Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
7. hét

1. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$ b)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}+x}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

   d)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 9x^2}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}$

2. Állapítsa meg az alábbi függvényeknek mely pontokban van szakadási helye és ezek milyen típusúak:

   a) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2}$ b) $\dfrac{1}{\sin(3x)}$ c)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{1}{x^4+x^2-2}$

   d) $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ e) $\dfrac{1}{3^{x+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

3. Számoljuk ki a megadott függvények deriváltját a megadott pontban, a definíció alapján.

   a) x^2-x+3, $x_0=-1$ b) $\sqrt{2x-5}$, x_0-ban

   c)$^{\text{hf}}$ $\frac{2x-1}{x+3}$, $x_0=3$ d)$^{\text{hf}}$ $\sqrt[3]{2x-1}$, $x_0=1$.

4. Hol deriválhatóak a megadott függvények? Számoljuk ki a deriváltakat.

   a) $x^7+\dfrac{2}{x}-\sqrt{x}$ b) $x^7\cdot\dfrac{2}{x}\cdot\sqrt{x}$ c) $\operatorname{ctg} x\cdot e^x\cdot\sqrt[5]{x}-3$ d) $e^x+x^e+e^e$

   e) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}$ f) $\sin(2x-1)$ g) $\operatorname{tg}(\pi x)$ h) $e^{\frac{1-x}{1+x}}$

   i) $\sin x^2+\sin^2 x$ j) $\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$ k) $\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$ l) $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}}$

   m) x^x n) $e^{\sin(x)}$ o)$^{\text{hf}}$ $(\sin(x))^x$ p)$^{\text{hf}}$ $x\sin x\cos x$

   q)$^{\text{hf}}$ $\log_x x$ r)$^{\text{hf}}$ $(x^3-3x+8)^{2014}$ s)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}$ t)$^{\text{hf}}$ $(\sin^3(x)+2)^7$

5. Legyen
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x\neq1,\\ \beta, & \text{ha } x=1.\end{cases}$$

   a) Megválasztható-e β értéke úgy, hogy az f függvény folytonos legyen $x=1$-ben?
   b) $f'(x)=?$, ha $x\neq1$
   c) $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=?$ Létezik-e $f'(1)$?

Emlékeztető

– Ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény értelmezve van x_0 egy környezetében, akkor a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ számot (amennyiben létezik és véges) f x_0-beli *deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$-val jelöljük.

– Az $x\mapsto f'(x)$ függvényt f *derivált függvényének*, vagy röviden *deriváltjának* nevezzük, és f'-vel jelöljük.