Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2. hét

1. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:

   a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < -2\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-3| > 2\}$

   d) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| \geq |z-2|\}$ e) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 3\}$ f) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}(z+1) \geq \operatorname{Re} z\}$

   g) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z^2 = (\operatorname{Im} z)^2\}$ h)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+2i| = \pi\}$ i)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| \geq |z|\}$

   j)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$ k)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$ l)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ z = \bar{z}\}$

2. Mi lehet z, ha...

   a) $\bar{z} - z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$ b) $z^2 - \bar{z} = 1$

   c) $|z| + z = 1 - i$ d)$^{\text{hf}}$ $\arg z = 3\pi/4$, $\operatorname{Re} z = 5$

   e)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z-2| = 3$

3. Írjuk a következő komplex számokat algebrai vagy trigonometrikus alakba alakba! (A gyökjelek a b) jelű feladat kivételével komplex gyökvonást jelentenek.)

   a) $(1-i)^{997}$ b) $(1-i\sqrt{3})^{14} - 3$ c) $\sqrt[4]{1}$ d) $\sqrt[3]{-8i}$

   e)$^{\text{hf}}$ i^{2009} f)$^{\text{hf}}$ $\frac{1}{\sqrt{i}}$ g)$^{\text{hf}}$ $(-1-i)^{2014} + 500i$ h)$^{\text{hf}}$ $\frac{\sqrt{i}}{1-i}$

4. A feladatokban szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezős felbontását!

   a) $z^2 - iz + 3 + 2i$ b) $z^4 + 1$ c)$^{\text{hf}}$ $3z^2 - iz^2 + 3iz + 6 - i$

   d)$^{\text{hf}}$ $z^5 - z^2$

5. Legfeljebb hány nem valós, komplex gyöke lehet egy hetedfokú polinomnak?

6. Egy szabályos hatszög középpontja $3 + 2i$, egyik csúcsa $2 + i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

7.$^{\text{hf}}$ Pistike rondán ír, és nem tudja eldönteni, hogy a füzetében egy helyen $\bar{z}^2$, (azaz $(\bar{z})^2$) vagy pedig z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) áll. Van olyan z komplex szám, amelyre ez a két szám egyenlő?

8.$^{\text{hf}}$ Hol a hiba? $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1}\sqrt{1} = \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1$

Emlékeztető

– $r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$

– $\sqrt[n]{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.