol{y}\right) &= \boldsymbol{y}^T\overline{C}\boldsymbol{y} \\
&= -\boldsymbol{y}^T\overline{A}^T\boldsymbol{\delta} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $Var\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right) = Var\left(\boldsymbol{x}\right)$ bármilyen $\boldsymbol{x}$-re.

Ha $\overline{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, akkor

$$\overline{A}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right) = \overline{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{o} = \boldsymbol{b}.$$

Az $\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ portfólió $\lambda_E = \lambda_E^t$-nél a t-edik kritikus egyenesen, (ahol x_{k+1} zérussá válik) minimalizálja az

$$f = 1/2Var - \lambda_E^t E \text{ kifejezést}$$

tekintve hogy

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}, \\
x_{k+1} &= 0,\ x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy nem tettünk megszorításokat az $x_1, \ldots, x_k$ változók előjelére. Előzőekből következik, hogy

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}^T\boldsymbol{y} = 0.$$

Ellenkező esetben vagy a

$$\overline{\boldsymbol{x}}^0 + \boldsymbol{y} \text{ vagy a}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}^0 - \boldsymbol{y}$$

kisebb f célfüggvényértéket adna az $A\boldsymbol{x} = b$ megszorítás mellett.

De, mivel $\overline{\boldsymbol{\mu}}^T\boldsymbol{y} = 0$, ezért azt kaptuk, hogy:

$$\left(\boldsymbol{y}^T, 0, \boldsymbol{\delta}^T - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\alpha}\right)\begin{pmatrix} \overline{C} & \boldsymbol{c} & \overline{A}^T & \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{c}^T & \sigma & \boldsymbol{\alpha}^T & \mu_{k+1} \\ \overline{A} & \boldsymbol{\alpha} & 0 & 0 \\ \mathbf{o}^T & 1 & \mathbf{o}^T & 0 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{o}^T, 0, \mathbf{o}^T, 0\right).$$

Ez pedig ellentmondás.

Tehát x_{k+1} akár "bejön", akár "kimegy" a $t+1$-edik iterációban, $M_{BE(t+1)}$ mind a két esetben nem-szinguláris marad.

2.6. Nem negativitási meggondolások

Térjünk vissza arra az esere, amikor x_j $(j = 1, \ldots, k+1)$ *benn* van a t-edik kritikus egyenes mentén, de x_{k+1} zérussá válik λ_E^t-nél. Mind a két egyenletrendszer, egyszer, amelyik a t-edik egyenest definiálja és másodszor, amelyik a $(t+1)$-iket definiálja, tartalmazza a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} x_j &= 0 \text{ minden } j \geq k+2 \text{ esetén és} \\ \eta_j &= 0 \text{ minden } j \leq k \text{ esetén.} \end{aligned}$$

A két kritikus egyenest definiáló egyenletrendszer csak abban különbözik, hogy:

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= 0 \text{ a } t\text{-edik kritikus egyenes mentén} \\ x_{k+1} &= 0 \text{ a } (t+1)\text{-edik kritikus egyenes mentén.} \end{aligned}$$

Az $\left(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \lambda_E^t\right)$ vektor a t-edik kritikus egyenesen, λ_E^t-nél kielégíti mind a $\eta_{k+1} = 0$, mind az $x_{k+1} = 0$ egyenleteket. Ezért a λ_E^t-nél ugyanazt a portfóliót találjuk mind a t-edik, mind a $(t+1)$-edik kritikus egyenesen. Hasonlóan érvelhetünk, amikor x_{k+1} "bejön" λ_E^t-nél. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0 \text{ a } t\text{-edik kritikus egyenes mentén és} \\ \eta_{k+1} &= 0 \text{ a } (t+1)\text{-ik kritikus egyenes mentén.} \end{aligned}$$

Megint igaz, hogy az $\left(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \lambda_E^t\right)$ vektor λ_E^t-nél kielégíti mindkét egyenlőséget, és ebből megint következik, hogy a portfólió λ_E^t-nél ugyanaz mind a t-edik, mind a $(t+1)$-ik kritikus egyenesen.

Most pedig megmutatjuk, hogy ha $M_{BE(t)}$ nem-szinguláris, és a t-edik kritikus egyenesen, a $\lambda_E^{t-1} > \lambda_E > \lambda_E^t$ tartományban

$$\begin{aligned} x_j &> 0 \text{ minden } j \in BE(t) \text{ esetén és} \\ \eta_j &> 0 \text{ minden } j \notin BE(t) \text{ esetén,} \end{aligned}$$

akkor igaz, hogy a $t+1$-edik kritikus egyenesen, a $\lambda_E^t > \lambda_E > \lambda_E^{t+1}$ tartományban

$$\begin{aligned} x_j &> 0 \text{ minden } j \in BE(t+1) \text{ esetén és} \\ \eta_j &> 0 \text{ minden } j \notin BE(t+1) \text{ esetén.} \end{aligned}$$

Azt már beláttuk, hogy a fenti feltételek mellett $M_{BE(t+1)}$ nem- szinguláris. Tekintsük most azt az esetet, amikor az egyik x változó "bejön". Mint eddig is, feltesszük, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ változók voltak *benn* a t-edik egyenesen, és x_{k+1} "jön be" a $(t+1)$-edik kritikus egyenesnél.

A $(t+1)$-edik kritikus egyenesen $\lambda_E = \lambda_E^t$ esetén

$$\begin{aligned} x_j &> 0 \text{ minden } j = 1, \ldots, k \text{ esetén és} \\ x_{k+1} &= 0, \end{aligned}$$

amíg

$$x_j = 0 \;\; \text{minden } j = k+2, \ldots, n.$$

Most meg kell mutatnunk, hogy ha λ_E-t tovább csökkentjük, akkor x_{k+1} elkezd nőni.

Tegyük fel először indirekt, hogy a $(t+1)$-edik kritikus egyenesen

$$\frac{dx_{k+1}}{d\lambda_E} = 0.$$

Ebben az esetben a kritikus egyenesen lévő összes pontra teljesülnének a következők:

1. $x_{k+1} = 0$,
2. $x_j = 0 \;\; j \geq k+2$ esetén,
3. $\eta_j = 0 \;\; j = 1, \ldots, k$ esetén,
4. $\eta_{k+1} = 0$.

Ez pedig lehetetlen, mivel az 1., 2., 3. azok a feltételek, amelyek a t-edik kritikus egyenest definiálták, és a 4. feltétel a t-edik kritikus egyenesen egyedül $\lambda_E = \lambda_E^t$ mellett áll. Ezért vagy

$$\frac{dx_{k+1}}{d\lambda_E} > 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{dx_{k+1}}{d\lambda_E} < 0$$

áll fenn. A második eset pont azt jelenti amit az algoritmus működéséhez elvárunk. Tegyük fel, hogy $dx_{k+1}/d\lambda_E > 0$. Ebben az esetben létezik egy $\tilde{\lambda}_E$ úgy, hogy

$$\lambda_E^{t-1} > \tilde{\lambda}_E > \lambda_E^t,$$

és hogy a $(t+1)$-edik kritikus egyenesen $\tilde{\lambda}_E$-nél azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_j &> 0 \;\; \text{minden } j \in BE\,(t+1)\,, \\ x_j &= 0 \;\; \text{minden } j \notin BE\,(t+1)\,, \\ \eta_j &> 0 \;\; \text{minden } j \notin BE\,(t+1)\,, \\ \eta_j &= 0 \;\; \text{minden } j \in BE\,(t+1) \quad \text{esetén.} \end{aligned}$$

Mivel $M_{BE(t+1)}$ nem-szinguláris, ezért a portfólió, amely $\tilde{\lambda}_E$-hez tartozik a $(t+1)$-edik kritikus egyenesen, *egyértelmű* minimumát adja az

$$1/2Var - \tilde{\lambda}_E E$$

feladatnak, tekintve az

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}, \\ x_j &= 0 \;\; j \geq k+2 \text{ esetén.} \end{aligned}$$

(Megemlítjük, hogy az x_j-k előjelére nem tettünk megszorítást.) Viszont a t-edik kritikus egyenes $\lambda_E = \tilde{\lambda}_E$-nél lévő pontja is minimalizálja ugyanezt a feladatot, ez pedig ellentmondás.

Hasonló érvelést használhatunk abban az esetben, ha x_{k+1} "bejön", és $d\eta_{k+1}/d\lambda_E < 0$ a $(t+1)$-edik kritikus egyenesen.

2.7. Az algoritmus végessége

Mivel a t-edik kritikus egyenesen egy változó (x_j vagy η_j) pozitív $\lambda_E > \lambda_E^t$ esetén, nulla $\lambda_E = \lambda_E^t$ esetén, ezért negatívnak kell lennie $\lambda_E < \lambda_E^t$ esetén. Ebből pedig következik, hogy *nem létezik olyan kritikus egyenes, amely több iteráció alkalmával is szerepel.* Mivel a kritikus egyenesek száma véges, (mert a BE-KI partíciók száma is az,) ezért $\lambda_E = 0$-át véges lépésen belül elérjük.

2.8. Az algoritmus által generált portfóliók és a hatékony portfóliók

Világos, hogy mivel az algoritmus által generált portfóliók egyben a (13) feladat megoldásai is, ezért $\lambda_E \in (0, \infty)$ esetén a generált portfóliók egyben hatékony portfóliók is. Egyelőre nem lehetünk biztosak abban, hogy $\lambda_E = 0$ esetén is hatékony portfóliót kaptunk, mert bár az algoritmus által generált portfólió ekkor is megoldja a feladatot, de a feladatnak létezhet nem hatékony portfólió megoldása is. (Egy olyan portfólió, amelyik a megszorításoknak eleget tesz, minimális a hozamának a varianciája, de létezik nála nagyobb hozamú, de ugyanakkora varianciájú portfólió.) Szerencsére a következő tétel biztosítékot ad erre az esetre is.

Tétel 2.2 *A "kritikus egyenes" algoritmus $\lambda_E = 0$ esetre adott $\boldsymbol{x}^*$ megoldása hatékony portfólió.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük föl, hogy létezik egy $\tilde{\boldsymbol{x}}$ portfólió, amely hozamának szórása ugyanakkora, de várható értéke nagyobb. Mind $\boldsymbol{x}^*$ és mind $\tilde{\boldsymbol{x}}$ bármilyen környezetében létezik megengedett portfólió, mivel

$$\boldsymbol{x} = \delta \boldsymbol{x}^* + (1 - \delta)\, \tilde{\boldsymbol{x}}, \quad 0 \le \delta \le 1$$

esetén $\boldsymbol{x}$ megengedett. Mivel E és Var folytonosak, ezért bármilyen adott $\lambda_E > 0$ esetén létezik $\boldsymbol{x}^*$-nak, és $\tilde{\boldsymbol{x}}$-nek egy- egy olyan környezete, legyenek ezek T^* és $\tilde{T}$, hogy ha

$$\boldsymbol{y}^* \in T^*$$

és

$$\tilde{\boldsymbol{y}} \in \tilde{T},$$

akkor

$$f(\boldsymbol{y}^*) = 1/2 Var(\boldsymbol{y}^*) - \lambda_E E(\boldsymbol{y}^*) > 1/2 Var(\tilde{\boldsymbol{y}}) - \lambda_E E(\tilde{\boldsymbol{y}}) = f(\tilde{\boldsymbol{y}}).$$

Ez pedig lehetelen, mivel $\boldsymbol{x}^*$ az f-et minimalizáló portfóliók határértéke. □

Következmény 2.3 *Az algoritmus minden $0 \le \lambda_E < \infty$ esetén hatékony portfóliót generál.*

Az algoritmus egy másik fontos tulajdonsága, hogy az összes hatékony portfóliót generálja.

Tétel 2.4 *Ha* (E^*, Var^*) *egy hatékony* E, Var *páros, akkor létezik egy* $\lambda_E^* \geq 0$ *érték úgy, hogy az algoritmus által hozzárendelt* $\boldsymbol{x}^*$ *portfólióra igaz, hogy*

$$\begin{aligned} E^* &= \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x}^* \quad \text{és} \\ Var^* &= \boldsymbol{x}^{*T} C \boldsymbol{x}^*. \end{aligned}$$

Bizonyítás: A (28) feladat megoldására tett feltételek miatt, elég nagy λ_E esetén az algoritmus által generált portfólió éppen a legnagyobb eléthető várható hozamú portfólió lesz. Jelölje ezt $\overline{\boldsymbol{x}}$, és várható hozama legyen $\overline{E}$. Mint a 2.2 tételben láttuk, $\lambda_E = 0$ esetén a legkisebb szórású hatékony portfóliót kaptuk. Jelölje ezt $\underline{\boldsymbol{x}}$, a várható hozamot pedig $\underline{E}$. Nincs megengedett portfólió, melynek várható hozama $\overline{E}$-nél nagyobb lenne, és nincs hatékony portfólió, melynek várható hozama $\underline{E}$-nél kisebb lenne. Ebből következik, hogy $\underline{E} \leq E^* \leq \overline{E}$. Mivel az algoritmus által definiált $\boldsymbol{x}(\lambda_E)$ függvény, és az $E(\boldsymbol{x})$ függvény folytonos, ezért létezik, olyan λ_E^*, hogy a hozzá tartozó $\boldsymbol{x}^*$ portfólió várható értéke éppen E^*. Mivel ez a portfólió hatékony is, ezért varianciájának is meg kell egyeznie Var^*-gal. □

2.9. Az átlag-szemivariancia probléma

A kockázat mérésének kérdésében egy másik megközelítés, ha azt mondjuk, hogy a befektető csak a várható hozam alulteljesítése miatt aggódik. A kockázat ennek megfelelő értékelésére használható az (alsó) *szemivariancia.* A szemivariancia hasonlít a varianciára, de csak a várható (vagy elvárt) értéktől lefelé való eltérést veszi figyelembe, szemben a varianciával, amely mind a lefelé, mind a felfelé való eltéréssel számol.

A szemivariancia fogalmát a múltbeli hozam statisztikák segítségével fogjuk bevezetni, akárcsak az abszolút eltérés bevezetésénél tettük az 1. fejezetben (lásd a (6) problémát). Legyen r_{ti} az i-edik értékpapír hozama a t-edik megfigyelési periódusban, ahol $i = 1, \ldots, n$ és $t = 1, \ldots, T$. Legyen bm_t a benchmark hozam a t-edik periódusban, $t = 1, \ldots, T$. Előfordulhat, hogy $bm_t = c$ konstans, minden t-re. Bármilyen $\boldsymbol{x}$ portfólió vektor és E esetén definiáljuk az *átlaghoz viszonyított szemivarianciát* a következőképp:

$$S_E(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ti} x_i - E \right)^- \right\}^2, \tag{30}$$

a *benchmarkhoz viszonyított szemivarianciát* pedig a következőképp:

$$S_{bm}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ti} x_i - bm_t \right)^- \right\}^2, \tag{31}$$

ahol

$$z^- = \begin{cases} |z|, & \text{ha } z < 0, \\ 0, & \text{ha } z \geq 0. \end{cases}$$

Ezekből felírhatjuk a *átlag-szemivariancia probléma* két megfelelő változatát. Az egyik:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & S_E(\boldsymbol{x}) \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} = E, \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}, \\ \text{feltételeket minden} & E \in [E_{min}, E_{max}]\text{- ra,} \end{array} \tag{32}$$

ahol minden paraméter ugyanazt jelenti, mint (12)-ben, E_{min} kivételével, amely itt a minimális szemivarianciájú portfólió hozamát jelöli. A másik változata a szemivariancia problémának a következő:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & S_{bm}(\boldsymbol{x}) \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} = E, \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}, \\ \text{feltételeket minden} & E \in [E_{min}, E_{max}]\text{- ra,} \end{array} \tag{33}$$

ahol a paraméterek ugyanazt jelentik, mint az előbb.

2.10. A szemivariancia probléma átalakítása kvadratikus problémává

Ebben a szakaszban először a (32) problémát tárgyaljuk, majd a szakasz végén megemlítjük, hogy kell az átalakítást a (33) problémára alkalmazni.

Mivel S_E, Var-ral szemben, nem kvadratikus formula, ezért a (32) problémára nem tudjuk közvetlenül alkalmazni a "kritikus egyenes" algoritmust. Azonban $2T$ új változó bevezetésével a problémát át tudjuk alakítani egy (12) alakú problémává.

Először is legyen

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{T}} (r_{ti} - \mu_i)\, x_i \tag{34}$$

minden $t = 1, \ldots, T$ esetén. Behelyettesítve a $\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} = E$ megszorítást az eddigi S_E célfüggvénybe látható, hogy (32) ekvivalens a következő feladattal:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \sum_{t=1}^{T} \left(y_t^-\right)^2 \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} = E, \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \\ \text{feltételeket minden} & E \in [E_{min}, E_{max}]\text{-ra} \end{array} \tag{35}$$

és még a (34) feltételt. Ahhoz, hogy kvadratikus célfüggvényt kapjunk, legyen

$$z_t = y_t^- \tag{36}$$

minden $t = 1, \ldots, T$ esetén. Most már látszik, hogy (32) ekvivalens azzal, hogy:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \sum\limits_{t=1}^{T} z_t^2 \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x} = E, \\ & B\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{o}, \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}, \boldsymbol{z} \geq \mathbf{o}, \\ \text{feltételeket minden} & E \in [E_{min}, E_{max}] \, \text{esetén}, \end{array} \tag{37}$$

ahol B a következő $(T \times n)$-es mátrix:

$$B = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{T1} & r_{T2} & \cdots & r_{Tn} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Ebben az átalakított problémában gondolkodhatunk úgy, hogy a befektethető értékpapírok halmaza egyrészt az eredeti n valós értékpapírból, másrészt $2T$ fiktív értékpapírból áll, a $\left(\boldsymbol{\mu}^T, \mathbf{o}, \mathbf{o}\right)$ várható hozam vektorral, és a következő kovariancia mátrixszal:

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Tehát most már az új (37) problémára tudjuk alkalmazni a "kritikus egyenes" algoritmust.

A (33) probléma átalakításhoz csak annyi változtatás szükséges, hogy a B mátrixot a következőképpen definiáljuk:

$$B = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{T1} & r_{T2} & \cdots & r_{Tn} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} bm_1 & \cdots & bm_1 \\ \vdots & & \vdots \\ bm_T & \cdots & bm_T \end{pmatrix}. \tag{39}$$

2.11. A "kritikus egyenes" algoritmus végrehajtása

A "kritikus egyenes" algoritmus közvetlen ráalkalmazása az átalakított (37) feladatra, a bevezetett $2T$ új változó miatt, számításelméleti szempontból nem túl hatékony. Ahhoz, hogy az algoritmust hatékonyabbá tegyük, ki kell használni a kapott M_{BE} mátrix ritkaságát. Ennek pontos leírása [34]-ben megtalálható. Most csak azt fogjuk megmutatni, hogy az algoritmus végrehajtható $\boldsymbol{z}$ változóinak bevezetése nélkül is.

Mint az előzőekben láttuk, az egyetlen oka annak, hogy $\boldsymbol{z}$-t bevezettük az volt, hogy kvadratikus célfüggvényt kapjunk, mivel a "kritikus egyenes" algoritmust az átlag-variancia probléma megoldására fejlesztették ki. Azonban az az elv, amely az algoritmus mögött meghúzódik, használható általánosabb célfüggvények esetén is, beleértve az átlag-szemivariancia problémához tartozó $S_E(\boldsymbol{x})$ és $S_{bm}(\boldsymbol{x})$ függvényeket. Nézzük újra a (22, 23,

24) egyenletrendszert, ahol a kritikus egyenes definíciója található. Emlékezzünk rá, hogy (22, 23, 24) két részből áll. Az egyik rész az eredeti lineáris megszorító feltétel. A másik a Lagrange függvény első rendű feltétele, ha $\boldsymbol{x}_{KI}$-t konstans módon zérónak vesszük. Ha Var-t kicseréljük egy általánosabb $f(\boldsymbol{x})$ függvényre, és erre alkalmazzuk a Kuhn-Tucker tételt, a "kritikus egyenes" a következő lesz:

$$\nabla_{BE}\, f(\boldsymbol{x}) + A_{BE}^T \boldsymbol{\lambda} = \lambda_E \boldsymbol{\mu}_{BE}, \tag{40}$$

$$A_{BE}\boldsymbol{x}_{BE} = \boldsymbol{b}, \tag{41}$$

$$x_i = 0,\ i \in KI \text{ esetén}, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \nabla f(\boldsymbol{x}) + A^T \boldsymbol{\lambda} - \lambda_E \boldsymbol{\mu}, \tag{43}$$

ahol $\nabla_{BE} f$ az f függvény BE változókra vonatkozó gradiense. A Kuhn- Tucker tétel feltételei szerint a kritikus egyenes egy pontja akkor optimális, ha

$$\eta_i \geq 0\ i \in KI \text{ esetén}, \tag{44}$$

$$x_i \geq 0\ i \in BE \text{ esetén}. \tag{45}$$

Most nézzük meg, hogy hogyan tudjuk a fenti definíciót alkalmazni az átalakított (34, 35) problémára (és nem (37)-re!). Legyen $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t^-\right)^2$. Mivel $\boldsymbol{y}$-ra nincs megszorítás, ezért $\boldsymbol{y}$ változói a BE halmazban lesznek. Az egyszerűség kedvéért, BE és KI csak a valódi értékpapírok partícióját jelölje. Legyen $\boldsymbol{\lambda}_1$ (illetve $\boldsymbol{\lambda}_2$) a (34) megszorításhoz (illetve az $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$-hez) tartozó Lagrange-szorzó. A (40,41) egyenletek megfelelő alakjai:

$$\nabla_{BE}\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + B_{BE}^T \boldsymbol{\lambda}_1 + A_{BE}^T \boldsymbol{\lambda}_2 = \lambda_E \boldsymbol{\mu}_{BE}, \tag{46}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{o}, \tag{47}$$

$$B_{BE}\boldsymbol{x}_{BE} - \boldsymbol{y} = \mathbf{o}, \tag{48}$$

$$A_{BE}\boldsymbol{x}_{BE} = \boldsymbol{b}. \tag{49}$$

mivel $f_{\boldsymbol{x}} = 0$ és $f_{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{y}^-$, ezért ezeket a fenti egyenletekbe behelyettesítve:

$$B_{BE}^T \boldsymbol{\lambda}_1 + A_{BE}^T \boldsymbol{\lambda}_2 = \lambda_E \boldsymbol{\mu}_{BE}, \tag{50}$$

$$-\boldsymbol{y}^- - \boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{o}, \tag{51}$$

$$B_{BE}\boldsymbol{x}_{BE} - \boldsymbol{y} = \mathbf{o}, \tag{52}$$

$$A_{BE}\boldsymbol{x}_{BE} = \boldsymbol{b}. \tag{53}$$

Tehát ahhoz, hogy egy hatékony algoritmust találjunk, a fönti egyenletrendszert kell tudnunk hatékonyan megoldani. Tartalmazza $\boldsymbol{y}_f$ azokat az y_t-ket, amelyekre $y_t \geq 0$, és álljon az $\boldsymbol{y}_a$ a többi y_t-ből, tehát amelyekre $y_t < 0$. Legyen

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{1f} \\ \boldsymbol{\lambda}_{1a} \end{pmatrix}, \quad B_{BE} = \begin{pmatrix} B_{BEf} \\ B_{BEa} \end{pmatrix}.$$

A (51) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\lambda}_{1f} = \mathbf{o}, \tag{54}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{1a} = -\boldsymbol{y}_a. \tag{55}$$

Behelyettesítve a (54, 55) eredményeket (50)- ba és (52)-be, valamint megfelelően szétbontva a (52) egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$B^T_{BEa}\boldsymbol{y}_a + A^T_{BE}\boldsymbol{\lambda}_2 = \lambda_E \boldsymbol{\mu}_{BE}, \tag{56}$$

$$B_{BEa}\boldsymbol{x}_{BE} - \boldsymbol{y}_a = \mathbf{o}, \tag{57}$$

$$A_{BE}\boldsymbol{x}_{BE} = \boldsymbol{b}, \tag{58}$$

$$B_{BEf}\boldsymbol{x}_{BE} - \boldsymbol{y}_f = \mathbf{o}. \tag{59}$$

Most már látjuk, hogy a (50-53) egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk meg, hogy először megoldva a (56-58) egyenleteket megkapjuk $(\boldsymbol{x}_{BE}, \boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{\lambda}_2)$-t, majd a (54, 55, 59) egyenletekből a maradék ismeretlent. Végül még felírjuk a (56-58) egyenletek mátrixos alakját:

$$\begin{pmatrix} -I_a & 0 & B_{BEa} \\ 0 & 0 & A_{BE} \\ B^T_{BEa} & A^T_{BE} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_a \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \boldsymbol{x}_{BE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b} \\ \lambda_E \boldsymbol{\mu}_{BE} \end{pmatrix}.$$

A hatékony algoritmus, amely a fenti egyenletrendszert megoldja, megtalálható [34]-ben. Ugyanitt találhatóak adatok az algoritmus futásidejéről és tárigényéről.

3. A hasznossági függvény és a kockázat mérése

3.1. A hasznosságát maximalizáló befektető

Mint láttuk, a racionális befektető a portfólió kiválasztás során egyrészt gondolkodhat úgy, hogy igyekszik a várható hozamot maximalizálni, miközben a kockázatot minimalizálja, másrészt az 1. fejezet végén találkoztunk azzal a gondolatmenettel, hogy a befektető egy előre megválasztott elég nagy valószínűséggel akarja a hozamot maximalizálni, lásd (8). Ebben a fejezetben megismerkedünk egy harmadik gondolattal, amikor *a befektető a várható hasznosságát akarja maximalizálni.*

A befektetés hasznosságát a befektető számára a *hasznossági függvény* segítségével mérjük. A hasznossági függvény, amelyet jelöljünk u-val, esetünkben a hozam függvényében adja meg a hasznosságot. Mint minden hasznossági függvényről, erről is feltesszük, hogy

- monoton növekedő és
- konkáv.

Mind a két feltétel egy-egy józan közgazdasági meggondolást rejt magában: az első azt, hogy a nagyobb hozam nem csökkentheti a hasznosságot, a második amelyet a közgazdaságtanban a csökkenő határhozadék elvének is szoktak nevezni, esetünkben azt mondja, hogy nagyobb hozam egységnyi növelésével a hasznosság kevésbé nő, mintha kisebb hozamot növeltünk volna egy egységgel. (Például egy befektető számára sokkal nagyobb jelentősége van annak, ha egy adott, eddig 1%-os hozamot biztosító befektetése hozama ezentúl 2% hozammal bír, mint annak, hogyha egy 100% hozamú befektetés ezentúl 101%-os hozamot biztosít, mivel ilyen magas hozam esetén a befektető már inkább gondolkodik úgy, hogy ez az 1% már "nem oszt nem szoroz".)

Tehát a címben szereplő hasznosság maximalizáló befektető problémáját a következőképpen írhatjuk le:

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & E\left[u\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)\right] = \int u\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)dP\left(\boldsymbol{r}\right) \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{x} \in X. \end{array} \tag{60}$$

A feladatban $\boldsymbol{r}$ jelöli az értékpapírok hozamának véletlen vektorát, P a hozzá tartozó valószínűségi mértéket, az E függvény pedig egy valószínűségi változó várható értékét, az X halmaz pedig választható a feltett megszorításoknak megfelelően. Az előzőekben E-t használtuk minden argumentum nélkül a portfólió várható hozamának jelölésére is, e helyett mostantól jelölje ezt $\overline{E} = E\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x}$, a portfólió hozamának szórását pedig $\overline{Var} = Var\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{x}^TC\boldsymbol{x}$.

3.2. A várható hasznosság becslése és az átlag-variancia probléma

A (60) probléma a portfólió probléma egyik legvalódibb modellezése (mivel a befektető mindenek felett leginkább hasznosságát akarja maximalizálni) mégis talán ezzel van a legtöbb gond. Hogy a problémát egy explicit optimum keresési problémaként tudjuk felírni, egyrészt ismernünk kéne a befektető hasznossági függvényét, másrészt a hozamok valószínűségi eloszlását. Az első problémát úgy szokták megoldani, hogy megpróbálják u-t közelíteni egy függvénnyel, a másodikat problémát pedig úgy, hogy a közelítő függvényt úgy választják, hogy az ebből származtatott várható hasznosság már csak a hozamok várható értékének és szórásának függvénye legyen.

Az u függvény legegyszerűbb közelítéseit Taylor-sorából kaphatjuk. Ha a 0 körüli Taylor sort nézzük, akkor a másodfokú Taylor-polinom a következő közelítést adja:

$$u\left(r\right) \cong u_0\left(r\right) = u\left(0\right) + u'\left(0\right)r + \frac{1}{2}u''\left(0\right)r^2, \tag{61}$$

ekkor a becsült várható hasznosság (egy $\boldsymbol{x}$ portfólió esetén):

$$E\left[u\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)\right] \cong E\left[u_0\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)\right] = u\left(0\right) + u'\left(0\right)\overline{E} + \frac{1}{2}u''\left(0\right)\left(\overline{E}^2 + \overline{Var}\right) \tag{62}$$

Egy másik becslést kaphatunk, ha nem a 0 körüli, hanem a portfólió $\overline{E}$ várható hozama körüli másodfokú Taylor-polinommal közelítünk:

$$u(r) \cong u_{\overline{E}}(r) = u\left(\overline{E}\right) + u'\left(\overline{E}\right)\left(r - \overline{E}\right) + \frac{1}{2}u''\left(\overline{E}\right)\left(r - \overline{E}\right)^2, \tag{63}$$

ekkor a becsült várható hasznosság (egy $\boldsymbol{x}$ portfólió esetén):

$$E\left[u\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)\right] \cong E\left[u_{\overline{E}}\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)\right] = u\left(\overline{E}\right) + \frac{1}{2}u''\left(\overline{E}\right)\overline{Var} \tag{64}$$

A várható hasznosság két közelítését logaritmikus hasznossági függvénnyel és empirikus eloszlásokkal letesztelve Markowitz, Young és Trent úgy találta, hogy a (64) közelítés lényegesen jobb, mint (62)

Mindkét közelítés egy kvadratikus függvényt rendel u-hoz, méghozzá úgy, hogy a közelítő függvény csak u egy helyettesítési értékéhez (a 0-hoz illetve az $\overline{E}$-hez) tartozó tulajdonságaitól (u, u', u'') függ. Levy és Markowitz éppen ezért egyik cikkükben (lásd [27]) azt ajánlották, hogy közelítsünk ugyancsak másodfokú függvénnyel, de a közelítésnél a hasznossági függvény három jó helyen megválasztott helyettesítési értékéhez tartozó tulajdonságot (a függvényértéket) vegyük figyelembe. Tehát válasszuk azt a másodfokú polinomot, amely a következő három ponton

$$\left(\overline{E} - k\overline{\sigma}, u\left(\overline{E} - k\overline{\sigma}\right)\right), \left(\overline{E}, u\left(\overline{E}\right)\right), \left(\overline{E} + k\overline{\sigma}, u\left(\overline{E} + k\overline{\sigma}\right)\right) \tag{65}$$

keresztülmegy. Ezt kvadratikus függvény felírhatjuk a következő alakban:

$$q_k(r) = a_k + b_k\left(r - \overline{E}\right) + c_k\left(r - \overline{E}\right) \tag{66}$$

(Az egyszerűség kedvéért következő felírásainkban elhagyjuk a k indexet, de természetesen ettől még oda értendőek.) Tehát a (66) egyenletből a közelítő függvényünk várható értéke:

$$E\left[q\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\right)\right] = a + c\overline{Var} \tag{67}$$

Megoldva az

$$\begin{aligned} u\left(\overline{E} - k\overline{\sigma}\right) &= a + b\left(\left(\overline{E} - k\overline{\sigma}\right) - \overline{E}\right) \\ &\quad + c\left(\left(\overline{E} - k\overline{\sigma}\right) - \overline{E}\right)^2 \\ &= a - bk\overline{\sigma} + ck^2\overline{\sigma}^2, \\ u\left(\overline{E}\right) &= a + b0 + c0^2, \\ u\left(\overline{E} + k\overline{\sigma}\right) &= a + bk\overline{\sigma} + ck^2\overline{\sigma}^2 \end{aligned} \tag{68}$$

egyenleteket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a &= u\left(\overline{E}\right), \\ b &= \frac{u\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) - u\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right)}{2k\overline{\sigma}}, \\ c &= \frac{u\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) + u\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right) - 2u\left(\overline{E}\right)}{2k^2\overline{\sigma}^2}. \end{aligned} \tag{69}$$

Ebből már felírható a várható hozamot közelítő függvénycsalád:

$$\begin{aligned} f_k\left(\overline{E}, \overline{Var}, u(.)\right) &= E\left[q\left(\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x}\right)\right] \\ &= u\left(\overline{E}\right) + \frac{u\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) + u\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right) - 2u\left(\overline{E}\right)}{2k^2}. \end{aligned} \tag{70}$$

Nézzük most meg, hogy a (64) közelítőfüggvényt hogyan tudjuk beilleszteni a fenti függvénycsaládba.

Lemma 3.1 *Definiáljuk f_0-nak a (64) közelítőfüggvényt. Ekkor igaz, hogy:*

$$f_k \to f_0, \text{ ha } k \to 0.$$

Bizonyítás: A L'Hospital-szabályt kétszer alkalmazva:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0} f_k &= \lim_{k\to 0} u\left(\overline{E}\right) + \frac{u\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) + u\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right) - 2u\left(\overline{E}\right)}{2k^2} \\ &= u\left(\overline{E}\right) + \lim_{k\to 0} \frac{\overline{\sigma}u'\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) - \overline{\sigma}u'\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right)}{4k} \\ &= u\left(\overline{E}\right) + \lim_{k\to 0} \frac{\overline{\sigma}^2u''\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) + \overline{\sigma}^2u''\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right)}{4} \\ &= u\left(\overline{E}\right) + \frac{1}{2}u''\left(\overline{E}\right)\overline{Var} \\ &= f_0. \end{aligned}$$

□

Világos, hogy adott k és u függvény esetén f_k csak $\overline{E}$-től és $\overline{Var}$-tól függ. Ha belátjuk, hogy ez az f_k $\overline{E}$-nek monoton növő illetve $\overline{Var}$ monoton csökkenő függvénye, akkor azt kapjuk, hogy *ha egy befektető ezen közelítő függvények valamelyikét használja a számára leghasznosabb portfólió keresésére, akkor biztosan egy átlag-variancia hatékony portfóliót fog választani.* Ezt a tulajdonságot mondja ki bizonyos feltételek mellett a következő lemma:

Lemma 3.2 *Ha $u' > 0$, $u'' < 0$, és $u'''(r) \geq 0$ minden $\overline{E} - k\overline{\sigma} < r < \overline{E} + k\overline{\sigma}$ esetén, akkor f-et egy $\left(\overline{E}, \overline{Var}\right)$ hatékony portfólió maximalizálja.*

Bizonyítás: $k = 0$ esetén az állítás triviális. A $k > 0$ esetre először nézzük (70) $\overline{\sigma}$ szerinti deriváltját. Mivel $u'' < 0$, ezért:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \overline{\sigma}} = \frac{u'\left(\overline{E}+k\overline{\sigma}\right) - u'\left(\overline{E}-k\overline{\sigma}\right)}{2k} < 0.$$

Tehát f $\overline{\sigma}$-nak monoton csökkenő függvénye, ezért pedig $\overline{Var} = \overline{\sigma}^2$-nek is. Nézzük most (70) $\overline{E}$ szerinti deriváltját, $\xi = k\overline{\sigma}$-t behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \overline{E}} = u'\left(\overline{E}\right) + \frac{\left[u'\left(\overline{E}+\xi\right) + u'\left(\overline{E}-\xi\right) - 2u'\left(\overline{E}\right)\right]\overline{Var}}{2\xi^2} \tag{71}$$

A Taylor-tételből következően

$$u'\left(\overline{E}+\eta\right)=u'\left(\overline{E}\right)+u''\left(\overline{E}\right)\eta+\frac{1}{2}u'''\left(\overline{E}+\theta\right)\eta^2 \tag{72}$$

valamilyen 0 és η közötti θ-ra. Behelyettesítve ezt (71)-be, az $u'\left(\overline{E}+\xi\right)$ és $u'\left(\overline{E}-\xi\right)$ helyére, azt kapjuk, hogy (valamilyen θ_1 illetve θ_2 0 és ξ közötti értékekre)

$$\frac{\partial f_k}{\partial \overline{E}}=u'\left(\overline{E}\right)+\frac{\left[u'''\left(\overline{E}+\theta_1\right)+u'''\left(\overline{E}-\theta_2\right)\right]\overline{Var}}{4}>0,$$

az u'-re illetve u'''-re tett feltevések miatt. Tehát azt kaptuk, hogy f $\overline{E}$-nek monoton növő függvénye. Ebből és abból, hogy $\overline{Var}$-ban pedig monoton csökkenő, következik a lemma állítása. $\square$

Levy és Markowitz a már említett cikkben statisztikailag vizsgálták az f_k függvények és a várható hasznosság kapcsolatát, és arra jutottak, hogy az f_k függvényeknek legalább valamelyike az esetek nagy részében jó közelítést ad. Ebből pedig a következő gondolatmenetet vezették le: ha egy befektető az átlag- variancia hatékony portfóliók közül választja ki a számára legkedvezőbbet, akkor sem választ rosszabbat, mintha f_k-k közül a legjobbat maximalizálná; és mivel az f-ek közül legalább néhány jól közelíti a várható hasznosságot, éppen ezért nem érheti a befektetőt jelentős veszteség, ha a számára legkedvezőbb portfóliót az átlag-variancia hatékony portfóliók közül választja ki.

3.3. A hasznossági függvény közelítése lineár-kvadratikus kockázati mértékkel

Levy és Markowitz fenti cikke, amely többek közt az átlag-variancia hatékony portfólió keresésének jelentőségét is igazolni látszott, nem mindenkit győzött meg. King például [22] cikkében felveti, hogy a Markowitzék által leírt közelítések esetében ugyan léteznek olyan hozam eloszlások, amikor ezek elég pontosak, de például asszimetrikus eloszlások esetén a közelítések romlanak. Ezzel pedig érvelésük érvényessége –mivel hogy az $\boldsymbol{r}$ valószínűségi eloszlására nem tesznek feltételt– leszűkül arra az esetre, ha a közelítések maguk a hasznossági függvények.

Éppen ezért King azt ajánlotta, hogy definiáljuk lineár-kvadratikus mértékek egy osztályát, amely megtartja a Taylor-közelítés lokális kvadratikus tulajdonságait, de lehetőséget ad arra, hogy közelítőfüggvényünk konkáv és monoton növekvő legyen (akárcsak u).

Definíció 3.1 Lineár-kvadratikus mértékek*nek hívjuk a következő típusú függvényeket:*

$$\rho_{q^-,q^+}(r)=\begin{cases} q^-r-\frac{1}{2}\left(q^-\right)^2 & ha\ r\le q^-,\\ \frac{1}{2}r^2 & ha\ q^-<r<q^+,\\ q^+r-\frac{1}{2}\left(q^+\right)^2 & ha\ q^+\le r,\end{cases}$$

ahol a q^- és q^+ paraméterek a függvény (lineáris részének) baloldali illetve jobboldali meredekségei. (A konvexitás érdekében megköveteljük, hogy $q^-\le q^+$ legyen.)

Sokfajta lineár-kvadratikus mérték létezik. Az egyik legtöbbet használt ezek közül az (alsó) szemivariancia robosztus változata:

$$\rho_{-k,0}(r) = \begin{cases} -kt - \frac{1}{2}k^2 & \text{ha } r \leq -k, \\ \frac{1}{2}r^2 & \text{ha } -k \leq r \leq 0, \\ 0 & \text{ha } 0 \leq t. \end{cases}$$

Ez a kockázati mérték a szemivarianciához képest kevésbé veszi figyelembe a "kilógó" megfigyelési értékeket, ezért hasznos lehet, ha az hozamok eloszlását egy megfigyelési mintával jellemezzük. Ezzel a fajta mértékkel mi nem foglalkozunk, erről további részletek [18]-ben találhatóak.

Visszatérve u másodfokú közelítéséhez, módosítsuk $u_{\overline{E}}$-t úgy, hogy az új approximáció konkáv és monoton növekvő legyen:

$$u_{lk}(r) := u\left(\overline{E}\right) + u'\left(\overline{E}\right)\left(r - \overline{E}\right) + u''\left(\overline{E}\right)\rho_{q^-,q^+}\left(r - \overline{E}\right). \tag{73}$$

Lényegében ezt az új közelítést úgy kaptuk, hogy (63) kvadratikus részét a következő lineár-kvadratikus részre cseréltük:

$$u''\left(\overline{E}\right)\rho_{q^-,q^+}\left(r - \overline{E}\right).$$

Ezt a függvényt részletesebben felírva:

$$u''\left(\overline{E}\right)\rho_{q^-,q^+}\left(r - \overline{E}\right) =$$
$$\begin{cases} u''\left(\overline{E}\right)q^-\left(r - \overline{E}\right) - \frac{1}{2}u''\left(\overline{E}\right)\left(q^-\right)^2, & \text{ha } \left(r - \overline{E}\right) \leq q^-, \\ \frac{1}{2}u''\left(\overline{E}\right)\left(r - \overline{E}\right)^2, & \text{ha } q^- \leq \left(r - \overline{E}\right) \leq q^+, \\ u''\left(\overline{E}\right)q^+\left(r - \overline{E}\right) - \frac{1}{2}u''\left(\overline{E}\right)\left(q^+\right)^2, & \text{ha } q^+ \leq \left(r - \overline{E}\right). \end{cases}$$

Most pedig nézzük meg, hogy a lineár-kvadratikus függvény baloldali illetve jobboldali meredekségeit, tehát a q^- és q^+ paramétereket hogyan érdemes megválasztani. Egyrészt mivel az approximációtól megköveteljük, hogy $\overline{E}$-ben pontos értéket adjon, ezért kell, hogy $\rho_{q^-,q^+}(0) = 0$ legyen. Ez pontosan akkor teljesül, hogy ha $q^- \leq 0 \leq q^+$. A következő, amit szeretnénk, hogy u_{lk} monoton növekvő és konkáv hasznosság legyen. Feltételünk szerint $u'' \leq 0$ mindig, és emiatt illetve $q^- \leq q^+$ miatt u_{lk} konkáv. Tehát már csak u_{lk} monoton növekvőségét kell biztosítanunk, ez pedig a konkávitás miatt pontosan akkor fog teljesülni, ha

$$\lim_{r\to\infty} u'_{lk}(r) = u'\left(\overline{E}\right) + u''\left(\overline{E}\right)q^+ \geq 0.$$

Ebből pedig következik, hogy u_{lk} monoton növekvő akkor és csak akkor, ha

$$q^+ \leq \frac{-u'\left(\overline{E}\right)}{u''\left(\overline{E}\right)}.$$

Feltételeinket összegezve azt kapjuk, hogy q^- és q^+ akkor vannak megfelelően megválasztva, ha

$$q^- \le 0 \le q^+ \le \frac{-u'\left(\overline{E}\right)}{u''\left(\overline{E}\right)}.$$

Esetünkben a további tárgyalás folyamán q^- kevéssé bír jelentőséggel (mint már fentebb említettük ennek inkább statisztikai robosztusság szempontjából van jelentősége) ezért mostantól fogva feltesszük, hogy $q^- = -\infty$. Változtatva q^+-t a $\left[0, -u'\left(\overline{E}\right)/u''\left(\overline{E}\right)\right]$ intervallumon, az u_{lk} approximációnak végig megmarad egyrészt az a tulajdonsága, hogy az $\overline{E}$ helyen az eredeti függvény értékét veszi fel, másrészt az, hogy konkáv és monoton növekvő.

A fenti intervallum két végpontja különös jelentőséggel bír. Ha q^+-ot az intervallum baloldali végpontjának választjuk, akkor a Levy-Markowitz féle gondolatmenettel pont az *átlag-(alsó)szemivariancia* problémához jutunk, amely esetünkben (a célfüggvény konstans tagjait elhagyva) a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & E\left[\rho_{-\infty,0}\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x}\right)\right] \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} \ge \overline{E}, \\ & \boldsymbol{x} \in X \text{ feltételeket.} \end{array} \tag{74}$$

Az átlag-szemivariancia problémával már az előzőekben is találkoztunk (lásd (32)), akkor a problémát abból a tényből származtattuk, hogy a befektető csak az elvárt hozamtól lefelé való eltérést próbálja elkerülni. Esetünkben a hasznossági függvény egyfajta közelítésének maximalizálása során jutottunk ugyanehhez a problémához, és ez némi újdonsággal bír.

Ebben az esetben, amikor q^+-t az intervallum bal végpontjának, tehát $q^+ = 0$-nak választjuk, az u_{lk} közelítő függvény meredeksége minden $\overline{E}$-nél nagyobb r helyen $u'\left(\overline{E}\right)$ lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy $r \ge \overline{E}$ esetén az u_{lk} közelítő függvény vagy az eredeti hasznossági függvény fölött vagy azon fog futni. Ez pedig azt jelenti, hogy $\overline{E}$-nél nagyobb hozam esetén *túlbecsüljük* a befektető által elért hasznosságot. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ha a portfólió kiválasztásához a várható hozamot és az (alsó)szemivarianciát vesszük figyelembe, (tehát átlag- szemivariancia hatékony portfóliót választunk,) akkor a kapott portfólió *kockázatosabb* lesz az általunk elvártnál.

A fentiek alapján, ha egy asszimetrikus kockázati mértéket akarunk bevezetni, az tűnik észszerűnek, hogy a hasznossági függvény egy olyan közelítésével konzisztens mértéket találjunk, amely közelítés minél inkább elbagatellizálja a várható hozamtól felfelé való eltérést, miközben megtartja a hasznossági függvény alakjának tulajdonságait (monoton növekedés, konkávság). Ez vezet el minket ahhoz a gondolathoz, hogy q^+-ot legcélszerűbb a megengedett intervallum jobboldali pontjának választani, tehát

$$q^+ := \lambda\left(\overline{E}\right) := \frac{-u'\left(\overline{E}\right)}{u''\left(\overline{E}\right)}.$$

A q^+ értékének ilyen választása azt jelenti, hogy az u_{lk} közelítő függvény meredeksége 0 lesz, ha $r \to 0$. Definiálhatjuk $\lambda\left(\overline{E}\right)$-t úgy is mint a befektető "kockázat tűrési" paraméterét, tehát a kockázat (variancia) azon mennyiségét, amelyet a befektető hajlandó elfogadni a várható hozam ($\overline{E}$-ből való) infinitezimális növekedéséért. Nagyobb $\lambda\left(\overline{E}\right)$ esetén kockázat tűrőbb a befektető. Például egy olyan befektető esetén, akinek a hasznossági függvénye a logaritmus függvény, a kockázat tűrési paraméter:

$$\lambda\left(\overline{E}\right) = \overline{E}.$$

Ennek alapján azt a megfigyelést tehetjük, hogy ilyen hasznossági függvény esetén 0 és $2\overline{E}$ közötti r-ekre *az asszimetrikus (kockázat-tűrési) kockázati mérték megegyezik a szimmetrikus (variancia) kockázati mértékkel.* Más szóval, ha egy befektetőnek ilyen a hasznossági függvénye és nem lát rá reális esélyt, hogy bármelyik eszköz az ő portfóliójában nagyobb hozammal bírjon, mint 100%, akkor használja a szimmetrikus modellt, és ne vásárolja túl magát. A másik oldalról pedig, ha valaki befektetésekor olyan értékpapírokat is figyelembe vesz, amelyek rendelkeznek a várható hozam fölötti kellő nagyságú potenciális hozam lehetőségével, használják az aszimmetrikus modellt, mert ezek az eszközök csak ebben az esetben fognak szerepelni a hatékony határgörbében.

A kockázattűrési hatékony határgörbét a következő optimalizálási probléma megoldásával állíthatjuk elő:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & E\left[\rho_{-\infty,\lambda(\overline{E})}\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x}\right)\right] \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{x} \geq \overline{E}, \\ & \boldsymbol{x} \in X \text{ megszorításokat.} \end{array} \tag{75}$$

Végül még pár megjegyzést fűznénk az asszimetrikus kockázati mértékekhez. Először is, ha az eszközök hozam eloszlása szimmetrikus, akkor az átlag-variancia, átlag-szemivariancia, és a kockázattűrési hatékony határgörbe természetesen megegyeznek. Az aszimmetrikus kockázati mértékek csak akkor bírnak jelentőséggel, ha a befektető a pénzügyi eszközök aszimmetrikus eloszlású hozamára számít. Léteznek tanulmányok, amelyek múltbeli megfigyelések alapján a pénzügyi eszközök hozam eloszlásának aszimmetrikus eloszlását bizonyítják (lásd például [17], [16], [38]). A következőkben még két lehetséges forrását említjük meg az aszimmetrikus hozam eloszlásnak.

Egyrészt, talán ez a legfontosabb eset, több pénzügyi eszköznek, mint például az *opcióknak*, eleve olyan a konstrukciójuk, hogy hozamuk eloszlása aszimmetrikus. Más pénzügyi eszközök pedig rejtett opciókat rejtenek magukban, mint például a jelzáloggal terhelt értékpapírok. Ha ilyen eszközöket is megengedünk portfóliónk összeállításánál, akkor bizony mindenképp szembe találkozunk aszimmetrikus eloszlásokkal.

Másrészt, sok befektető a részvény hozam eloszlásokatt egy lineáris faktor-modell segítségével a következőképp becsüli: $\boldsymbol{r} = \beta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\epsilon}$. A faktorok általában valamilyen makrogazdasági vagy gazdaságpolitikai mérőszámok. A befektető a múltbéli adatok megfigyelésével általában arra jut, hogy ezeknek a mérőszámoknak az eloszlása aszimmetrikus. Ez pedig a faktor-modellen keresztül implikálja a részvény hozam aszimmetrikus eloszlását.

3.4. Követő modellek és a minimális megbánás

Aszimmetriával olyan modellekben is találkozhatunk, amelyek közel állnak a gyakorlatban felmerülő pénzügyi problémák gondolatmenetéhez. Írjunk fel először a Markowitz-féle átlag-variancia modellt egyfajta "követő modell" formátumban:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & E\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}-\tau\right)^2 \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{x}\in X \end{array} \tag{76}$$

(Be lehet látni, hogy az átlag-variancia hatékony határgörbe ezen a modellen keresztül is generálható, ha τ-t megfelelő határok között változtatjuk, lásd [23].) Mi ezt a modellt kétféleképp módosítjuk. Egyrészt a τ célváltozót tekinthetjük valószínűségi változónak, másrészt az efficient frontiert parametrizálhatjuk egy másik kritérium segítségével, legyen ez például a portfólió összeállításának költsége.

Ezen általánosítások a követő modell következő alakjához vezetnek:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & E\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}-\tau\right)^2 \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\le d, \\ & \boldsymbol{x}\in X \text{ feltételeket} \end{array} \tag{77}$$

A hatékony határgörbe kirajzolása d növelésével párhuzamosan történik, ahol d 0 és azon érték között mozog, amennyiért megvehetjük a τ eloszlását a piacon. A modell interpretációja a következő. A befektető olyan portfólióra vágyik, amely rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}\ge\tau, & \text{majdnem biztosan, és} \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & \text{a lehető legkisebb.} \end{array}$$

Ilyen akkor merül fel, ha egy konkrét τ hozameloszlású portfóliót akarunk összeállítani legfeljebb d költséggel. A hatékony határgörbe olyan portfóliókat fog adni, amelyek optimálisan követik az óhajtott hozameloszlást különböző költségszintek mellett. Ez a fajta probléma felírás lehetőséget ad aszimmetrikus eloszlások bevezetésére. Ha a τ célhozam eloszlása aszimmetrikus, akkor az eszközök kombinációja, amelyet a célhozam "lemásolására" választottunk követni fogja az aszimmetriát (a legkisebb négyzetek elve szerint) egy adott d költség mellett. Természetesen, valaki minél többet költ, annál jobban megközelíti a céleloszlást.

Egy fontos kérdés, hogy milyen célhozamot követeljen meg a befektető a portfóliótól. Egy elég természetes választ adott erre Dembo és King [9]. Tegyük föl, hogy tökéletes előrelátásunk megengedi, hogy pontosan előre jelezzük az eszközök $\boldsymbol{r}$ hozamát. Legyen $\tau(\boldsymbol{r})$ az optimális hozam tökéletes előrelátás esetén. Ez formulával leírva a következő:

$$\tau(\boldsymbol{r})=\max\left\{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\in X\right\}.$$

Természetesen mi nem látunk tökéletesen előre, ezért a fönt fölírt optimális hozam egy valószínűségi változó lesz, amely az $\boldsymbol{r}$ valószínűségi vektortól függ. A követése ennek az optimális hozamnak a következő problémához vezet:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & E\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \tau\left(\boldsymbol{r}\right)\right)^2 \\ \text{tekintve, hogy} & x \in X. \end{array} \tag{78}$$

Mivel $\tau(\boldsymbol{r})$ a legjobb hozam, amit el lehet érni, ezért a kockázati mérték csak a lefelé irányuló kockázatot bünteti. A probléma megoldását "minimális megbánás" portfóliónak hívják. A megbánás az a hozam, amelyet a nem tökéletes előrelátás miatt áldoztunk fel, képletben $R(\boldsymbol{x}) = \tau(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}$. Az $\boldsymbol{x}$ portfólió teljesítményének egy lehetséges mértéke, hogy az $R(\boldsymbol{x})$ megbánás mennyire közelíti meg a tökéletes előrelátást. (78) megoldása éppen ezt a megbánás mértéket minimalizálja.

Érdekes összehasonlítani a két filozófiát, egyrészt az ezen szakasz előtt tárgyalt hasznosság maximalizálást, másrészt az ebben a szakaszban tárgyalt követést. A döntési problémában, amelyet ebben a szakaszban írtunk le, a döntéshozó le szándékozza fedezni τ-t az $\boldsymbol{x}$ portfólióval, melynek hozama $\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x}$, összeállításának költsége pedig $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Tehát a befektető összességében most fizet $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ összeget, és később kap $\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \tau\right)$-t.

Fölvázolva a döntést, mint hasznosság maximalizálási problémát, valaki szeretné $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x} - \tau$ hasznosságát maximalizálni. A hasznosság maximalizálás művelete, a hasznossági függvény alakjából és az $\boldsymbol{r}$ és τ eloszlásából indirekt módon meghatározza azt a megfelelő d költséget, amennyibe a lefedező portfólió összeállítása kerülni fog, mivel ennek a költségnek hatása van a portfólió várható hozamára.

Felvázolva a döntést, mint követési problémát, valaki keres egy portfóliót, melynek összeállítása legfeljebb d-be kerül, és amelynek hozama (valamilyen értelemben) összeillik a τ cél eloszlással.

A probléma felfogható egyfajta hozam arbitrázs problémaként is, ahol valaki eladja τ-t, vásárol d költséggel egy $\boldsymbol{x}$ portfóliót, és elfogadja az $\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \tau$ kockázatot. A kérdés ilyenkor az, hogy mennyiért érdemes τ-t eladni cserébe a kockázatért. Feltételezhetően a válasz a portfólió nettó hozamától függ.

3.5. A lineár-kvadratikus hatékony határgörbék kiszámolása

Az általunk kiválasztott lineár-kvadratikus függvényt, az egyszerűség kedvéért a következőkben jelöljük így:

$$\rho(r) := \rho_{q^-,q^+}(r).$$

A leírandó eljárás által megoldandó parametrikus lineár-kvadratikus sztochasztikus programozási feladat pedig legyen a következő:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & E\left[\rho\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \tau\right)\right] \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \le d, \\ & \boldsymbol{x} \in X. \end{array} \tag{79}$$

Általánosságban nem tudjuk megadni zárt formulával az $x \mapsto E\left[\rho\left(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \tau\right)\right]$ célfüggvényt. Másrészt, ha meg is tudnánk adni, akkor is egy nagy méretű nemlineáris programozási feladatba ütköznénk, amelyre nincs megbízható megoldási technika. De szerencsére a szakaszonként lineár-kvadratikus függvényekre alkalmazhatjuk a kvadratikus programozási módszereket.

Az eljárást, ami kvadratikus programozási feladattá alakítja a (79) problémát King és Jensen dolgozta ki [23]. Az első lépés (79) kvadratikus feladattá való konvertálásában, hogy diszkretizáljuk a valószínűségi mértéket, hacsak nem már eleve csak véges számú értéket vehetett fel a valószínűségi változó. Tehát feltesszük, hogy a befektető *scenáriók* egy véges $\{\boldsymbol{r}_s : s \in S\}$ halmazában gondolkodik, melynek elemei a jövőben lehetséges (vagy elképzelhető) hozam kombinációk, és mindegyik scenárióhoz tartozik egy p_s valószínűség, amely az adott hozam kombináció előfordulásának (becsült vagy valódi) valószínűségét mutatja, természetesen $\sum_S p_s = 1$.

Ilyen fajta eloszlás mellett pedig (79) célfüggvénye már valóban egy szakaszonként lineár-kvadratikus függvény és ezt majd tényleg meg tudjuk oldani kvadratikus programozási módszerekkel. A feladatot úgy fogjuk kvadratikus programozási feladattá alakítani, hogy új változók bevezetésével a célfüggvényt, értelmezési tartománya egyes szakaszain, külön-külön fogjuk értékelni. Minden s scenárióra bevezetünk három új változót, legyenek ezek v_s, v_s^- és v_s^+, és a következő egyenleteket, és egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} v_s - v_s^- + v_s^+ &= \boldsymbol{r}_s^T\boldsymbol{x} - \tau_s, \\ v_s^- \geq 0,\ v_s^+ &\geq 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Mint majd a következő lemmában látni fogjuk, az első változó ρ kvadratikus részét, míg a másik két változó a bal- illetve jobboldali lineáris részt fogja reprezentálni.

Lemma 3.3 *Az*

$$\frac{1}{2}v_s^2 - q^- v_s^- + q^+ v_s^+ \tag{81}$$

kifejezés minimuma a (80) megszorítások mellett éppen $\rho_{q^-,q^+}\left(\boldsymbol{r}_s^T\boldsymbol{x} - \tau_s\right)$ értékét fogja adni.

Bizonyítás: Először is az egyszerűség kedvéért

$$t := \boldsymbol{r}_s^T\boldsymbol{x} - \tau_s.$$

A bizonyítás első lépése, hogy belátjuk, hogy a (81) kifejezést valamilyen adott t mellett minimalizáló (v_s, v_s^-, v_s^+) változó vektorok között van olyan, amelyben vagy v_s^- vagy v_s^+ nulla. Valóban, tegyük fel, hogy $v_s^- > 0$ és $v_s^+ > 0$ és mondjuk $v_s^- \leq v_s^+$. Ebben az esetben

$$\frac{1}{2}v_s^2 - q^- v_s^- + q^+ v_s^+ = \frac{1}{2}v_s^2 + \left(q^+ - q^-\right) v_s^- + q^+\left(v_s^+ - v_s^-\right) \geq \frac{1}{2}v_s^2 + q^+\left(v_s^+ - v_s^-\right),$$

mivel $q^+ \geq q^-$ és $v_s^- > 0$-ból következik, hogy $\left(q^+ - q^-\right) v_s^- \geq 0$. Tehát ilyenkor tényleg a $(v_s, 0, v_s^+ - v_s^-)$ is minimalizáló vektor. Ugyanígy megkaphatjuk, hogy $v_s^- \geq v_s^+$ esetén $(v_s, v_s^- - v_s^+, 0)$ minimalizáló vektor.

Most már (81) minimum keresését két esetre tudjuk bontani, az első esetben v_s^--t nullának lerögzítve keressük a minimumot, a második esetben v_s^+-t nullának lerögzítve keressük a minimumot. Ezen két minimalizáló függvénynek a minimumát véve, a bizonyítás első felében kapottak alapján, éppen megkapjuk (81) minimumát a (80) feltételek mellett.

Nézzük az első esetet, amikor $v_s^- = 0$. Ilyenkor adott t mellett a minimalizálási probléma:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \frac{1}{2}v_s^2 - q^-(v_s - t) \\ \text{tekintve, hogy} & v_s \geq t. \end{array}$$

Mivel a célfüggvény (v_s-ben) egy konvex parabola, melynek minimumhelye q^-, ezért a megszorító feltételt is figyelembe véve:

$$\text{Min}\ \frac{1}{2}v_s^2 - q^-(v_s - t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(q^-)^2 - q^-(q^- - t), & \text{ha } t \leq q^-, \\ \frac{1}{2}t^2, & \text{ha } t > q^-. \end{cases}$$

A második esetben, ha $v_s^+ = 0$, akkor adott t mellett a minimalizálási probléma:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \frac{1}{2}v_s^2 + q^+(t - v_s) \\ \text{tekintve, hogy} & v_s \leq t. \end{array}$$

Ebben az esetben a célfüggvény (v_s-ben) egy konvex parabola, melynek minimumhelye q^+, ezért a megszorító feltételt is figyelembe véve:

$$\text{Min}\ \frac{1}{2}v_s^2 + q^+(t - v_s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(q^+)^2 + q^+(t - q^+), & \text{ha } t \geq q^+, \\ \frac{1}{2}t^2, & \text{ha } t < q^+. \end{cases}$$

Az előzőekből pedig már látszik, hogy a két esetben szereplő minimalizáló függvény közös minimuma:

$$\begin{array}{rl} q^-t - \frac{1}{2}(q^-)^2, & \text{ha } t \leq q^-, \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{ha } q^- < t < q^+, \\ q^+t - \frac{1}{2}(q^+)^2, & \text{ha } q^+ \leq t. \end{array}$$

Ez pedig pont a lemma állítása. □

Ezek után már fel is tudjuk írni a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{array}{rll} \text{Min} & \sum_{s\in S} p_s \left(\frac{1}{2}v_s^2 - q^-v_s^- + q^+v_s^+\right) & \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq d, & \\ & v_s - v_s^- + v_s^+ = \boldsymbol{r}_s^T\boldsymbol{x} - \tau_s, & \forall s \in S, \\ & v_s^- \geq 0,\ v_s^+ \geq 0, & \forall s \in S, \\ & \boldsymbol{x} \in X. & \end{array} \tag{82}$$

A (82) kvadratikus probléma, a lemma állítását is figyelembe véve, teljesen ekvivalens a (79) lineár-kvadratikus követő probléma véges $\boldsymbol{r}$ eloszlást feltételező esetével. A (82) probléma pedig már megoldható kvadratikus programozási algoritmusok segítségével. Vegyük észre, hogy a célfüggvény egyszerű négyzetek összege, ami egy elég egyszerű kvadratikus formula. Problémát inkább csak az $\boldsymbol{r}_s$ mintákból összeálló mátrix jelenthet. Ha $|S|$ nagy, akkor az előbb említett nagy és sűrű mátrix okoz is problémát a feladat megoldása során. Ennek ellenére King és Jensen (lásd [23]) RISK hardver és megfelelő speciális szoftverek segítségével meglepően jó eredményeket értek el az ilyen fajta problémák megoldásában.

4. Egy belső pontos algoritmus nagy méretű portfólió optimalizációra

4.1. Minimum-normájú pont probléma a portfólió kiválasztásban

A *minimum-normájú pont probléma* alatt a következőt értjük: adva van egy konvex politóp, mint n darab $\boldsymbol{R}^k$-beli pont konvex burka, és feladatunk megtalálni ennek a politópnak a minimális normájú pontját. Tehát a probléma feladata megoldani a következő speciális kvadratikus programozási problémát:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \|\boldsymbol{y}\| \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array} \tag{83}$$

feltételeket, ahol $P \in \boldsymbol{R}^{k\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{e}^T = (1, 1, \ldots, 1)$ és $\boldsymbol{p}_{.j}$ jelöli a P mátrix j-edik oszlopát, melyhez egy $\boldsymbol{R}^k$-beli pont tartozik. A fejezet folyamán végig feltesszük, hogy $n > k$ és hogy P sorai függetlenek.

Ebben a szakaszban háromféle problémát mutatunk be, az átlag-variancia modellt, az index követő modellt, és a többfaktotú portfólió kiválasztási modellt, mint olyan modelleket, amelyek minimum-normájú pont problémának vagy egy variánsának tekinthetőek.

4.1.1. Az átlag-variancia probléma

Most tekintsük a probléma olyan változatát, amikor n darab értékpapírunk van, és k darab végállapot, amely egy adott jövőbeli időpontban bekövetkezhet. Tehát a jövőbeli hozameloszlást felírhatjuk egy $P = (p_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{k\times n}$ diszkrét kifizetési mátrixszal, a végállapot valószínűségi eloszlását pedig egy $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^k$ vektorral. Tegyük a feladatot egyszerűbbé úgy, hogy legyen $\boldsymbol{p} = (1/k, \ldots, 1/k)$.

Tegyük fel, hogy a legutóbbi k megfigyelési periódus hozamadatai híven tükrözik a hozamok eloszlását. Ennek fényében a várható hozamokat, és a kovariancia mátrixot a múltbeli adatokból fogjuk kiszámolni.

A j-edik értékpapír r_j várható hozama a következőképp írható:

$$r_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} p_{ij}.$$

A i-edik és j-edik értékpapír hozama közti v_{ij} kovariancia pedig a következőképp:

$$v_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} (p_{li} - r_i)(p_{lj} - r_j).$$

Legyen $V = (v_{ij})$ és $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$. Ekkor az *átlag-variancia probléma* a következőképpen néz ki:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \boldsymbol{x}^T V \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} = \alpha, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array} \tag{84}$$

feltételeket, ahol $\boldsymbol{x}$ szokás szerint a portfólióban szerplő értékpapírok súlyait jelöli, míg most az elvárt várható hozamot jelölje α.

Ebben a formájában a probléma megoldása nagy méret esetén igen bonyolult lehet, az általában sűrű V mátrix miatt, de ezenkívül maga a probléma eltárolása is nagy memóriahelyet igényel. Hogy elkerüljük ezeket a nehézségeket, a a minimum-normájú pont problémára vonatkozó, később leírandó algoritmust fogjuk használni a portfólió kiválasztási problémákra.

Ebben az esetben a portfólió lehetséges jövőbeni hozamait $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$ mutatja, míg a várható hozam az $(1/k)\, \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y}$ kifejezés eredményével egyenlő. Éppen ezért a (84) probléma a következő legközelebbi-pont problémával ekvivalens:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & (\boldsymbol{y} - \alpha \boldsymbol{e})^T (\boldsymbol{y} - \alpha \boldsymbol{e}) \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, \\ & (1/k)\, \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y} = \alpha, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}. \end{array} \tag{85}$$

Az $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \alpha \boldsymbol{e}$ helyettesítést végrehajtva a probléma új formája:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \tilde{\boldsymbol{y}}^T \tilde{\boldsymbol{y}} \\ \text{tekintve, hogy} & \tilde{\boldsymbol{y}} = P\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{e}, \\ & \boldsymbol{e}^T \tilde{\boldsymbol{y}} = 0, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{array} \tag{86}$$

amely már egy minimum-normájú pont probléma. Ezért az átlag-variancia portfólió kiválasztási problémát tudjuk egy $\boldsymbol{R}^k$-beli minimum- normájú pont problémaként értelmezni.

4.1.2. Az index követő modell és a többfaktorú modell

A fent említett átlag-variancia portfólió kiválasztási probléma mellett a portfólió kiválasztás területén egyéb más minimum-normájú pont problémák is felmerülnek. Ilyenek például az index követési probléma illetve a többfaktorú portfólió kiválasztási probléma.

Tegyük fel, hogy van n darab értékpapírunk, és adva van k darab, a cégek jellegzetességeit mérő mutató, mint például a befektetők által gyakran figyelemmel kísért P/E illetve P/B, úgy, hogy az értékpapírok hozama megközelítően ezen mutatók lineáris függvénye. Jelölje az j-edik cég i-edik mutatóját d_{ij}, és legyen $D = (d_{ij})$. Az előbbi feltételezések mellett a következő relációt kapjuk:

$$\boldsymbol{r} = D^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\epsilon},$$

ahol $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^n$ és feltesszük, hogy $E(\epsilon_i) = 0$, $Var(\epsilon_i) = \sigma_i^2$ és $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$.

Legyen az értékpapírpiaci (általában tőzsde) indexnek megfelelő súlyozás $\boldsymbol{w}_M$, a mi portfóliónkban pedig szerepeljenek az értékpapírok $\boldsymbol{w}_p$ súlyozással (tehát most $\boldsymbol{x}$ helyett $\boldsymbol{w}_p$ írunk). Az értékpapírpiaci index $E(\boldsymbol{r}_M)$ várható hozama, és a portfólió $E(\boldsymbol{r}_p)$ várható hozama a következőképp írható:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{r}_M) &= \boldsymbol{w}_M^T E(\boldsymbol{r}) = E\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right)^T D\boldsymbol{w}_M, \\ E(\boldsymbol{r}_p) &= \boldsymbol{w}_p^T E(\boldsymbol{r}) = E\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right)^T D\boldsymbol{w}_p. \end{aligned} \tag{87}$$

Mivel (87) szerint fenáll a $D\boldsymbol{w}_M = D\boldsymbol{w}_p \to E(\boldsymbol{r}_M) = E(\boldsymbol{r}_p)$ reláció, ezért a következő probléma megoldásával tudunk konstruálni egy index követő portfóliót:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \|\boldsymbol{y}\| \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{w}_p - D\boldsymbol{w}_M, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{w}_p = 1, \\ & \boldsymbol{w}_p \geq \mathbf{o}. \end{array} \tag{88}$$

Ezt az úgynevezett *index követési problémát* és megoldását a befektetők gyakran használják, illetve alkalmazzák.

Ha $E\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}$ és $F = \left[Cov\left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j\right)\right]$ ismert, vagy jól becsült, akkor a *többfaktorú modell*t a következőképpen kapjuk:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \boldsymbol{x}^T \left(D^T F D + \Sigma\right) \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve a} & \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T D\boldsymbol{x} = \alpha, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array} \tag{89}$$

feltételeket, ahol $\Sigma = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$. Mivel F pozitív definit, létezik olyan S mátrix, hogy $S^T S = F$. Ezt a tényt felhasználva kapjuk a következő ekvivalens problémát:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{y} = SD\boldsymbol{x}, \\ & \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T D\boldsymbol{x} = \alpha, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}. \end{array} \tag{90}$$

Mint a föntiekben láttuk, az átlag-variancia modell, az index követő modell és a többfaktorú modell mindegyike átalakítható egy minimum-normájú pont problémává. Mindegyik modellben az információs halmazt, a múltbeli adatokat illetve a cég mutatókat, egyfajta politópként ábrázoltuk, és ezen a politópon definiáltuk a befektető hasznossági függvényét. Meg kell jegyezni, hogy a gyakorlatban a politóp k dimenziója mindegyik modellben lényegesen kisebb, mint n.

4.2. Néhány egyéb modell a témával kapcsolatban

A minimum-normájú pont problémává alakítás hasznos lehet néhány egyéb portfólió kiválasztási probléma megértésében is.

Az 1. fejezetben már találkozhattunk a Konno és Yamakazi [25] által bevezetett *átlagos abszolút eltérés modelljé*vel:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \sum_{i=1}^{k} |y_i - \alpha| \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, \\ & (1/k)\, \mathbf{e}^T \boldsymbol{y} = \alpha, \\ & \mathbf{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}. \end{array} \tag{91}$$

A modell hasonlít (85)-re, tekinthetjük úgy is, mint egy minimum-L_1- normájú pont problémát. Klafszky et al. [24] számos különbözőségi mértéket tárgyal az összeállítási problémával kapcsolatban. Sok az átlag-variancia problémához hasonló modell, többekközt az átlag- variancia és átlagos abszolút eltérés modell fejleszthető a kiválasztási problémában általuk elért eredmények segítségével.

Ha $\boldsymbol{y}_t \in \boldsymbol{R}^k$ jelöli a befektető által kívánt kifizetést, akkor tekinthetjük a következő modellt:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_t)\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_t) \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, \\ & \mathbf{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}. \end{array} \tag{92}$$

Ez a probléma magában foglalja az átlag-variancia probléma (85), és közeli kapcsolatban van a (88) index követő problémával is.

Hakansson és Grauer Hakansson több-periódusu portfólió elméletét alkalmazták[10]. Ők a következő nem lineáris programozási feladat megoldását tekintették optimális portfóliónak:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\gamma}\,(1 + y_i)^{\gamma} \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, \\ & \mathbf{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}, \end{array} \tag{93}$$

ahol P jelöli a múltbeli adatokat. Látható, hogy (93) és (85) csak célfüggvényeikben különböznek, de korlátozó feltételeik megegyeznek.

Ha a befektetőnek korlátozott tőkéje van és nem adhat el röviden, mint ahogy (85) illetve (91)-(93) feltételeiben is szerepelt, akkor igaz a következő tétel.

Tétel 4.1 *Legalább egy olyan optimális portfólió létezik, amelyben a pozitív súllyal szereplő (aktív) értékpapírok száma kisebb, vagy egyenlő, mint $k+1$.*

Bizonyítás: Egyrészt (85) illetve (91)-(93) bármely megengedett $\boldsymbol{y}$ megoldása eleme az $S = \left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^k : \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{x} \geq 0 \right\}$ politópnak. Másrészt Caratheodory-tétel szerint bármely $\boldsymbol{y} \in S$ kifejezhető legfeljebb $k+1$ P-beli oszlopvektor konvex kombinációjaként. Mivel az optimális megoldás is megengedett, ezért az előzőekből következik, hogy az ehhez tartozó $\boldsymbol{y}$ is eleme S-nek, és hogy ez is előállítható P legfeljebb $k+1$ oszlopának konvex kombinációjaként. □

A 4.1 tétel azt mondja, hogy ahhoz, hogy az aktív értékpapírok számát növelni tudjuk, növelni kell az információ mennyiségét.

4.3. Belső pontos algoritmus a portfólió problémára

Ebben a szakaszban egy hatékony belső pontos algoritmus mutatunk be nagy méretű portfólió optimalizációs problémákra. Tegyük fel, hogy a befektető k darab mutatót követ nyomon, és jelölje p_{ij} a j-edik cég i-edik mutatóját. Mivel a gyakorlatban a portfólió kiválasztási modellek lényegesen bonyolultabbak, mint a (86, 88, 89), ezért érdemesebb a következő portfólió kiválasztási problémát tekinteni:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}_f^T D \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{x}_p^T \Sigma \boldsymbol{x}_p\right) + \boldsymbol{c}_f^T \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{c}_p^T \boldsymbol{x}_p \\ \text{tekintve a} & \boldsymbol{x}_f = P\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{\alpha}, \\ & A_p \boldsymbol{x}_p = \tilde{\boldsymbol{b}}, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x}_p = 1, \\ & \boldsymbol{u}_f \geq \boldsymbol{x}_f \geq \boldsymbol{l}_f, \\ & \boldsymbol{u}_p \geq \boldsymbol{x}_p \geq \boldsymbol{l}_p, \end{array} \tag{94}$$

feltételeket, ahol $\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{c}_p, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{l}_p \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{x}_f, \boldsymbol{c}_f, \boldsymbol{u}_f, \boldsymbol{l}_f, \alpha \in \boldsymbol{R}^k$, $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{R}^m$, $P \in \boldsymbol{R}^{k\times n}$, $A_p \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, $D \in \boldsymbol{R}^{k\times k}$, és $\Sigma \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ diagonális mátrix.

A (94) problémában a befektető felteszi, hogy van m darab egyenlőséggel teljesülő megszorítás, és alsó és felső korlátok a portfólió komponenseire. Hogy a problémát egyszerűbbé tegyük. ezért vezessük be a következő jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}_f, \boldsymbol{x}_p)\,, \\
\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{c}_f, \boldsymbol{c}_p)\,, \\
H &= \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}, \\
A &= \begin{pmatrix} -I & P \\ 0 & A_p \\ 0 & \boldsymbol{e}^T \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \tilde{\boldsymbol{b}} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}_f, \boldsymbol{u}_p)\,, \\
\boldsymbol{l} &= (\boldsymbol{l}_f, \boldsymbol{l}_p)\,, \\
\tilde{n} &= n + k.
\end{aligned}
\tag{95}
$$

A fönti jelöléseket használva (95) a következőképp írható:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T H \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{tekintve, hogy} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{l}.
\end{aligned}
\tag{96}
$$

A (96) Kuhn-Tucker pontját megadó egyenletrendszer:

$$
\begin{gathered}
H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} + A^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{w} = \mathbf{o}, \\
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
\boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}) = \mathbf{o}, \\
\boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}) = \mathbf{o}, \\
\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{l}, \\
\boldsymbol{z} \geq \mathbf{o}, \ \boldsymbol{w} \geq \mathbf{o}.
\end{gathered}
\tag{97}
$$

Vezessük be a μ pozitív paramétert, és tekintsük a következő parametrikus problémát:

$$
\begin{gathered}
H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} + A^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{w} = \mathbf{o}, \\
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}]\,\boldsymbol{z} = \mu\boldsymbol{e}, \\
[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}]\,\boldsymbol{w} = \mu\boldsymbol{e}.
\end{gathered}
\tag{98}
$$

Egy n dimenziós $\boldsymbol{x}$ vektor esetén jelölje $[\boldsymbol{x}]$ azt az $(n \times n)$ méretű diagonális mátrixot, mely átlójának i-edik eleme x_i, tehát $[\boldsymbol{x}] = diag\,(x_1, \ldots, x_n)$.

Tegyük fel, hogy a kezünkben van egy kezdeti primál-duál megoldáspár, $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{z} \geq \mathbf{o}$, $\boldsymbol{w} \geq \mathbf{o}$ és $\boldsymbol{y}$, amely kielégíti a $H\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}+A^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w} = \mathbf{o}$ és $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ egyenleteket. Ebben az esetben, ha a Newton-módszert használjuk, akkor a keresési irányokat a következő egyenlet rendszer megoldásaként kaphatjuk:

$$\begin{array}{rllllll} H\Delta\boldsymbol{x} & +A^T\Delta\boldsymbol{y} & & -\Delta\boldsymbol{z} & +\Delta\boldsymbol{w} & = & \mathbf{o}, \\ A\Delta\boldsymbol{x} & & & & & = & \mathbf{o}, \\ [\boldsymbol{z}]\,\Delta\boldsymbol{x} & & +[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]\,\Delta\boldsymbol{z} & & & = & \mu\boldsymbol{e}-[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]\,\boldsymbol{z}, \\ -[\boldsymbol{w}]\,\Delta\boldsymbol{x} & & & & +[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]\,\Delta\boldsymbol{w} & = & \mu\boldsymbol{e}-[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]\,\boldsymbol{w}. \end{array} \tag{99}$$

A $G = H + [\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]^{-1}[\boldsymbol{z}] + [\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]^{-1}[\boldsymbol{w}]$ mátrix segítségével kaphatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{y} &= \left(AG^{-1}A^T\right)^{-1} AG^{-1}\left(-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}+\mu\left([\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]^{-1}\boldsymbol{e}-[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]^{-1}\boldsymbol{e}\right)\right), \\ \Delta\boldsymbol{x} &= G^{-1}\left(-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}+\mu\left([\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]^{-1}\boldsymbol{e}-[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]^{-1}\boldsymbol{e}-A^T\Delta\boldsymbol{y}\right)\right), \\ \Delta\boldsymbol{z} &= \mu[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]^{-1}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{z}-[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}]^{-1}[\boldsymbol{z}]\,\Delta\boldsymbol{x}, \\ \Delta\boldsymbol{w} &= \mu[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]^{-1}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{w}+[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]^{-1}[\boldsymbol{w}]\,\Delta\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{100}$$

ahol a G mátrix struktúráltabban felírva:

$$G = \begin{pmatrix} D+[\boldsymbol{x}_f-\boldsymbol{l}_f]^{-1}[\boldsymbol{z}_f]+[\boldsymbol{u}_f-\boldsymbol{x}_f]^{-1}[\boldsymbol{w}_f] & 0 \\ 0 & \Sigma+[\boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{l}_p]^{-1}[\boldsymbol{z}_p]+[\boldsymbol{u}_p-\boldsymbol{x}_p]^{-1}[\boldsymbol{w}_p] \end{pmatrix}.$$

Mivel Σ diagonális, és $A \in \boldsymbol{r}^{(k+m+1)\times\tilde{n}}$, ezért a keresési irány kiszámításához $O(n(k+m)^2 + (k+m)^3)$ aritmetikai művelet szükséges. Tehát a keresési irány kiszámítása kevésbé költséges, mivel a gyakorlatban mind a politóp k-dimenziója, mind a megszorítások m száma lényegesen kisebb, mint n.

A portfólió optimalizációra alkalmazott belső pontos algoritmus lépései:

1. Válasszunk egy $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0, \boldsymbol{w}^0$, kezdeti megengedett megoldást, és legyen $k = 0$.

2. A (100) segítségével számítsuk ki a $\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z}, \Delta\boldsymbol{w}$ keresési iránokat.

3. Határozzuk meg az α lépéshosszot, és legyen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{k+1} &= \boldsymbol{x}^k - \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{y}^{k+1} &= \boldsymbol{x}^k - \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{z}^{k+1} &= \boldsymbol{x}^k - \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{w}^{k+1} &= \boldsymbol{w}^k - \alpha\Delta\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

4. Ha $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l})^T\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{w} \geq \epsilon$, akkor az algoritmusnak vége, egyébként $k = k+1$, és menjünk vissza 1.-re.

Mint (99)-ból és (100)-ből láthatjuk, a keresési irányok a Newton-irány és a centrális irány lineáris kombinációjaként vannak felírva. Takehara [39] az algoritmus teszteléséhez olyan programot használt, amely a lépéshosszt két dimenziós kereséssel határozta meg. A teszt eredményei azt mutatták, hogy az algoritmus igen nagy méretű portfólió kiválasztási problémák esetében is viszonylag gyorsan működik.

A leírt algoritmus konvergenciája még nem bizonyított, ennek belátása további kutatások feladata.

5. A hatékony portfóliót alkotó részvények száma

A fejezetben olyan, a 4. fejezetben szereplő 4.1 tételhez hasonló, tételeket fogunk tárgyalni, melyek az átlag-variancia hatékony portfóliókban pozitív súllyal szereplő értékpapírok számáról szólnak. Az ilyen (pozitív súllyal szereplő) értékpapírokat *aktív értékpapíroknak* fogjuk nevezni. A fejezet végén pár szóban szólunk még az ezzel a kérdéssel kapcsolatos gyakorlati tapasztalatokról.

5.1. Az átlag-variancia modell és az aktív értékpapírok

Az átlag-variancia modellt a következő általános parametrikus kvadratikus programozási feladatként írjuk fel:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve, hogy} & \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} = r_p, \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}, \end{array}$$

ahol az r_p paraméter jelöli a befektető által elvárt hozamot.

Ahhoz, hogy kiszámoljuk a hatékony határgörbét, szükségünk van az értékpapírok várható hozamára és a kovariancia mátrixra. Ezeket egyrészt megbecsülhetjük olyan módszerekkel, amelyek direkt vagy indirekt módon az ex-post hozam adatokat használják, illetve előre jelezhetjük őket egyéb más metódusokkal is. Mivel ez a második módszer sokszor elég bonyolult, ezért általában direkt módon az ex-post, múltbeli hozam adatokból becsülnek.

Mint a fejezet elején említettük, arra vagyunk kiváncsiak, hogy mitől függ a hatékony portfólióban szereplő aktív értékpapírok száma. Első tételünk arról szól, hogy mi a kapcsolat a kovariancia mátrix rangja és az aktív értékpapírok száma között.

Tétel 5.1 *Ha a C kovariancia mátrix rangja k, akkor a hatékony határgörbe bármely pontjához létezik egy olyan hatékony portfólió, amelyben az aktív értékpapírok száma kisebb vagy egyenlő, mint $k+1$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy p egy hatékony portfólió, amely m darab értékpapírt tartalmaz aktívan, és $m > k+1$. Legyen $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ az $\boldsymbol{x}$ azon pozitív részvektora, amely a p-ben lévő aktív értékpapírokhoz tartozó koordinátákat tartalmazza. Legyen $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^m$ az $\boldsymbol{y}$-ban szereplő értékpapírokhoz tartózó várható hozam vektor, $D \in \boldsymbol{R}^m$ pedig a C kovariancia mátrix $\boldsymbol{y}$-beli értékpapírokhoz tartozó részmátrixa. Mivel C rangja k, ezért D rangja sem lehet nagyobb mint k. Mivel az aktív értékpapírok m száma nagyobb, mint $k+1$, ezért a D rangja kisebb, mint $m-1$. Emiatt pedig létezik két vektor, legyenek ezek $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{R}^m$, úgy, hogy

$$\boldsymbol{z}_1 \neq \mathbf{o}, \ \boldsymbol{z}_2 \neq \mathbf{o},$$

$$D\boldsymbol{z}_1 = \mathbf{o}, \ D\boldsymbol{z}_2 = \mathbf{o} \text{ és } \boldsymbol{z}_1^T \boldsymbol{z}_2 = 0.$$

Válasszunk két skalárt, t_1-et és t_2-t, és definiáljuk a $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^m$ vektort a következőképpen:

$$\boldsymbol{z} = t_1 \boldsymbol{z}_1 + t_2 \boldsymbol{z}_2,$$

úgy hogy

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{z} = 0 \text{ és } \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{z} \geq 0.$$

Nyilvánvaló, hogy $D\boldsymbol{z} = \mathbf{o}$. Mivel $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{o}$ és $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{z} = 0$, ezért $\boldsymbol{z}$-nek legalább egy koordinátája negatív. Definiáljuk az $\boldsymbol{u}$ vektort a következőképp:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} + \alpha \boldsymbol{z},$$

ahol α egy pozitív skalár. Ha α-t megfelelően kicsire választjuk, akkor az $\boldsymbol{u}$ vektornak nem lesz negatív koordinátája, de legalább az egyik koordinátája nulla lesz. Mivel $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y} = 1$ és $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{z} = 0$, ezért azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = 1$. Ezért pedig $\boldsymbol{u}$-hoz egy megengedett portfólió tartozik, jelöljük ezt q-val. Mivel $\boldsymbol{u}$ legalább egy eleme nulla, ezért q-nak kevesebb aktív értékpapírja van, mint a p hatékony portfóliónak.

A q portfólió hozamának σ_q^2 varianciája

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= (\boldsymbol{y} + \alpha \boldsymbol{z})^T (\boldsymbol{y} + \alpha \boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y} \ \ (\text{mivel } D\boldsymbol{z} = \mathbf{o}) \\ &= \sigma_p^2, \end{aligned}$$

és r_q várható hozama

$$\begin{aligned} r_q &= \boldsymbol{s}^T (\boldsymbol{y} + \alpha \boldsymbol{z}) \\ &= r_p + \alpha \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{z} \\ &\geq r_p \ \left(\text{mivel } \alpha > 0, \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{z} \geq 0\right). \end{aligned}$$

Ha $r_q > r_p$, akkor a q megengedett portfólióra $\sigma_q^2 = \sigma_p^2$ és $r_q > r_p$. Ez pedig ellentmond p hatékonyságának. Ezért pedig r_q-nak egyenlőnek kell lennie r_p-vel. Ebből pedig már következik, hogy ha a p hatékony portfólió $k+1$-nél több aktív értékpapírt tartalmaz, akkor létezik egy q portfólió, amelyre $r_q = r_p, \sigma_q^2 = \sigma_p^2$, és a benne szereplő aktív értékpapírok száma kisebb, mint m. Ebből pedig már következik, hogy létezik olyan hatékony portfólió, amely legfeljebb $k + 1$ értékpapírból áll. □

Mint már említettük, a hatékony határgörbét általában a múltbeli adatok segítségével megbecsült várható hozamok és kovariancia mátrix alapján szokták számolni. Éppen ezért érdemes tisztázni a megfigyelési periódusok száma és a hatékony portfóliókban lévő aktív értékpapírok száma közti összefüggést. ebben segít a következő tétel.

Tétel 5.2 *Ha a C kovariancia mátrixot minden értékpapírra egy T periódusu hozam adatsor alapján becsüljük, akkor a hatékony határgörbe minden pontjában létezik olyan hatékony portfólió, amelyben az aktív értékpapírok száma legfeljebb T.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy N befektethető értékpapírunk van, és Y ezeknek a hozam mátrixa, tehát y_{ik} az i-edik értékpapír hozama a k-adik periódusban. Az i-edik és j-edik értékpapír hozama közti kovariancia az $E\left[(y_{ik}-\overline{y}_i)\left(y_{jk}-\overline{y}_j\right)\right]$ képlettel számolható, ahol $\overline{y}_i$ az i-edik értékpapír várható hozamát jelöli. Definiáljuk az L mátrixot úgy hogy l_{ik} legyen egyenlő $(y_{ik}-\overline{y}_i)$-vel, tehát

$$L = Y(I-F),$$

ahol I az egység mátrix és F pedig a következő $(T \times T)$ méretű mátrix:

$$F = \frac{1}{T}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Megszorozva L-t jobbról az $\boldsymbol{e}\left(\in \boldsymbol{R}^T\right) = (1,1,\ldots,1)^T$ vektorral:

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{e} &= Y(I-F)\boldsymbol{e} \\ &= Y(I\boldsymbol{e}-F\boldsymbol{e}) \\ &= Y(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}) \\ &= \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Ebből pedig következik, hogy L rangja kisebb, mint T.

A kovariancia definiciója szerint $C = (1/T)\,LL^T$. Tudjuk, hogy egy mátrixnak, amelyet két mátrix szorzataként állítunk elő, nem lehet nagyobb a rangja, mint a szorzó tényezőké. Ezért C rangja kisebb vagy egyenlő, mint $T-1$. Ezt és a 5.1 tételt figyelembe véve kapjuk a tétel állítását. □

A fenti tétel azt mondja ki, hogy a megfigyelési periódusok száma felső határt szab a legkevesebb értékpapírból összeállított hatékony portfólióban szereplő aktív értékpapírok számára a hatékony határgörbe minden pontjában. Meg kell jegyezni, hogy a tétel a 4. fejezetben található 4.1 tétel erősítése (ott $T+1$ volt a felső korlát) az átlag-variancia probléma esetére.

5.2. Empirikus vizsgálatok a TSE piacán

Nakasato és Furukawa [37] cikkükben azt vizsgálták, hogy vajon milyen felső határok érvényesülnek az aktív értékpapírok számára a Tokiói Értéktőzsdén. Ebben a szakaszban ennek a cikknek a tartalmát vázoljuk fel röviden.

A megfigyelési periódusok száma és az aktív értékpapírok száma közti kapcsolatot a szerzők úgy vizsgálták, hogy több hatékony határgörbét is kiszámoltak, változtatva egyrészt a befektethető értékpapírok számát, másrészt a megfigyelési periódusok számát. A szükséges múltbeli adatokat a Japan Security Research Institute adatsoraiból merítették. Az összegyűjtött adatok a Tokiói Értéktőzsde első piacán lévő összes értékpapír havi hozamait tartalmazták 1978. januárjától egészen 1987. decemberéig. A hozamértékeket hozzá igazították mind az osztalék fizetésekhez, mind pedig az új részvények kibocsátásához. Végül is 936 értékpapír adatait használták fel, amelyek az összes releváns periódusban elérhetőek voltak.

Nakasato és Furukawa vizsgálataik során arra az eredményre jutottak, hogy T 5-től 200-ig való növelése során, az összes általuk megválasztott befektehető értékpapír halmaz mellett, létezik egy T_B érték úgy, hogy $5 \leq T \leq T_B$ esetén a kiszámított hatékony portfólióban az aktív értékpapírok száma megközelítően T, de viszont $T \geq T_B$ esetén az aktív értékpapírok száma (fölrajzolva az aktív értékpapírok számát T függvényében) egy kisebb meredekségű egyenes mentén mozog tovább, ami egyben azt is jelenti, hogy ebben az esetben a vizsgálatok egy T-nél alacsonyabb lineáris felső korlát létezését mutatják. A szerzők T_B-t töréspontnak nevezték el, mivel fölrajzolva az aktív értékpapírok számát a megfigyelési periódusok számának függvényében, a grafikon T_B-nél törik meg és folytatódik az eddigi 45 fokos helyett egy kisebb meredekségű egyenesben.

A vizsgálatok eredményei a következők voltak: 50 befektethető értékpapír esetén T_B körülbelül 10-zel egyenlő, 87 befektethető értékpapír esetén körülbelül 20-szal, 487 befektethető értékpapír esetén körülbelül $35 - 40$-nel, 936 befektethető értékpapír esetén pedig körülbelül $55 - 60$-nal.

A kapott adatokból (amelyeket azért adtam meg csak közelítőleg, mivel a cikk írói nem közölték ezeket, hanem csak a cikkben szereplő ábrákról lehetett leolvasni őket) a szerzők T_B-re a következő közelítést adták: $T_B \cong 1,48N^{0,53}$.

A kapott eredmények azt mutatják, hogy a Tokiói Értéktőzsdén a hatékony portfólióban aktívan szereplő értékpapírok száma lényegesen kisebb, mint a befektethető értékpapírok száma, másrészt azt, hogy az aktív értékpapírok száma, a megfigyelési periódusok számát növelve, még a 5.2 tétel által szabott alsó korlátnál is jelentősen alacsonyabb.

Ezek az eredmények ellentmondanak az egyik legnépszerűbb pénzügyi modell, a CAPM (magyar nyelven lásd [4]), azon feltételezésének, hogy a piaci portfólió hatékony. Az ellentmondásnak egyrészt az lehet az oka, hogy a CAPM tökéletes informáltságot feltételez, másrészt az, hogy a piac viselkedését lényegesen befolyásoló faktorok száma jóval kevesebb lehet, mint a befektethető értékpapírok száma, és ez okoz alacsony számú értékpapírból összeálló hatékony portfóliót.

6. Hatékony portfóliók kifejlesztése Japánban és az ezzel kapcsolatos gyakorlati tapasztalatok

Az előző fejezetekben a portfólió elmélet különféle modelljeivel, ezeknek közgazdasági eredetével illetve hatékony megoldásuk problémáival foglalkoztunk. A modellek gyakorlati alkalmazásáról, és a megoldások jóságát mérő statisztikai elemzésekről csak említésszerűen szóltunk pár szót, néha utalva azon cikkekre, ahol az esetleges bővebb elemzés megtalálható. Ennek fő oka az volt, hogy a dolgozat, mint címe is mutatja elsősorban a portfóliókkal kapcsolatos kvadratikus modellekről (ezek felállításáról illetve megoldásáról) hivatott szólni, és ezért ezekről a témákról igyekeztem többet írni, néha talán a gyakorlati statisztikai elemzések leírásának rovására.

Éppen ezért, a dolgozat befejezéseképp, ebben a fejezetben a hatékony portfólió keresés gyakorlati tapasztalatairól lesz szó, röviden utalva az ezzel kapcsolatos, kvadratikus programozáson kívüli módszerekre. A fejezet alapját Guerard et al.[15] cikke fogja képezni, akik írásukban egyrészt szólnak a mostanában leginkább szokásos gyakorlati módszerekről, másrészt pedig az így kapott eredmények (tehát a módszerek jóságának) statisztikai összehasonlításáról.

6.1. Bevezetés

A cikk szerzői a Japán pénzügyi modellezés négy témakörét tették elemzésük tárgyává, ezek pedig a következők: (1) összetett modellek kifejlesztése és értékelése, (2) átlag-variancia hatékony portfóliók előállítása, a várható hozam szokásos becslése helyett, az összetett modellek segítségével, és ezáltal statisztikailag szignifikáns többlethozam elérése, (3) az index követés lehetséges problémái Japánban, (4) annak kérdése, hogy milyen messze szükséges visszamenni a modellek vissza teszteléssel történő értékelésénél. Az utolsó kérdés különösen fontos abban az esetben, ha valaki nyereség és forgalom előrejelzési változókat kíván használni az összetett modellekben. A szerzők tanulmányukban Toyo Kezai nyereség és forgalom előrejelzéseit használták az 1984-1990-ig terjedő periódusban.

Mint majd látni fogjuk, a kilógó értékeket illetve a multikollinearitást kiigazító regressziós technikák segítségével olyan statisztikailag szignifikáns összetett modelleket tudunk előállítani, amelyek segítségével statisztikailag szignifikáns többlethozam elérésére leszünk képesek.

Ezeket a modelleket használva az átlag-variancia hatékony portfólió keresésekor bemenetként, (a várható hozam hagyományos becslése helyett), a visszateszteléskor a generált hozamok évente 500 bázis pontnyi többlet hozamot eredményeztek az 1974-1990-ig terjedő periódusban.

A szerzők az index követési modellekkel kapcsolatban úgy találták, hogy ezek akkor igazán hasznosak, ha a befektető sokkal inkább érdekelt az index alulteljesítésében, mint abban, hogy a portfóliók hozamának geometriai átlagát maximalizálja.

Végül a szerzők a (4) ponttal kapcsolatban arra a következtetésre jutottak, hogy a visszatesztelésénél az 1984-1990-ig terjedő periódus szükséges ahhoz, hogy a forgalom és nyereség előrejelzések magasabb geometriai átlagú hozamot produkáljanak annál, mintha csak múltbeli adatokat használtunk volna.

A szerzők a Japánban lévő nagyvállalatokat modellezték. Ez pontosabban azt jelenti, hogy a Tokiói Értéktőzsde (TSE) első és második szekciójának cégeit tekintették, a pénzügyi cégek kivételével, ami körülbelül 1500 vállalatot jelent. A kezdeti modellezési periódus 1974-1990-ig terjed. A vizsgálat során a Daiwa Securities, Nihon Kezai (Nikkei) által összegyűjtött adatait használták. A japán részvény árak a Daiwa Systems Division-tól származnak. Az (ennél teljesebb) adatsorok megtalálhatóak Bloch et al.[3]-ban. Miután röviden utaltunk az adatok forrására, most már elkezdjük az összetett modellek, közelítési technikák és portfólió összeállítási módszerek tárgyalását.

A mögöttes összetett modell az értékpapírok teljes hozamát egy olyan modellel becsüli, amely különféle alapvető vállalati mutatót használ, mint például a nyereség/árfolyam, EP, könyv szerinti érték/árfolyam, BP, cash- flow/árfolyam, CP, forgalom/árfolyam, SP. A becslésnél használatos lesz még a mutatók ötéves átlagukhoz való viszonya, melyeket az adott mutató rövidítése elé írt R (relative) betű segítségével jelölünk, tehát például EP viszonyát az ötéves átlagához REP fogja jelölni. Azt a többváltozós regressziós modellt, amelyet a részvény hozam becslésére használtak Japánban, a következő keresztmetszeti egyenlet segítségével foglalhatjuk össze:

$$\begin{aligned} TR_T &= a_0 + a_1 EP_t + a_2 BP_t + a_3 CP_t + a_4 SP_t + a_5 REP_t + a_6 RBP_t \\ &\quad + a_7 RCP_t + a_8 RSP_t + e_t, \end{aligned} \tag{101}$$

ahol TR_T = a teljes hozammal, (féléves analízis esetén hat hónapra (t-től $t+6$-ig), negyedéves adatokat használva három hónapra,) követve a vállalati mutatók számolási módját; $EP, BP, CP, SP, REP, RPB, RCP, RSP$ = a fönt definiált pénzügyi mutatókkal; $a_0, a_1, \ldots, a_8$ = regressziós paraméterekkel, e_t = véletlen eloszlású hibatényezővel.

A modell teljesebb leírása megtalálható a Guerard és Takano [14] illetve Miller et al.[36] tanulmányokban. A regresszióhoz használhatjuk a legkisebb négyzetek elvét (OLS), a Beaton és Turkey [2] által ajánlott kilógó értékeket kiigazító, másszóval robosztus (ROB) regressziós eljárást, a látens gyök módszert (LRR), amelynek segítségével a multikollinearitást kezelhetjük, és végül a látens gyök módszert a robosztusságot szolgáló súlyozott adatokon (WLRR). Bloch et al.[3] úgy találta, hogy a WLRR módszer használatával a TSE első piacán magasabb geometriai hozamátlaghoz jutunk, mint bármely egyéb használatos módszer segítségével.

6.2. Az összetett modellek becslései

A szerzők, a Japánban folyó vizsgálatok során, a félévenkénti nyereség, könyv szerinti érték, cash-flow és forgalom értékeket a negyedévenkénti árfolyamokkal elosztva negyedévi vállalati mutatókat készítettek. A negyedévi modellek becslései a TSE első és második szekciójában történtek. Az összetett modellezés során a szerzők a negyedévi regressziókat az OLS, ROB, LRR, WLRR módszerek segítségével hajtották végre, hogy megtudják, hogy mely változók voltak szignifikáns kapcsolatban a teljes hozammal az előző negyedévben. A súlyozást a következőképp végezték: (1) azonosították azokat a változókat, amelyek együtthatója összhangban áll a közgazdasági meggondolásokkal (tehát pozitív), (2) azokat a változókat használták a következő negyedévi összetett modellben, amelyek a megelőző negyedévi keresztmetszeti regresszióban legalább 10 százalékos szinten szignifikánsak voltak, és (3) átlagolták a legutóbbi négy negyedév súlyait. (Ez vezet minket ahhoz, hogy ezt a negyedéves modellt a Q_p4 jelöléssel lássuk el). A négy negyedes súlyozási séma pontosabb kifejtése megtalálható Bloch et al.[3]-ben. A szerzők geometriai átlagot (GM) használtak, akárcsak Kelly [20], Latane [26], Breiman [5], és Markowitz [30] [31]. A vizsgálat egyik fontos mutatója a Pontossági Mutató, amely a többlet hozam elosztva a portfólió szórásával. Nézve az összetett modellel eddig elért eredményeket, lásd Guerard [11], Guerard és Stone [12],

1. Táblázat: Azonos súlyozású felső kvintilis alapú stratégia

Modell	Geometriai hozamátlag	Pontossági mutató
EP	18,84	0,58
BP	24,50	0,74
CP	19,76	0,59
SP	21,55	0,65
Q_p4OLS	24,97	0,78
Q_p4ROB	22,48	0,69
Q_p4LRR	25,60	0,77
Q_p4WLRR	25,43	0,78

2. Táblázat: Átlagos negyedéves súlyok, 1974-1990., Q_p4WLRR modell.

Mutató	Súly
EP	0,117
BP	0,176
CP	0,161
SP	0,136
REP	0,028
RBP	0,060
RCP	0,027
RSP	0,199

Miller et al.[36] és Bloch et al.[3], azt várjuk, hogy a WLRR technika szolgál a legnagyobb geometriai hozamátlaggal. Ha egy befektető, a Q_p4WLRR modell tekintve, megvásárolja az értékpapírok felső kvintilisét, és addig tartja őket, amíg az alsó kvintilisbe nem esnek, és negyedévenként kiegyensúlyozva karbantartja az egyenlően súlyozott portfóliót, akkor ez a Q_p4WLRR stratégia 25,43 százalékos geometriai hozamátlagot jelentett volna, az 1974-1990 periódust tekintve. Habár a Q_p4WLRR felső kvintilist használó egyenlő súlyú portfólió átlaghozama lényegesen meghaladta a piaci portfólióhoz tartózó 18,63 százalékos átlaghozamot, mégis csak második a Q_p4LRR-t használó felső kvintilis alapú stratégia által generált valamivel nagyobb átlaghozam után. Lásd az 1. táblázatot.

Az átlagos négy negyedéves súlyokat a 2. táblázat mutatja. Érdekes, hogy a könyv szerinti érték/árfolyam ráta, melyet Chan et al.[6] Japánban az értékpapírok hozamával statisztikailag a legszorosabb kapcsolatban levő vállalati mutatónak talált, csak 0,176 értékű átlagos együtthatóval rendelkezik, nem sokkal nagyobbal, mint a nyereség/árfolyam mutató, amiről Chan et al.azt találták, hogy nincs szignifikáns kapcsolatban a hozammal. A nyereség/árfolyam mutató jelentőségét jelzi, hogy Graham és Todd hagyományos értékpapír elemzési módszere azt hirdeti, hogy értékpapír vásárlásainkat korátozzuk olyan papírokra, melyekhez olyan árfolyam/nyereség mutató tartozik, amely meghaladja a piaci átlag másfélszeresét (lásd Cottle et al.[8]). Azon túl, hogy Cottle et al. Graham és Todd eredeti módszerét képviselik, tehát hogy az értékpapír könyv szerinti értéke csak egy egyszerű faktora a teljes értéket alkotó képnek (139 o.), hisznek benne, hogy az árfolyam/könyv szerinti értékmutató fokozott figyelmet érdemel (596 o.).

A cash-flow/árfolyam, forgalom/árfolyam, relatív könyv szerinti érték/árfolyam, és a relatív forgalom/árfolyam mutató általában nagy súllyal rendelkezik. A relatív mutatók súlyai Japánban az 1983-1990-es periódusban különösen nagyok voltak. A mutatók súlyai a negyedévenkénti teljes hozam becslések során igen ingadoztak, de ahogy majd a 6.4. fejezetben látni fogjuk, az összetett modellben szereplő *relatív* hozam (az azonos súlyozású piaci hozamszinthez képesti hozam) becslése során meglehetősen stabilak maradnak. A vizsgálat során nem fordult elő olyan eset, hogy a vállalati mutatók azonos súlyú kapcsolatban lettek volna a teljes hozammal, de olyan se fordult elő, hogy az árfolyam/könyv szerinti érték lett volna az egyetlen vállalati mutató, amely szignifikáns kapcsolatban áll a teljes hozammal. A relatív forgalom/árfolyam mutató viszonylag magas súlya miatt érdemesnek látszik a relativ mutatók előnyeinek vizsgálata, ahogy ezt Miller et al.[36] is javasolta, habár Millerék a mutatók konstruálásánál (az átlaghoz való viszonyítás mellett) más módszereket is alkalmaztak.

A négy negyedévenkénti kisimításos összetett modellt az átlag-variancia optimalizációs probléma bemeneteként is alkalmazták, az így kapott portfólió (az eddig tárgyalt azonos súlyozású portfólióhoz képest) alacsonyabb szórást produkált megközelítően azonos hozam mellett.

6.3. Az optimalizációs probléma megfogalmazása és értékelése

A Markowitz-féle átlag-variancia modellel már többször találkoztunk, emlékeztetőül fölírjuk az ehhez tartozó egyik parametrikus kvadratikus progamozási feladatot:

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & Var = \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} \\ \text{tekintve a} & \\ & \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x} = E_p, \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \\ \text{feltételeket minden} & E_p \in [E_{MVP}, E_{max}]\text{ - ra,} \end{array} \tag{102}$$

ahol C a kovariancia mátrixot, $\boldsymbol{x}$ az értékpapírok súlyait, E_p a portfólió előírt várható hozamát, E_{MVP} a minimális varianciájú hatékony portfólió várható hozamát, E_{max} a maximális hozamú megengedett portfólió hozamát jelöli, míg az $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a portfólióra tett lineáris megszorításokat reprezentálja. A következőkben a forgalom és nyereség előrejelzéseket használva fogjuk szimulálni a különböző regressziós technikákat.

A (102) problémában szereplő E_p paraméter helyett a következő paramétert is használhatjuk:

$$m = \frac{E_p - E_{MVP}}{E_{max} - E_{MVP}}. \tag{103}$$

3. Táblázat: Az optimalizált portfóliók geometriai átlaghozama, 1974-1990.

Módszer	Geometriai átlaghozam	Pontossági Mutató
Q_p4OLS	23,68	0,85
Q_p4ROB	22,06	0,75
Q_p4LRR	23,55	0,79
Q_p4WLRR	25,48	0,92
BP	24,55	0,83
EP	19,59	0,63
CP	20,85	0,70
SP	19,65	0,65
Benchmark	18,63	0,62

Tehát m egy olyan tört, amely a $E_p - E_{MVP}$ részintervallum hossz viszonyát mutatja a teljes intervallum $E_{max} - E_{MVP}$ hosszához képest. Mi az m paraméterre ezentúl mint Kijelölési Paraméter, vagy PPar (pick parameter) néven fogunk hivatkozni. Világos, hogy a hatékony határgörbe m 0-tól 1- ig való változtatása segítségével kirajzolható.

A negyedéves optimalizációban, amelyet az elemzés során használtak, a következőket tették fel: (1) 10 százalékos forgalmi korlát, (2) 2 százalékos felső korlát az értékpapírok súlyaira, (3) 2 százalékos tranzakciós költség (minden műveletre), (4) a kovariancia mátrix 60, havi megfigyelésen alapul, (5) a portfóliók amelyeket kiválogattunk a hatékony határgörbe 90 százalékát reprezentálja. A portfólióra tett megkötések a TSE első piacára vonatkozóan megtalálhatók Bloch et al.[3]-ben. A szerzők azt találták, hogy a Kijelölési Paraméter 0.90 értékéhez tartozik a legnagyobb Pontossági Mutató (többlethozam osztva a portfólió szórásával). Az eredeti Japán elemzésben a szerzők a WLRR módszert használva jónak tartották a Miller et al.[36] által leírt negyedéves kisimításos modellt. A Q_p4WLRR által kapott geometriai átlaghozam 25,48 százalék volt, míg az azonos súlyozású piaci portfólió hozama (benchmark) csak 18,63 százalék volt az 1974-1990. periódusban, lásd 3. táblázat. Láthatjuk, hogy a Pontossági Mutató és a geometriai hozamátlag mindegyike lényegesen magasabb, mint a hagyományosan használt legkisebb négyzetek elve (OLS) mellett. Ezentúl láthatjuk, hogy a Q_p4WLRR segítségével optimalizált portfóliónak a geometriai átlaghozama csak 5 bázis ponttal haladja meg az azonos súlyozású felső kvintilis módszerrel kapott GM-et, de viszont a Pontossági Mutató lényegesen magasabb az optimalizált portfólió esetében.

Összefoglalva a japán optimalizációs összetett modellel kapott erdeményeket, azt kapjuk, hogy: (1) a négy negyedéves súlyozású látens gyök regresszióhoz tartozó összetett modellhez tartozik a legmagasabb optimalizált GM, (2) a Q_p4WLRR az egyéb portfólió stratégiák átlagos hozamához képest szignifikánsan nagyobb hozamot produkált, összhangban Bloch et al.[3] és Miller et al.[36] munkáival. Ezentúl pedig a Q_p4WLRR modellhez tartozó 25,48 százalékos GM több, mint a Bloch et al.[3] által a TSE első piacán vizsgált Q_p4WLRR modell 22,47 százalékos GM-je. Tehát a második szekció vizsgálatba vétele nagyobb potenciális többlethozamot ígér, mintha csak az első szekcióval foglalkoznánk.

4. Táblázat: Optimalizált portfólió szimulációs eredmények. Q_p4WLRR modell.

Elemzés	PPar	GM	Pontossági Mutató	MSV[a]	CC-T[b]
EV	1,00	26,56	0,77	7,78	0,55
	0,95	25,32	0,86	6,14	0,62
	0,90	25,48	0,90	6,14	0,61
	0,80	22,12	0,76	6,26	0,63
	0,70	21,10	0,73	6,49	0,62
	0,60	19,98	0,70	6,65	0,63
	0,50	18,53	0,65	6,87	0,63
	0,40	17,31	0,61	7,08	0,63
	0,30	16,37	0,57	7,39	0,63
	0,20	15,37	0,52	7,73	0,62
	0,10	14,47	0,48	7,79	0,63
EIT	0,95	23,46	0,81	4,51	0,71
	0,90	22,77	0,80	3,84	0,77
	0,80	20,73	0,71	3,21	0,75
	0,70	19,71	0,69	2,88	0,77
	0,60	18,48	0,65	2,79	0,86
	0,50	17,57	0,63	2,74	0,87
	0,40	16,90	0,62	2,71	0,87
	0,30	16,17	0,59	2,70	0,88
	0,20	15,75	0,58	2,57	0,89
	0,10	15,14	0,55	2,71	0,89

[a]MSV = havi szemivarianciák (TOPIX).
[b]CC-T = korrelációs együtthatók (TOPIX)

6.4. A hagyományos átlag-variancia modell általánosításai

A felső kvintilis módszeren alapuló portfólió stratégia szórása több mint 200 bázis ponttal nagyobb, mint az optimalizált portfólióé. Az viszont nem egyértelmű, hogy az eddig használt minták esetén az optimalizált portfólió növelné a geometriai átlaghozamot a felső kvintilis módszerhez képest. A szerzők úgy találták, hogy az optimalizált portfólió a felső kvintilis azonos súlyozású portfólióhoz képest megalapozottabb a hagyományos átlag-varianca probléma két fontos kiterjesztése esetén : (1) arbitrázs portfóliók készítésekor, (2) az index követő portfólió hatékony közelítésekor. Arbitrázs stratégia alatt azt értjük hogy valaki egyrészt értékpapírokat keres megvásárlásra, másrészt értékpapírokat ad el röviden, (tehát anélkül, hogy a tulajdonában lenne,) az optimalizálást használva, és így, a kockázati szinteket kiegyenlítve, növeli a portfólió hozamot ahhoz képest, mintha csak vásárolt volna. A hatékony határgörbét a PPar 0,10 és 1,00 közti változtatásával felrajzolva a GM 14,47 százalékról 26,56 százalékra nő, lásd a 4. táblázatot. A Pontossági

Mutató a PPar=0,10 esetén lévő 0,48-ról egészen 0,90-ig növekszik (PPar=0,90), majd PPar=1,00-ig 0,77-re csökken. Ha valaki rövidre elad egy minimális vátható hozamú portfóliót, (melynek GM-je 8,87 százalék, tehát jóval kevesebb, mint a benchmark 18,63 százaléka,) és vásárol PPar=0,90-hez tartozó portfóliót, akkor az átlagos hozam amelyet kereshet 16,59 százalék.kizárólag

Az átlag-variancia probléma másik kiterjesztése, amikor egy index követésének hibáját akarjuk minimalizálni. Markowitz [32] átírta az eredeti portfólió optimalizáló célfüggvényt a $Var\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r}\right)$ alakra, ahol

$$\begin{aligned} & Var = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w})^T C (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}), \\ & E = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{w}, \\ \text{tekintve a} \quad & \\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \end{aligned} \tag{104}$$

megszorításokat, ahol $\boldsymbol{w}^T = (w_1, \ldots, w_n)$ = index hozamok súlyaival, $\boldsymbol{r}^T = (r_1, \ldots, r_n)$ = az értékpapírok hozamával. A 4. táblázatban látható, hogy az index követő modellben lényegesen nagyobbak a korrelációs együtthatók a TOPIX, a TSE első szekciójának indexe esetén. A geometriai hozamátlag az index követő modell (EIT) esetében lényegesen alacsonyabb, mint az átlag-variancia modell (EV) esetén, viszont az indexszel vett korellációs együtthatók kb. 0,10-0,20-dal nagyobbak, mint az átlag- variancia becslés esetén. Ezenkívül az index követő modell sokkal alacsonyabb szemivarianciákat produkál a TOPIX-hoz képest, mint a hagyományos átlag-variancia modell. Azt lehet mondani, hogy érdemes a PPar=0,90-hez az index követő modellt alkalmazni, így kapva 22,77 pontnyi GM-et és 0,77 értékű korellációs együtthatót (szemben az átlag-variancia modell 0,61 értékével).

Tehát úgy találtuk, hogy az optimalizációs módszer nagyon hatékony egyrészt az arbitrázs portfóliók előállításában, másrészt az index követő portfóliók megtalálásában, de kevéssé ajánlott csupán vásárlásra szánt portfólió keresésére. Természetesen az itt leírt módszerek segítségével becsülni lehet egyrész átlagos abszolút eltérést figyelembevevő portfólió problémát, másrészt szemivarianciát figyelembevevő index követési problémát is.

6.5. Az előrejelzési változók figyelembe vétele

Ebben a szakaszban a nyereség és forgalom előrejelzési változók összetett modellben való alkalmazását vizsgáljuk. A Toyo Kezai előrejelzési mutatóit fogjuk használni. A Toyo előrejelzései az 1984. decembere és 1990. decembere közti periódusra vonatkoznak. Az (101) egyenletnek két új verziójával ismerkedünk meg: először is, amikor előrejelzett forgalmat használunk ((105) egyenlet), másodszor, amikor előrejelzett üzemi nyereséget használunk ((106) egyenlet). Tehát a forgalom előrejelzést használó egyenlet a következő:

$$\begin{aligned} TR \;=\; & a_0 + a_1 EP_t + a_2 BP_t + a_3 CP_t + a_4 FSP_t + a_5 REP_t + a_6 RBP_t \\ & + a_7 RCP_t + a_8 RSP_t + e_t, \end{aligned} \tag{105}$$

5. Táblázat: A különböző regressziós technikákhoz, előrejelzésekhez, és portfólió kiválasztási kritériumokhoz tartozó geometriai hozamátlagok. ((.) a Pontossági Mutató értéke.)

(105) egyenlet	EW	EV	EIT
OLS	31,34(0,88)	27,85(0,86)	29,65(0,84)
ROB	28,35(0,84)	26,20(0,81)	25,99(0,76)
LRR	30,72(0,94)	28,33(0,85)	30,20(0,86)
WLRR	30,51(0,88)	28,79(0,88)	31,76(0,89)
(106) egyenlet			
OLS	32,05(0,91)	30,15(0,86)	32,27(0,88)
ROB	28,42(0,84)	27,15(0,84)	29,01(0,87)
LRR	31,86(0,90)	30,20(0,87)	31,13(0,87)
WLRR	30,38(0,89)	30,20(0,89)	31,90(0,88)
Q_p4WLLR	30,70(0,89)	30,92(0,94)	29,74(0,89)

ahol $TR, EP, BP, CP, REP, RBP, RCP, RSP$ = az előzőleg már definiált pénzügyi mutatókkal, FSP = forgalom/árfolyam előrejelzéssel, $a_0, a_1, \ldots, a_8$ = a regressziós paraméterekkel és e_t = a véletlen eloszlású hibataggal.

A nyereség előrejelzéses egyenlet a következő:

$$\begin{aligned} TR &= a_0 + a_1 EP_t + a_2 BP_t + a_3 CP_t + a_4 FSP_t + a_5 REP_t + a_6 RBP_t \\ &\quad + a_7 RCP_t + a_8 RSP_t + e_t, \end{aligned} \tag{106}$$

ahol FEP = üzemi nyereség/árfolyam előrejelzéssel.

Mind az (105), mind (106) egyenlet kiértékelhető az OLS, ROB, LRR és a WLRR technikák mindegyikével. A szerzők úgy találták, hogy a nyereség és forgalom előrejelzések magasabb geometriai hozamátlagot produkáltak, (körülbelül 100-140 bázis ponttal évente,) mind az azonosan súlyozott, mind az index követő modell esetében a hagyományos, csak múltbeli adatokat használó esetnél, az 1984-1990. periódusra vonatkoztatva. Az (106) egyenlet esetén, az azonos súlyozású modellt véve, az OLS becslés szolgált a legmagasabb GM-mel, az 1984- 1990-ig terjedő periódusban (32,05 százalék), a hozzá tartozó Pontossági Mutató értéke pedig 0,91 volt, miközben ugyanebben az esetben a Q_p4WLRR módszer 30,70 százalékos GM-et produkált, 0,89 értékű Pontossági Mutató mellett. A kibővített modellben alkalmazott regressziós technikákhoz tartozó GM-eket a 5. táblázat tartalmazza. Az (106) egyenlet esetén, index követő modellt véve, az OLS módszer produkálta a legnagyobb, 32,27 százalékos, geometriai hozamátlagot 0,88-as Pontossági Mutató mellett, míg a Q_p4WLRR módszerhez tartozó GM 31,25 százalék volt, a Pontossági Mutató pedig 0,91.

A Daiwa Security Trust (DST) legutóbbi vizsgálatai során a kovariancia mátrix kiszámolásához 250, napi adatot használt fel (lásd Markowitz [33]), és ezt alkalmazva az EV illetve EIT elemzésekben, jelentősen nagyobb GM-eket értek el a 60 havi adatot használó módszerhez képest. A szerzők is hasonló eredményekre jutottak, mint ezt a 6.

6. Táblázat: A napi kovariancia előrejelzésekhez tartozó geometriai hozamátlagok. ((.) a Pontossági Mutató értéke.)

(105) egyenlet	EV	EIT
OLS	30,69(0,89)	30,73(0,91)
ROB	27,80(0,85)	30,44(0,90)
LRR	30,72(0,94)	30,63(0,87)
WLRR	30,62(0,94)	32,15(0,94)
(106) egyenlet		
OLS	31,06(0,90)	34,10(0,92)
ROB	29,17(0,89)	30,40(0,86)
LRR	31,16(0,93)	33,08(0,91)
WLRR	31,10(0,94)	34,52(0,96)
Q_p4WLRR	30,70(0,89)	30,95(0,89)

táblázat is mutatja. Érdemes megjegyezni, hogy a EIT GM-je különösen sokat javult a napi kovariancia adatok használata mellett. Tehát a szerzők nem találták úgy, hogy a többlet hozam a kovarianciák kiszámolásának módja szempontjából invariáns lenne, mint azt Chopra és Ziemba [7] állítják.

A szerzők elemzése szerint index követő modell, 250 napos kovariancia számolás, nyereség és forgalom előrejelzés használata mellett a WLRR technika produkálta a legnagyobb geometriai hozamátlagot. Az EV modellben az LRR technika valamivel magasabb GM-et produkált. A nyereség előrejelzés magasabb GM-eket produkált a forgalom előrejelzéseknél, viszont mindkét előrejelzési modell nagyobb hozamot teljesített, mint a csak múltbeli mutatókat használó modell. A szerzők szerint a Markowitz és Xu [35] által leírt előrejelzést használó módszer nem túl szerencsés, véleményük szerint a nyereség és forgalom előrejelzéseket alkalmazó modelleket érdemes inkább tekinteni, különösen ha 250 napi kovariancia mátrixot alkalmazunk. Guerard és Takano [13] szerint a GM-ek javíthatóak, ha csak a TSE első szekciójának értékpapírjait tekintjük.

6.6. Összefoglalás

Az összetett modell alkalmazása a súyozott látens gyök regressziós technikával a Japán piacon hatékonynak tűnik, hozamai legalább 500 bázis ponttal meghaladják a benchmarkot. Teljesen hatékony piac esetében természetesen ez a módszer kevésbé ajánlható. Az optimalizációs technikákkal kiegészítve az összetett modellt a portfóliók változékonysága jelentékeny mértékben csökken. Az összetett modell eredményes arbitrázs portfóliók előállításában, a minimális varianciájú index követésben (Japánban a TOPIX esetén), illetve nyereség és forgalom előrejelzések használatával is.

Utószó

Az 1. fejezet példáit, vagy például egyéb pénzügyi matematikával foglalkozó folyóiratot vagy tankönyvet megnézve világos, hogy a kvadratikus programozás portfólió elméletnek csak egy módszere. Mégis a 2.–5. fejezetekből láthattuk, hogy magának a kvadratikus programozásnak az alkalmazása a portfólió elméletre mennyi megoldott, megoldatlan illetve tovább fejleszthető problémát rejt magában. Egyrészt ezeket, másrészt az utolsó fejezetben, a kvadratikus programozás és az összetett modell együttes alkalmazásából, kapott eredményeket figyelembe véve láthatjuk, hogy bár a kvadratikus programozás a portfólió problémának csak egy speciális módszere, mégis manapság is hasznos eszköze (önmagában vagy más módszerekkel együtt alkalmazva) új és újabb portfólió optimalizációs modelleknek.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Prékopa Andrásnak, az irodalmak összeválogatásában nyújtott segítségéért, és a dolgozat tartalmával és formátumával kapcsolatos kapcsolatos megjegyzéseiért.

Felhasznált irodalom

1. fejezet

Beadley and Myers. *Modern vállalati pénzügyek*, 153-155.o.. McGraw-Hill Inc., magyar kiadás, 1996.

András Prékopa. *Stochastic Programming*, pages 492-495, 245-247, Akadémia Kiadó, Budapest és Kluwer Academic Publishers, Dordrecht közös kiadás, 1995.

2. fejezet

H. M. Markowitz. Computation of mean-variance efficient sets by the Critical Line Algorithm. *Annals of Operation Research*, 45:307-317, 1993.

H. M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, pages 316-331, Basil Blackwell, Oxford, second edition, 1991.

3. fejezet

A. J. King. Asymmetric risk measures and tracking models for portfolio optimization under uncertainty. *Annals of Operation Research*, 45:165-177, 1993.

H. Levy and H. M. Markowitz. Approximating expected utility by a function of mean and variance. *The American Economic Review*, Vol. 69 No. 3, June 1979.

4. fejezet

H. Takehara. An interior point algorithm for large scale portfolio optimization. *Annals of Operation Research*, 45:374-386, 1993.

5. fejezet

M. Nakasato and K. Furukawa. On the number of securities wich constitute an efficient portfolio. *Annals of Operation Research*, 45:333-347, 1993.

6. fejezet

J. B. Guerard, Jr., M. Takano and Y. Yamane. The development of efficient portfolios in Japan with particular emphasis on sales and earnings forecasting. *Annals of Operation Research*, 45:91-108, 1993.

Hivatkozások

[1] Prékopa András. *Lineáris programozás.* ELTE egyetemi jegyzet, Budapest, 1968.

[2] A. E. Beaton and J. W. Tukey. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on bank-spectroscopic data. *Technometrics*, 16:147–185, 1974.

[3] M. Bloch, J. B. Guerard, H. M. Markowitz, and P. Todd. A comparison of some aspects of us and japanese equity markets. *Cross-Border Investments and Valuation Conf.*, New York University, September 1991.

[4] Breadley and Myers. *Modern vállalati pénzügyek.* McGraw-Hill Inc, magyar kiadás, 1996.

[5] L. Breiman. Optimal gambling system for favorable games. *Proc. 4th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Propability*, pages 63–68, 1961.

[6] L. Chan, Y. Hamao, and J. Lakonishok. Fundamentals and stock returns is japan. *J. Fin.*, 46:1739–1764, 1991.

[7] V. K. Chorpa and W. T. Ziemba. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal choice. *J. Portfolio. Manag.*, pages 6–11, 1993.

[8] S. Cottle, R. F. Murray, and F. E. Block. *Graham and Dodd's Security Analysis.* McGraw-Hill, 5 edition, 1988.

[9] R. S. Dembo and A. J. King. Tracking models and the optimal regret distribution in asset allocation. *IBM Research Report RC 17156*, 1991.

[10] R. R. Grauer and N. H. Hakansson. Gains from international diversification: 1968-85 returns on portfolios of stock and bonds. *J. Fin.*, 41:721–739, 1987.

[11] J. B. Guerard and Jr. Linear constraints, robust-weighting, and efficient composite modeling. *J. Forecasting*, 6:193–199, 1987.

[12] J. B. Guerard, Jr., and B. K. Stone. Composite forecasting of annual corporate earnings. In A. Chen, editor, *Research in Finance*, volume 10, pages 205–230. JAI Press, Greenwich, CT, 1992.

[13] J. B. Guerard, Jr., and M. Takano. The development of mean-variance efficient portfolios in japan. In *IBES Quantitive Seminar*, Tokyo, June 1992.

[14] J. B. Guerard, Jr., M. Takano, and G. Xu. Composite equity modeling: The problem of survivor-bias in the united states. In *CRSP Seminar*, November 1991.

[15] J. B. Guerard, Jr., M. Takano, and Y. Yamane. The development of efficient portfolos in japan with particular emphasis on sales and earnings forecasting. *Annals of Operation Research*, 45:91–108, 1993.

[16] W. V. Harlow. Asset allocation in a downside risk framework. *Equity Portfolio Analysis Report, Salamon Brothers Inc.*, 1991.

[17] W. V. Harlow and R. K. S. Rao. Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework: Theory and evidence. *J. Fin. Quantit. Anal.*, 24:285–311, 1989.

[18] P. J. Huber. *Robust Statistics.* Wiley, New York, 1981.

[19] S. Kataoka. A stochastic programming model. *Econometrica*, 31:181–196, 1963.

[20] J. Kelly. A new interpretation of information rate. *Bell Syst. Tech. J.*, 35:917–926, 1956.

[21] H. W. Khun and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In Jerzy Neyman, editor, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Propability*, pages 481–492. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[22] A. J. King. Asymmetric risk measures and tracking models for portfolio optimization under uncertany. *Annals of Operation Research*, 45:165–177, 1993.

[23] A. J. King and D. L. Jensen. Linear-quadratic efficient frontiers for portfolio optimization. *Appl. Stoch. Models Data Anal.*, 8:195–207, 1992.

[24] E. Klafszky, J. Mayer, and T. Terlaky. On mathematical programming model of mixing. *Euro. J. Oper. Res.*, 42:254–267, 1989.

[25] H. Konno and H. Yamakazi. *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Application to Tokyo Stock Market.* Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology, IHSS 89-12, 1990.

[26] H. Latane. Criteria for choice among risky ventures. *J. Polit. Econ.*, pages 144–155, 1959.

[27] H. Levy and H. M. Markowitz. Approximating expected utility by a function of mean and variance. *Amer. Econ. Rev.*, pages 318–317, June 1979.

[28] H. M. Markowitz. Portfolio selection. *J. Fin.*, 7:77–91, March 1952.

[29] H. M. Markowitz. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. III.:111–133, 1956.

[30] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* Wiley, New York, 1959.

[31] H. M. Markowitz. Investment for the long run: New evidence for an old rule. *J. Fin.*, 36:1273–1285, 1976.

[32] H. M. Markowitz. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Basil Blackwell, Oxford, 1987.

[33] H. M. Markowitz. Trade-off curves using 250 vs 300 daily observations. Technical report, Daiwa Securities Trust Company, 1992.

[34] H. M. Markowitz, P. Todd, G. L. Xu, and Y. Yamane. Fast computation of mean-variance efficient sets using historical covariance. *J. Fin. Eng.*, 1991.

[35] H. M. Markowitz and G. Xu. Data mining corrections. Publikálás alatt.

[36] J. D. Miller, J. B. Guerard, Jr., and M. Takano. Bridging the gap between therory and practice in equity selection selection modeling: Case studies of us and japanese models. Publikálás alatt.

[37] M. Nakasato and K. Furukawa. On the number of securities which constitute an efficient portfolio. *Annals of Operation Research*, 45:333–347, 1993.

[38] T. J. Nantell, K. Price, and B. Price. Mean-lower partial moment asset pricing model: Some empirical evidence. *J. Fin. Quantit. Anal.*, 17:763–782, 1982.

[39] H. Takehara. An interior point algorithm for large scale portfolio optimization. *Annals of Oper. Res.*, 45:373–386, 1993.