Definíciók és tételek (A2 Biomérnök)

Számsorok

. Az $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n)$ sor *Leibniz típusú*, ha $(|a_n|)$ sorozat monoton fogyó null-sorozat és (a_n) váltakozó előjelű.

. Az (a_n) sorozat *limes superior*-ja $(\limsup(a_n))$ az a_n "legnagyobb" torlódási pontja, azaz az α megegyezik $\limsup(a_n)$-el, ha α az (a_n) torlódási pontja, de $\beta > \alpha$ esetén β nem torlódási pont. (Igazolható, hogy $\limsup(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k\ k \geq n\}$.)

- Leibniz típusú sor konvergens.
- **Gyökkritérium:** A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n)$ sor konvergens ha $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ és divergens ha $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.
- **Hányadoskritérium:** A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n)$ sor konvergens, ha $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ divergens, ha végtelen sok n-re $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$.

Függvénysorok

. (f_n) *konvergens* az $x \in [a,b] = \mathcal{D}(f_n)$ pontban, ha az $(f_n(x))$ számsorozat konvergens.

. Legyen $C^{\infty}[a,b]$ az $[a,b]$-n akárhányszor folytonosan differenciálható függvények osztálya. Az $f \in C^{\infty}[a,b]$ függvény *Taylor sora* az x_0 pontban a következő hatványsor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

. Az f a $[0,2\pi]$ intervallumon integrálható függvény *Fourier sora* a következő trigonometrikus sor:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right)\cos(kx) + \left(\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t\right)\sin(kx)\right].$$

- **Cauchy-Hadamard tétel:** A $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ hatványsor az
$$\left(x_0 - \frac{1}{\limsup\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}, x_0 + \frac{1}{\limsup\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}\right)$$
intervallum belsejében konvergens, kívül divergens, határpontokban lehet konvergens is divergens is.
- **Tétel a Fourier sor konvergenciájáról** Az f Fourier sora az x_0 pontban konvergál $f(x_0)$-hoz, ha f kielégíti az x_0 pontban a lokális Lipschitz feltételt, azaz x_0-nak van olyan környezete és ahhoz egy M szám úgy, hogy a környezeten belül bármely x', x'' pontpárra teljesül az $|f(x') - f(x'')| < M|x' - x''|$ egyenlőtlenség.

Mátrixok:

. Az $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és a $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{k\times m}$ *mátrixok szorzata* az a $C = [c_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrix, mely i-edik sorának j-edik eleme $c_{i,j} = \sum\limits_{l=1}^{k} a_{i,l}b_{l,k}$.

. Legyen $\det A = a_{1,1}$, ha $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix determinánsa* legyen $\det A :=$ $= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1,i} \det A_1^i$, ahol a_1^i az A-ból, annak első sora és i-edik oszlopa elhagyásával kapott mátrix.

. Az $A : V \to W$ a V és W valós vektorterek egy *lineáris leképezése*, ha őrzi a lineáris kombinációt, azaz: $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$ teljesül tetszőleges két u,v vektorra és tetszőleges α, β valós számpárra.

- **Determinánsok szorzás tétele**: Az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsaik szorzata. $\det AB = \det A \det B$.
- **Tétel az inverz mátrix kiszámításáról:** Az A mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det A \neq 0$. Ekkor
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj} A$$
ahol adj$A$ i-edik sorának j-edik eleme $(-1)^{j+i} \det A_j^i$.

Az $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezések:

. Az $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvénynek az e irányban vett *iránymenti deriváltja* az x pontban a
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e) - f(x)}{\varepsilon}$$
határérték, ha létezik.

. Az $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *leképezés differenciálható az $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}(f)$ pontban*, ha van $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kisordó leképezés és $U \subset \mathcal{D}(f)$ környezet úgy, hogy minden $x \in U$ esetén
$$f(x) - f(a) = A(x - a) + r(x - a)$$
áll fenn. ($r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *kisordó* függvény ha $r(0) = 0$, és $\lim_{h\to o} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$.) Az f *totális deriváltja az a pontban* az említett A lineáris leképezés mátrixa egy standard ortonormált bázisban felírva.

. Az $N \subset \mathbb{R}^2$ tartomány *normáltartomány az x-tengelyre nézve*, ha van olyan $a < b$ számpár és $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvénypár, hogy $\varphi_1 \leq \varphi_2$ és
$$N = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad a \leq x \leq b \text{ esetén } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}.$$

- **Láncszabály**: Ha az $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ illetve $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ leképezések differenciálhatók az $g(a) \in \mathcal{D}(f)$ illetve $a \in \mathcal{D}(g)$ pontokban, akkor $f \circ g$ is differenciálható az a pontban és a totális deriváltakra teljesül a
$$D(f \circ g)(a) = D(f)(g(a)) \cdot D(g)(a)$$
szorzási szabály.
- **Normáltartományon integrálás**: Legyen N az x-tengelyre nézve normáltartomány. Ha az f függvény integrálható N-en, akkor
$$\int_N f = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Differenciálegyenletek:

. Az $y' = f(x)g(y)$ alakú differenciálegyenletet *szétválasztható változójú differenciálegyenletnek* nevezzük. Erre visszavezethetők az $y' = f(ax + by + c)$ illetve az $y' = f(\frac{y}{x})$ alakú differenciálegyenletek.

. Az $y' + f(x)y = g(x)$ differenciálegyenlet az *inhomogén elsőrendű lineáris* differenciálegyenlet, a $g(x) = 0$ esetben beszélünk *homogén elsőrendű lineáris* differenciálegyenletről. Ennek általános megoldása az

$$y = \left\{ C + \int h(x) e^{\int g(x) \mathrm{dx}} \mathrm{dx} \right\} e^{-\int g(x) \mathrm{dx}}$$

függvény. Erre visszavezethető a *Bernoulli-féle differenciálegyenlet*, ami $y' + g(x)y = = h(x)y^n$ alakú, ha $n \neq 1$ illetve $h(x) \neq 0$.

- **Egzisztencia és unicitás tétel**: Az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet jobb oldala értelmezett az $\mathbb{R}^2$ egy T tartományán és ott folytonosan deriválható (totális értelemben). Ekkor tetszőleges $(x_0, y_0) \in T$ pontban van olyan y megoldása, melyre $y(x_0) = y_0$, továbbá, ha két megoldás valamely x_0 értékben megegyezik, azaz $y'(x_0) = y''(x_0)$, akkor a két megoldás megegyezik mindazon pontokban, ahol mindkettő értelmezett.