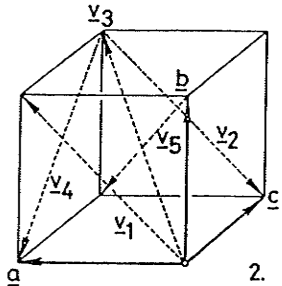
A FELADATOK MEGOLDÁSAI

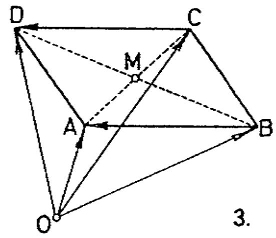
1. $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{b} - \underline{c}$, $\underline{c} - \underline{a}$.



2.

2. $\underline{v}_1 = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v}_2 = -(\underline{a} + \underline{b})$,
$\underline{v}_3 = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{v}_4 = -(\underline{b} + \underline{c})$,
$\underline{v}_5 = \underline{a} + \underline{b} - \underline{c}$.

3. <u>I. megoldás</u>: Az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ a paralelogramma két szemközti élvektora, ezért egyenlők. Az egyenlőségből átrendezéssel következik a bizonyitandó.



3.

<u>II. megoldás</u>: Az átlók M metszéspontjához - azaz felezési pontjaikhoz mutató -

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

vektorok egyenlők, tehát kétszereseik is egyenlők.

4. Az előző feladat alapján $\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{d}$, tehát $\underline{d} = \underline{a} + \underline{c} - \underline{b}$.

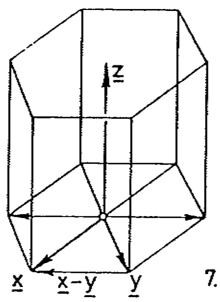
5. Ha az élvektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, a velük közös csúcsból induló lapátlóvektorok $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$, tehát

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{x}$$
$$\underline{b} + \underline{c} = \underline{y}$$
$$\underline{c} + \underline{a} = \underline{z}.$$

E három egyenlet összege: $2(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$. Ebből az egyenletek kétszereseit kivonva kapjuk rendre, hogy

$$\underline{c} = \frac{-\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}}{2}, \qquad \underline{a} = \frac{\underline{x} - \underline{y} + \underline{z}}{2}, \qquad \underline{b} = \frac{\underline{x} + \underline{y} - \underline{z}}{2}.$$

6. Állitsuk elő a sikban forgó vektorokat a hatszögcsúcsok helyvektorai segitségével.



7.

7. Az alaplap csúcsainak helyvektorai:

$\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{y} - \underline{x}$, $-\underline{x}$, $-\underline{y}$, $\underline{x} - \underline{y}$.

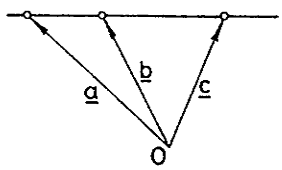
A fedőlapé:

$\underline{x} + \underline{z}$, $\underline{y} + \underline{z}$, $\underline{y} - \underline{x} + \underline{z}$, stb.

8. Az $|\underline{a}|\,\underline{b}$ és $|\underline{b}|\,\underline{a}$ vektorok egy rombuszt feszitenek ki, a paralelogramma szabály szerint $|\underline{a}|\,\underline{b} + |\underline{b}|\,\underline{a}$ ennek a rombusznak átlóvektora.

9. Mindkét vektor hossza $|\underline{a}|\,|\underline{b}|$.

10. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ végpontjait, illetve a $\underline{b}$ és $5\underline{a} - 4\underline{b}$ végpontjait összekötő vektorok $\underline{a} - \underline{b}$, illetve $5(\underline{a} - \underline{b})$, ezek kollineárisak, tehát a három végpont valóban egy egyenesen van.



11.

11. $\underline{c}$ végpontja akkor és csakis akkor van rajta az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ végpontjai által meghatározott egyenesen, ha a $\underline{c} - \underline{a}$ és $\underline{b} - \underline{a}$ kollineárisak.

Ha $\underline{c} = \alpha\underline{a} + (1 - \alpha)\underline{b}$, akkor $\underline{c} - \underline{a} = (1 - \alpha)(\underline{b} - \underline{a})$, tehát $\underline{c} - \underline{a}$ és $\underline{b} - \underline{a}$ kollineárisak, ha viszont végpontjaik egy egyenesen vannak, $\underline{c} - \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$ kollineárisak, tehát van olyan α, hogy $\underline{c} - \underline{b} = \alpha(\underline{a} - \underline{b})$, azaz $\underline{c} = \alpha\underline{a} + (1 - \alpha)\underline{b}$.

12. Jelöljük a négyszög csúcsaihoz, illetve oldalfelező pontjaihoz tartozó helyvektorokat a megfelelő kisbetükkel. Ekkor

$$\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}, \quad \underline{y} = \underline{c} - \underline{d}, \quad \underline{f}_1 = \frac{\underline{a} + \underline{d}}{2}, \quad \underline{f}_2 = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2} .$$

Ezért

$$\underline{f} = \underline{f}_2 - \underline{f}_1 = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} + \frac{\underline{c} - \underline{b}}{2} = \frac{\underline{x} + \underline{y}}{2} .$$

13. Ha a tetraéder csúcsainak helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, az élfelező pontoké

$$\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}, \quad \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2}, \quad \frac{\underline{c} + \underline{d}}{2}, \quad \frac{\underline{d} + \underline{a}}{2} ;$$

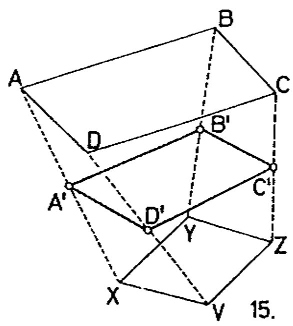
a felezőpontok által meghatározott négyszög két szemközti oldal vektora egyaránt

$$\frac{\underline{a} - \underline{c}}{2} ,$$

ezért valóban paralelogramma.

14. Ha a négyszög csúcsainak helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, a középvonalak felezőpontjainak és az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjának a helyvektora egyaránt

$$\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{4} .$$



15. Legyenek a szakaszok felezőpontjai rendre A', B', C', D' és az alakzat pontjainak helyvektorait jelöljük a megfelelő kisbetükkel. Az ABCD és XYZV paralelogramma voltából következik, hogy $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ és $\underline{y} - \underline{x} = \underline{z} - \underline{v}$. Azt kell bizonyitanunk,

hogy $\underline{b}' - \underline{a}' = \underline{c}' - \underline{d}'$. Mivel $\underline{b}' = \frac{\underline{b} + \underline{y}}{2}$, $\underline{a}' = \frac{\underline{a} + \underline{x}}{2}$, $\underline{c}' = \frac{\underline{c} + \underline{z}}{2}$ és $\underline{d}' = \frac{\underline{d} + \underline{v}}{2}$, ezek helyettesitésével a bizonyitandó adódik.

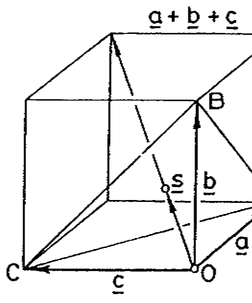
16. $2\underline{b} - \underline{a}$.

17. Legyenek A, B, C, P helyvektorai rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{p}$. A tükörképek helyvektorai rendre $2\underline{a} - \underline{p}$, $2\underline{b} - 2\underline{a} + \underline{p}$, $2\underline{c} - 2\underline{b} + 2\underline{a} - \underline{p}$, $-2\underline{c} + 2\underline{b} + \underline{p}$, $2\underline{c} - \underline{p}$, $\underline{p}$.

18. Egy szabályos háromszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok.

19. Mérjük fel egy pontból kiindulva a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokat. Egyik tetszőleges vektorból kiindulva adjuk össze a vektorokat olyan sorrendben, hogy minden vektorhoz azt füzzük hozzá, amely pozitiv körüljárási irányt betartva a legközelebb van hozzá. Az igy nyert zárt vektorsokszög konvex lesz.

20. $\frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{3}$, $\frac{2\underline{a} + \underline{b}}{3}$.



21.

21. A paralelepipedon O csúcsából kiinduló $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ élvektorok végpontjai A, B, C. Az O-ból induló testátlóvektor $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, az ABC háromszög súlypontjának helyvektora

$$\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3},$$

tehát a testátlóvektor harmada, ami éppen azt jelenti, hogy az ABC sik harmadolja a testátlót.

22. A keresett O pont a pontok meghatározta pontrendszer súlypontja. Megszerkeszthetjük úgy, hogy egy tetszőleges pontból a pontokhoz mutató helyvektorok összegének az ötödét vesszük, az O-nak ez lesz a helyvektora.

23. Legyen az n-oldalú szabályos sokszög középpontja O, ebből a csúcsokba mutató vektorok $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$; a súlypont $\underline{s}$ helyvektora:

$$\underline{s} = \frac{\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \ldots + \underline{a}_n}{n} .$$

Forgassuk el a sokszöget a vektorokkal együtt O körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel, és legyen az $\underline{s}$ elforgatottja $\underline{s}'$. Mivel a csúcsok helyvektorainak halmaza az elforgatással önmagába megy át, $\underline{s} = \underline{s}'$, ami csak úgy lehetséges, ha $\underline{s} = \underline{o}$, tehát O a súlypont.

24. Legyenek a csúcsok helyvektorai rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Állitsuk elő ezekkel a tetraéder és a lapok súlypontjait, stb.

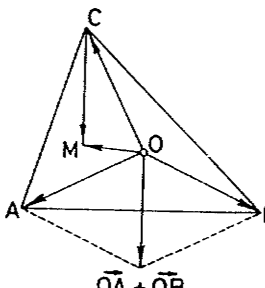
25. A feladatok megoldásánál azt kell felhasználnunk, hogy minden vektor csak egyféleképpen bontható fel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ irányú összetevőkre, tehát pl. az

a) esetben: $\alpha = 3$, $2\beta + 1 = 5$; $\beta = 2$;

b) $\alpha + \beta - 1 = 0$, $2\alpha - \beta = 0$; $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$;

c) $\alpha = \beta + 1$, $\beta = -\alpha + 1$; $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

26. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$, mivel mindkét oldalon P-ből a négyzet középpontjába mutató vektor kétszerese áll, ezért $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}|$ = a kör átmérője.

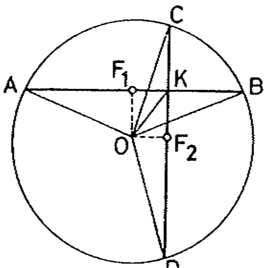


27.

27. Mérjük fel az O-ból az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$-t, és legyen a végpontja M, tehát

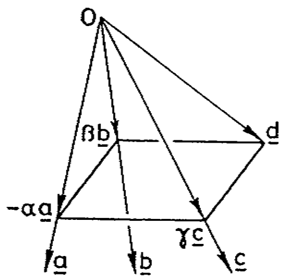
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Elegendő megmutatni, hogy M rajta van ABC tetszőleges magasságvonalán, pl. a C-ből indulón azaz $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$. Mivel $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ valóban merőleges az AB oldalra a paralelogramma szabály miatt (rombusz!).



28.

28. Mivel $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OK}$, ha az AB, illetve CD szakaszok felezési pontjai F_1 és F_2, $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - 4\,\overrightarrow{OK} = 2(\overrightarrow{OF_1} + \overrightarrow{OF_2}) - 4\,\overrightarrow{OK} = 2\,\overrightarrow{OK} - 4\,\overrightarrow{OK} = 2\,\overrightarrow{KO}$, tehát az összeg csakis K helyzetétől függ.



29.

29. Az egyenesek közös O pontjából az egyenesek irányába mutató vektorok legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Közülük $\underline{d}$ biztosan előállítható

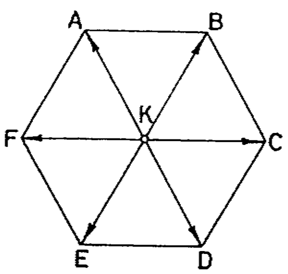
$$\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$$

alakban, ebből

$$\underline{d} - \gamma\underline{c} = \beta\underline{b} - (-\alpha\underline{a}),$$

tehát az O-ból induló $-\alpha\underline{a}$, $\beta\underline{b}$, $\gamma\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok végpontjai paralelogrammát alkotnak.

30. (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1).



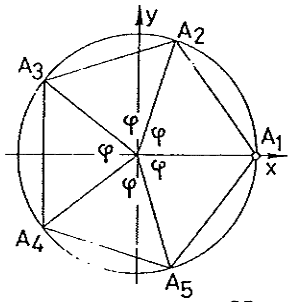
31.

31. Legyenek a hatszög csúcsai ABCDEF. Mivel $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} = (0,1,-1)$, a C csúcs koordinátái (4,2,3). A többi csúcs koordinátái az A,B,C csúcsok K-ra vonatkozó tükrözéséből adódnak, ezért D(5,1,3), E(5,0,4), F(4,0,5).

32. Felhasználhatjuk pl. hogy az AC és BD szakaszoknak azonos a felezési pontja, ebből: $D(-2,-1,12)$.

33. $C(-7,5,-1)$, $D(1,4,2)$.

34. Ha A,B,C helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, akkor a paralelepipedon többi csúcsába rendre az $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$, $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok vezetnek, ezek koordinátái azonosak a csúcsok koordinátáival, tehát: $(-1,13,-4)$, $(5,8,-3)$, $12,7,-7)$, $(8,14,-7)$.



35.

35. Legyen $\varphi = 360^\circ/5 = 72^\circ$. A csúcsok helyvektorai rendre a φ, 2φ, 3φ, 4φ irányszögü egységvektorok, ezért a koordináták: $A_2(\cos 72^\circ, \sin 72^\circ)$, $A_3(\cos 144^\circ, \sin 144^\circ)$, $A_4(\cos 216^\circ, \sin 216^\circ)$, $A_5(\cos 288^\circ, \sin 288^\circ)$.

36. Két vektor akkor kollineáris, ha egyikük a másiknak számszorosa, ezért:

a) nem kollineárisak, mert ha pl. $\underline{a} = \lambda\underline{b}$ lenne, akkor a harmadik koordinátára tekintettel $\lambda = 7$ lenne, de ez az első két koordináta esetében nyilván nem felel meg;

b) kollineárisak, $\underline{d} = \frac{2}{3}\underline{c}$;

c) kollineárisak, $\underline{f} = 0 \cdot \underline{e}$.

37. Három pont akkor van egy egyenesen, ha összekötővektoraik kollineárisak, azaz egyik a másiknak számszorosa.

a) Mivel $\vec{AB}(6,-5,-5)$, $\vec{BC}(12,-10,-10)$, $\vec{BC} = 2\vec{AB}$ és igy A,B,C egy egyenesen vannak;

b),c) kollineárisak; d) nincsenek egy egyenesen.

38. Az $\vec{AB}$ és $\vec{BC}$ vektoroknak kollineárisaknak kell lenniük; mivel pedig koordinátáik

$$\vec{AB}(1,5,-2), \quad \vec{BC}(2,y-4,z-1),$$

ez csak úgy lehetséges (az első koordináták miatt), ha $\vec{BC} = 2\vec{AB}$, ezért $y - 4 = 10$, $y = 14$; $z - 1 = -4$, $z = -3$, tehát $C(7,14,-3)$.

39. Ha P, C és P-nek C-re vonatkozó tükörképének, P'-nek a helyvektorai rendre $\underline{p}, \underline{c}, \underline{p}'$, akkor $\underline{c} = \frac{\underline{p} + \underline{p}'}{2}$, és ebből $\underline{p}' = 2\underline{c} - \underline{p}$, tehát $\underline{p}'$-nek, azaz P'-nek a koordinátái $(3,18,-12)$.

40. A negyedik tükörkép azonos P-vel. A tükörképek rendre $(13,-3,-1)$, $(-17,11,1)$, $(7,-3,3)$, $(1,3,-1)$. Az eredmény tetszőleges paralelogramma és tetszőleges P pont esetén is ugyanez: a negyedik tükörkép azonos P-vel.

41. Az [xy] síkon $\underline{v}_1(a_1,a_2,0)$; az [yz] síkon $\underline{v}_2(0,a_2,a_3)$; a [zx] síkon $\underline{v}_3(a_1,0,a_2)$.

42. Igen, mivel mindegyikük komplanáris $\underline{a}$-val és $\underline{b}$-vel.

43. $\underline{d}$-t $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$ alakban keressük. Ha az $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{d}$ egyenletet mindhárom koordinátára felírjuk, a

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + \gamma &= 9 \\ -\alpha + 3\beta \quad &= -9 \\ \alpha \quad + 7\gamma &= 10 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, tehát a felbontás: $\underline{d} = 3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$, az összetevők: $3\underline{a}(6,-3,3)$, $-2\underline{b}(2,-6,0)$, $\underline{c}(1,0,7)$.

44. A feladat az előző feladat mintájára oldható meg, $\underline{d} = -3\underline{a} - 3\underline{b} + 7\underline{c}$, az összetevők: $-3\underline{a}(24,-21,-3)$, $-3\underline{b}(0,-9,-6)$, $7\underline{c}(7,-7,28)$.

45. $\underline{v} = 8\underline{a} + \underline{b}$, az összetevők: $8\underline{a}(16,56)$, $\underline{b}(-3,0)$.

46. Három vektor akkor nem független, ha egy síkban vannak.

a) függők; b) függők; c) függetlenek; d) függők.

47. $\underline{a},\underline{b}$; $\underline{a},\underline{d}$; $\underline{b},\underline{c}$; $\underline{b},\underline{d}$; $\underline{c},\underline{d}$.

48. Négy vektor sohasem lehet független.

49. a) Ha a lapátlókkal közös csúcsból induló kockaélek vektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, akkor $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{y} = \underline{b} + \underline{c}$, ezért – mivel az élvektorok közül bármely kettő merőleges egymásra – $\underline{x}\underline{y} = (\underline{a} + \underline{b})(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{b}^2 = 1$.

b) $\cos\alpha = \dfrac{\underline{x}\underline{y}}{|\underline{x}||\underline{y}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$.

50. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 2\cos 60^\circ = 2$.

51. Lásd a 49. feladat megoldásának gondolatmenetét.
$\underline{a}\underline{v} = 1$, $\alpha = 54{,}74^\circ$.

52. $\frac{2}{3}$.

53. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ a két nem kollineáris vektor és a rájuk merőleges vektor $\underline{c}$, tehát $\underline{a}\underline{c} = 0$ és $\underline{b}\underline{c} = 0$. A síkjuk minden vektora $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ alakú, tehát csak az $(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})\underline{c} = 0$ teljesülését kell igazolnunk, ami nyilvánvaló.

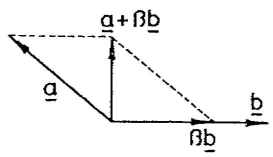
54. Feltehetjük, hogy a szóbanforgó vektorok mind egységvektorok, mert ha minden vektor helyett az irányába mutató egységvektort vesszük, a vektorok szögét nem változtatjuk meg. Legyenek a síkbeli egységvektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$, $\underline{v}$ velük α szöget zár be, ezért $\cos\alpha = \underline{v}\underline{a} = \underline{v}\underline{b} = \underline{v}\underline{c}$, ebből $\underline{v}(\underline{a} - \underline{b}) = \underline{v}(\underline{b} - \underline{c}) = 0$, tehát $\underline{v}$ merőleges az $\underline{a} - \underline{b}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorokra. $\underline{a} - \underline{b}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ nem lehetnek kollineárisak, $\underline{v}$ tehát merőleges a sík két nem kollineáris vektorára, ezért merőleges a síkra is.

55. Legyen az origó O; A,B,C helyvektorai legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Azt kell bizonyítani, hogy $\underline{a}(\underline{b} - \underline{c}) + \underline{b}(\underline{c} - \underline{a}) + \underline{c}(\underline{a} - \underline{b}) = 0$, ami a szorzások elvégzésével azonnal következik.

56. Legyenek az A, B, P pontok helyvektorai $\underline{a}$, $-\underline{a}$, $\underline{p}$. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\underline{a} - \underline{p})(\underline{a} + \underline{p})$ akkor és csakis akkor 0, ha PA és PB merőlegesek. Mivel $(\underline{a} - \underline{p})(\underline{a} + \underline{p}) = \underline{a}^2 - \underline{p}^2 = 0$, $|\underline{p}| = PO = |\underline{a}| = OA$.

57. A szorzás disztributiv szabályát alkalmazva $(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 2\underline{a}\underline{b} + 2\underline{b}\underline{c} + 2\underline{c}\underline{a}$, az utóbbi három tag azonban 0, mert páronként merőleges vektorok szorzata.

58. $\underline{a}$-ral való skaláris szorzatuk 0.



59.

59. A merőlegesség miatt $0 = \underline{b}(\underline{a} + \beta\underline{b}) = \underline{a}\underline{b} + \beta\underline{b}^2$, ebből

$$\beta = -\frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2}.$$

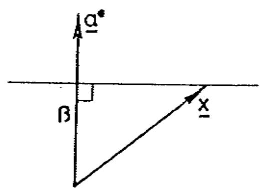
A szerkesztés az ábráról leolvasható. Mind a számolásból, mind a szerkesztésből kitünik, hogy $\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{a} - \frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2}\underline{b}$, az $\underline{a}$ $\underline{b}$-ra merőleges összetevője.

60. a) Legyenek az egységvektorok $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, szögük α az $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = \underline{o}$ egyenlet négyzetre emelve:
$3 + 6 \cos\alpha = 0$, $\alpha = 120^\circ$.

b) $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4 = \underline{o}$, négyzetre emelés után:

$4 + 12 \cos\alpha = 0$, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 109{,}47^\circ$. (Az $\underline{e}_i$ vektorok egy szabályos tetraéder középpontjából a csúcsokba vezetnek.)

61. A kezdőpontból a metszéspontokba mutató vektorokkal fejezzük ki a háromszög oldalvektorait és mutassuk meg, hogy közülük bármely kettő skaláris szorzata pozitiv.



62.

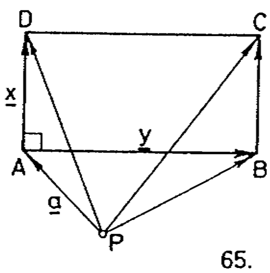
62. Ha az $\underline{a}\underline{x} = \alpha$ egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $|\underline{a}|$-kel és bevezetjük az $\frac{\alpha}{|\underline{a}|} = \beta$ jelölést, kapjuk, hogy

$$\underline{a}^o\underline{x} = \beta,$$

ez azonban azt jelenti, hogy az $\underline{x}$ vektorok $\underline{a}^o$ irányán levő előjeles vetülete mindig β hosszúságú, az $\underline{x}$ vektorokat tehát a következő módon állíthatjuk elő: $\underline{a}^o$ kezdőpontjából $\underline{a}^o$ egyenesére előjelesen felmérjük a β távolságot és végpontjában $\underline{a}^o$-ra merőleges síkot állítunk. $\underline{a}^o$ kezdőpontjából a sík pontjaihoz mutató vektorok a feltételnek eleget tevő $\underline{x}$ vektorok.

63. Legyenek az s súlypontból rendre az A,B,C,P pontokba mutató vektorok $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{p}$. Ezzel a jelöléssel $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (\underline{a} - \underline{p})^2 + (\underline{b} - \underline{p})^2 + (\underline{c} - \underline{p})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 3\underline{p}^2 - 2\underline{p}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$. Mivel $\underline{p}^2 = r^2$ és $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$, a négyzetösszeg $= \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 3r^2 =$ állandó.

64. Ha a paralelogramma egy csúcsból kiinduló két oldalvektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor átlóvektorai $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$, azt kell tehát igazolnunk, hogy $(\underline{a} + \underline{b})^2 + (\underline{a} - \underline{b})^2 = 2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2$, ami nyilvánvaló.



65.

65. Az ábra jelöléseit használva

$\vec{PA}^2 + \vec{PC}^2 = \underline{a}^2 + (\underline{a} + \underline{x} + \underline{y})^2 = 2\underline{a}^2 + \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + 2\underline{a}(\underline{x} + \underline{y})$,

$\vec{PB}^2 + \vec{PD}^2 = (\underline{a} + \underline{y})^2 + (\underline{a} + \underline{x})^2 = 2\underline{a}^2 + \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + 2\underline{a}(\underline{x} + \underline{y})$,

amivel állításunkat bizonyítottuk.

66. Legyen $\vec{DA} = \underline{a}$, $\vec{DB} = \underline{b}$, $\vec{DC} = \underline{c}$. A feltétel szerint

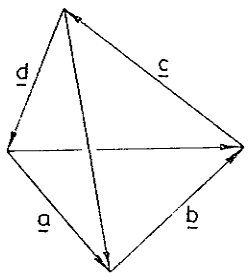
$\underline{c}(\underline{a} - \underline{b}) = 0$, $\underline{a}(\underline{b} - \underline{c}) = 0$, e két egyenlet megfelelő oldalait összeadva a $\underline{b}(\underline{a} - \underline{c}) = 0$ egyenlőséget kapjuk, ami éppen a bizonyitandót igazolja.

67. Legyen $\overrightarrow{DA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{DB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{c}$. A feltételezett azonosság azt jelenti, hogy $(\underline{a} - \underline{b})^2 + \underline{c}^2 = (\underline{a} - \underline{c})^2 + \underline{b}^2 = (\underline{b} - \underline{c})^2 + \underline{a}^2$. Az egyenlőség első része azt jelenti, hogy

$$\underline{a}^2 + \underline{b}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{c}^2 = \underline{a}^2 + \underline{c}^2 - 2\underline{a}\underline{c} + \underline{b}^2,$$

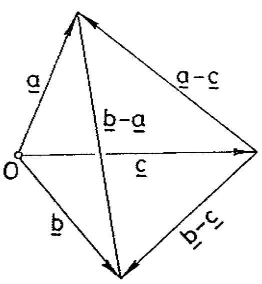
$$\underline{a}(\underline{c} - \underline{b}) = 0$$

azaz $AD \perp BC$. Gondolatmenetünk megforditásával adódik, hogy ha $AD \perp BC$, akkor $AB^2 + CB^2 = AC^2 + BD^2$. Hasonlóan bizonyitható a feladat még hátralevő része is.



68.a.

68. I. megoldás: Megmutatjuk, hogy ha az átlók merőlegesek, akkor a szemközti oldalak négyzetösszege szükségképpen egyenlő, és ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő, akkor az átlók merőlegesek. Az ábra jelöléseit használva a szemközti oldalak négyzetösszege: $\underline{a}^2 + \underline{c}^2$, ill. $\underline{b}^2 + \underline{d}^2$; az átlóvektorok $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{b} + \underline{c}$. Az átlóvektorok merőlegessége azt jelenti, hogy $(\underline{a} + \underline{b})(\underline{b} + \underline{c}) = 0$, azaz $\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{c} + \underline{b}^2 = 0$. Mivel $\underline{d} = -(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$, ezért $\underline{b}^2 + \underline{d}^2 = \underline{b}^2 + \underline{a}^2 + \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 2\underline{a}\underline{b} + 2\underline{a}\underline{c} + 2\underline{b}\underline{c} = \underline{a}^2 + 2(\underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{c} + \underline{a}\underline{c} + \underline{b}^2) + \underline{c}^2 = \underline{a}^2 + \underline{c}^2$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy a szemközti oldalak négyzetösszege akkor és csakis akkor egyenlő egymással, ha az átlók merőlegesek.

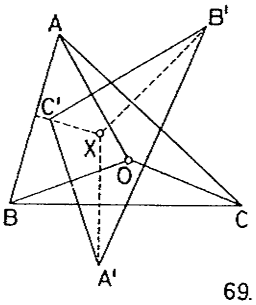


68.b.

II. megoldás: A feltétel szerint $(\underline{b} - \underline{a})\underline{c} = 0$. A csuklós négyszög egy új helyzetében legyenek az O pontból induló élvektorok $\underline{a}_1$, $\underline{b}_1$, $\underline{c}_1$. Mivel a négyszög-oldalak hossza változatlan, $\underline{a}^2 = \underline{a}_1^2$, $\underline{b}^2 = \underline{b}_1^2$, $(\underline{a} - \underline{c})^2 = (\underline{a}_1 - \underline{c}_1)^2$ és $(\underline{b} - c)^2 = (\underline{b}_1 - c_1)^2$, ez utóbbi kettő részletesen:

$$\underline{a}^2 + \underline{c}^2 - 2\underline{a}\underline{c} = \underline{a}_1^2 + \underline{c}_1^2 - 2\underline{a}_1\underline{c}_1,$$
$$\underline{b}^2 + \underline{c}^2 - 2\underline{b}\underline{c} = \underline{b}_1^2 + \underline{c}_1^2 - 2\underline{b}_1\underline{c}_1.$$

E két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből adódik, hogy $(\underline{b} - \underline{a})\underline{c} = (\underline{b}_1 - \underline{a}_1)\underline{c}_1 = 0$, tehát az átlók az új helyzetben is merőlegesek.



69.

69. Az A,B,C csúcsokból induló merőlegesek találkozzanak az origóul választott O pontban, az A'-ből és B'-ből indulók pedig az X pontban. Elegendő azt igazolnunk, hogy XC' merőleges AB-re. A szóban forgó pontok helyvektorait jelöljék a megfelelő kisbetük. A feltételezett merőlegességek miatt

$$\underline{a}(\underline{b}' - \underline{c}') = 0,\ \underline{b}(\underline{c}' - \underline{a}') = 0,\ \underline{c}(\underline{a}' - \underline{b}') = 0,$$
$$(\underline{a}' - \underline{x})(\underline{b} - \underline{c}) = 0,\ (\underline{b}' - \underline{x})(\underline{c} - \underline{a}) = 0.$$

A beszorzások után ezek ilyen alakban irhatók:

$$\underline{a}\underline{b}' = \underline{a}\underline{c}',\ \underline{b}\underline{c}' = \underline{b}\underline{a}',\ \underline{c}\underline{a}' = \underline{c}\underline{b}',\ \underline{a}'\underline{b} - \underline{a}'\underline{c} =$$
$$= \underline{x}(\underline{b} - \underline{c}),\ \underline{b}'\underline{c} - \underline{b}'\underline{a} = \underline{x}(\underline{c} - \underline{a}).$$

Bizonyitandó: $(\underline{c}' - \underline{x})(\underline{b} - \underline{a}) = 0$, azaz $\underline{c}'\underline{b} - \underline{c}'\underline{a} = \underline{x}(\underline{b} - \underline{a})$.

Adjuk össze az utolsó két feltételi egyenletet, majd használjuk fel bennük az első három egyenlet által nyújtott helyettesitési lehetőségeket, igy éppen a bizonyitandóhoz jutunk.

70. 7, 100, 29, 38.

71. a) tompaszög; b) hegyesszög; c) derékszög; d) hegyesszög.

72. $|\underline{a}| = 18$, $|\underline{b}| = 3$, $|\underline{c}| = 1$, $|\underline{d}| = \sqrt{197}$, $|\underline{e}| = 25$, $|\underline{f}| = \sqrt{2}$.

73. Mivel $\underline{a}^{\circ} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$, és $|\underline{a}| = \sqrt{4^2+(-12)^2+3^2} = 13$,

$\underline{a}^{\circ} = (\frac{4}{13}, -\frac{12}{13}, \frac{3}{13})$;

$\underline{b}^{\circ} = (0,0,-1)$, $\underline{c}^{\circ} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}})$, $\underline{d}^{\circ} - (-\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13})$;

$\underline{e}^{\circ} = (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$, $\underline{f}^{\circ} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

74. $\underline{v}_1^{\circ}(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$, $\underline{v}_2^{\circ}(0,0,-1)$, $\underline{v}_3^{\circ}(-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$,

$\underline{v}_4^{\circ}(\frac{9}{\sqrt{346}}, \frac{16}{\sqrt{346}}, -\frac{3}{\sqrt{346}})$.

75. a) 90°; b) $57{,}49^{\circ}$; c) 60°; d) $107{,}29^{\circ}$; e) $134{,}24^{\circ}$.

76. $\underline{a}\underline{b} = 36 - 24 + z = 0$, $z = -12$.

77. $\cos(\underline{v}, \underline{k}) = \frac{\underline{v}\ \underline{k}}{|\underline{v}||\underline{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$(\underline{v}, \underline{k})\sphericalangle = 45^{\circ}$.

78. A szögek koszinuszai a $\underline{v}^{\circ}$ koordinátái, mivel $\underline{v}^{\circ} = (-\frac{3}{\sqrt{73}}, \frac{8}{\sqrt{73}})$ $\cos\alpha_x = \frac{-3}{\sqrt{73}}$, $\alpha_x = 110{,}56^{\circ}$, $\cos\alpha_y = \frac{8}{\sqrt{73}}$, $\alpha_y = 20{,}56^{\circ}$.

79. A kérdéses szögek koszinuszai a vektor irányába mutató egységvektor koordinátái (iránykoszinuszok). $|\underline{v}| = 9$, ezért az irányszögek koszinuszai:

$$\cos\alpha_x = \frac{4}{9}, \qquad \alpha_x = 63{,}61^\circ,$$
$$\cos\alpha_y = -\frac{1}{9}, \qquad \alpha_y = 96{,}38^\circ,$$
$$\cos\alpha_z = \frac{8}{9}, \qquad \alpha_z = 27{,}27^\circ.$$

80. a) α, β, γ szögeknek – az irányszögeknek – a koszinuszai az egységvektor koordinátái. ($\cos 45^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 120^\circ$) = $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, mivel

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1,$$

tehát a vektor létezik.

b) nem létezik;

c) létezik.

81. Legyen a keresett szög α.

Feltehetjük, hogy a vektor egységvektor, hiszen a tengelyekkel bezárt szög független a vektor hosszától. Mivel az egységvektor koordinátái a tengelyekkel bezárt szögek koszinuszai, a koordináták ($\cos 60^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos\alpha$) = $= (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\alpha)$ és $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$.

82. Mivel az iránykoszinuszok (az egységvektor koordinátái) négyzetösszege 1, azaz $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, ezért $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 2$.

83. Vegyük észre, hogy mindhárom vektor hossza egyenlő ($|n^2 + n + 1|$), és bármely két vektor merőleges egymásra.

84. $|\underline{v}_1| = a^2 - ab + b^2$, $|\underline{v}_2| = a^2 + 2b^2$, $|\underline{v}_3| = a^2 + 2$, $|\underline{v}_4| = 2(a^2 - a + b^2) + 1$.

85. A négyszög paralelogramma, mivel az AC és a BD szakaszok felezési pontja egyaránt a $(4,2,-1)$ pont; rombusz, mivel két szomszédos oldala $AB = AD = \sqrt{26}$ (ugyanez az átlók merőlegességével is belátható).

86. $\underline{v}$ koordinátái $\underline{v}(x,y,0)$, mivel hossza 5, $x^2 + y^2 = 25$, és merőleges $\underline{n}$-ra $-4x + 3y = 0$. Az x-re és y-ra adódott egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $x = \pm 3$, $y = \pm 4$, tehát a két lehetséges megoldás $\underline{v}_1(3,4,0)$, $\underline{v}_2(-3,-4,0)$.

87. Legyen a keresett pont $C(0,0,z)$; a $\overrightarrow{CA}(1,0,-z)$ és $\overrightarrow{CB}(0,1,-z)$ vektorok szöge 30°-os, ezért

$$\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ebből $z = \pm 2{,}54$, tehát $C_1(0;0;2{,}54)$, $C_2(0;0;-2{,}54)$.

88. Legyenek a keresett $\underline{v}$ koordinátái $\underline{v}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. $\underline{v}$ és $\underline{e}$ szögének koszinusza:

$$\cos(\underline{v},\underline{e}) = \frac{\underline{e}\underline{v}}{|\underline{e}|\,|\underline{v}|} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \qquad \cos\varphi + \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hogy ezt a trigonometrikus feladatot megoldjuk, szorozzuk meg mindkét oldalt $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$-vel:

$$\cos\varphi\cos 45° + \sin\varphi\sin 45° = \cos(\varphi - 45°) = \frac{\sqrt{6}}{4} = 0{,}6124$$

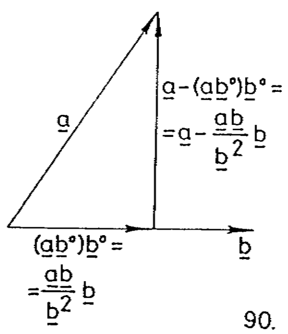
$$\varphi_1 = 97{,}24° \qquad \varphi_2 = -7{,}24°$$

és igy a keresett vektorok $\underline{v}_1(-0{,}126;\ 0{,}992;0)$

$\underline{v}_2(0{,}992;-0{,}126;0)$.

89. a) $49 + \sqrt{1625} = 89{,}31$ b) $72{,}3°$

90. Mivel $|\underline{b}| = 3$, $\underline{b}^0 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\underline{a}\underline{b}^0 = 9$, ezért a $\underline{b}$-ral párhuzamos összetevő $(\underline{a}\underline{b}^0)\underline{b}^0 = (6,-6,3)$, a $\underline{b}$-ra merőleges összetevő pedig $\underline{a} - (\underline{a}\underline{b}^0)\underline{b}^0 = (-3,0,6)$. (Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a két összetevő valóban merőleges egymásra.)



90.

Gyakorlatilag azonban egyszerübb, ha megjegyezzük, hogy a $\underline{b}$-ral párhuzamos összetevő

$$\frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2}\underline{b} \quad \text{és a rá merőleges} \quad \underline{a}-\frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2}\underline{b},$$

és ezzel számolva rövidebben adódnak a vektorok: $\underline{a}\underline{b} = 27$, $\underline{b}^2 = 9$, $\frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{b}^2} = 3$, $3\underline{b} = (6,-6,3)$ és $\underline{a} - 3\underline{b} = (-3,0,6)$.

91. A $\underline{v}$-ra párhuzamos összetevő: $\left(\frac{395}{441}, \frac{316}{441}, -\frac{1580}{441}\right)$, a rá merőleges összetevő: $\left(\frac{928}{441}, \frac{2330}{441}, \frac{698}{441}\right)$.

92. $\left|-\frac{21}{31}\right|$.

93. Az $|\underline{a}|\underline{b}$ és $|\underline{b}|\underline{a}$ vektorok egyenlő hosszúak ezért összegük a paralelogramma szabály miatt (rombusz!) felezi szögüket, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szögét is. Mivel $|\underline{a}| = 9$, $|\underline{b}| = 21$, $|\underline{a}|\underline{b} = (-45,36,180)$, $|\underline{b}|\underline{a} = (-21,84,168)$ és igy a szögfelező vektor: $|\underline{a}|\underline{b} + |\underline{b}|\underline{a} = (-66,120,348)$ vagy megfelel bármely ezzel párhuzamos vektor is, pl.: $(-11, 20,58)$.

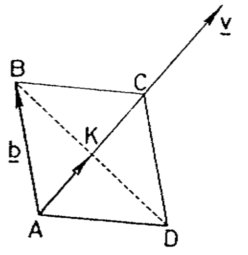
<u>Megjegyzés</u>: $\underline{a}^0 + \underline{b}^0$ is szögfelező vektor.

94. $z = 10$, $D(-1,12,7)$.

95. Mivel $\overrightarrow{AB} = (-1,2,2)$ és $\underline{v}$ erre merőleges, $\underline{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 = -8 + 2z$, $z = 4$ és igy $\underline{v} = (4,-2,4)$. $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\underline{v}| = 6$, ezért $\underline{v}^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 2\right)$, ennélfogva a $\underline{v}$-ral párhuzamos oldalvektorok $3\underline{v}^0$-ral egyenlők, koordinátáik $(2,-1,2)$ s a másik két négyzetcsúcs $C(6,5,1)$, $D(7,3,-1)$.

A négyzet oldalvektora azonban $-3\underline{v}^0(-2,1,-2)$ is lehet, ezért a $C_1(2,7,-3)$, $D_1(3,5,-5)$ csúcsok is kielégitik a feladat feltételeit.

96. A rombusz oldalhossza: $|\underline{a}| = 9$; mivel $|\underline{b}| = 3$, a másik oldalvektor $3\underline{b} = (6,-3,6)$, a negyedik csúcs helyvektora $\underline{a} + 3\underline{b} = (10,4,2)$. A rombusz csúcsai tehát $(0,0,0)$, $(4,7,-4)$, $(10,4,2)$, $(6,-3,6)$.



97.

97. Az A-ból a rombusz K középpontjába mutató vektor $\underline{b}$-nak $\underline{v}$-ral párhuzamos összetevője, azaz $\frac{\underline{b}\underline{v}}{\underline{v}^2}\underline{v}$. Mivel $\underline{b}\underline{v} = 36$, $\underline{v}^2 = 144$, $\frac{\underline{b}\underline{v}}{\underline{v}^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{\underline{b}\underline{v}}{\underline{v}^2}\underline{v} = (2,-1,2)$. Ennélfogva B koordinátái $(2,3,7)$, a K középponté $(4,-1,3)$, B-nek K-ra vonatkozó tükörképe $D(6,-5,-1)$ és mivel $\vec{AC} = 2\vec{AK} = (4,-2,4)$, C koordinátái $(6,-2,5)$.

98. Használjuk fel a szorzás disztributiv törvényét és azt a tényt, hogy kollineáris vektorok vektoriális szorzata $\underline{o}$.

99. $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21} = 0{,}98$.

100. Valamennyi párhuzamos egy az $\underline{n}$-ra merőleges síkkal.

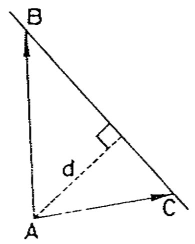
101. A megadott két egyenlőség különbségét képezve rendezés után kapjuk, hogy $(\underline{a} - \underline{d}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = \underline{o}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\underline{a} - \underline{d}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ kollineárisak.

102. A három pont akkor és csakis akkor kollineáris, ha $\underline{a} - \underline{c}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ kollineáris vektorok, azaz $(\underline{a} - \underline{c}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = \underline{o}$, ami kifejtve éppen a bizonyitandót adja.

103. $\underline{a} - \underline{c}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ a sik két vektora, a normálvektor ezek vektoriális szorzatával párhuzamos. $(\underline{a} - \underline{c}) \times (\underline{b} - \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} - \underline{c} \times \underline{b} - \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}$.

104. Az első egyenlőségből $\underline{a} \times \underline{b} - \underline{b} \times \underline{c} = \underline{o}$, $(\underline{a} + \underline{c}) \times \underline{b} = \underline{o}$ adódik, ezért $\underline{a} + \underline{c}$ kollineáris $\underline{b}$-vel, azaz $\underline{a} + \underline{c} = \lambda\underline{b}$. $\underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$ -ból $\lambda\underline{b} \times \underline{c} = \lambda\underline{c} \times \underline{a}$ és $(\underline{a} + \underline{c}) \times \underline{c} = \lambda\underline{c} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{c} = \lambda\underline{c} \times \underline{a}$ adódik, amiből $\lambda = -1$, tehát $\underline{a} + \underline{c} = -\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{o}$.

Megforditva: ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{o}$, ezt az egyenletet $\underline{b}$-ral majd $\underline{c}$-ral vektoriálisan szorozva kapjuk, hogy $\underline{a} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{b} = \underline{o}$ és $\underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c} = \underline{o}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$.



105.

105. Az A pont BC egyenesből mért távolsága az ABC háromszög A-hoz tartozó magasságának a hossza, ami ABC kétszeres területének és a BC oldalnak a hányadosa. Mivel $2t_{ABC} = |(\underline{b} - \underline{a})\times(\underline{c} - \underline{a})| = |\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|$ és $BC = |\underline{b} - \underline{c}|$,

$$d = \frac{|\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|}{|\underline{b} - \underline{c}|}.$$

106. a) A paralelogramma területe $|\underline{a} \times \underline{b}|$. Mivel $\underline{a} \times \underline{b} = (3,38,-13)$, $t = |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{3^2 + 38^2 + (-13)^2} = \sqrt{1622} = 40,27$.

b) $\sqrt{972} = 31,18$;

c) 19.

107. a) $\frac{1}{2}\sqrt{1880} = 21,68$.

b) Mivel $t = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ és $\vec{AB} = (3,3,6)$, $\vec{AC} = (-1,-4,4)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = (36,-18,-9)$, $t = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + (-18)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1701} = 20,62$.

c) 7,5.

d) 0.

108. $t = \frac{1}{2}|\underline{a} \times \underline{b}|$. Mivel $\underline{a} \times \underline{b} = (0,0,a_1b_2 - a_2b_1)$, $t = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$.

109. A magasság a kétszeres terület és a BC oldal hányadosa: 5.

110. $\underline{x}$ párhuzamos az $\underline{a} \times \underline{b}(-7,-5,-1)$ vektorral, tehát

$(7\lambda, 5\lambda, \lambda)$ alakú, ezért $\underline{c}\underline{x} = 7\lambda + 10\lambda - 7\lambda = 10$, $\lambda = 1$, ennélfogva $\underline{e} = (7,5,1)$.

111. Mivel $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges $\underline{a}$-ra is és $\underline{b}$-ra is és $\underline{a} \times \underline{b} = (-7,-5,8)$ $\underline{c} = 2\underline{a} \times \underline{b} = (-14,-10,16)$.

112. $\pm \dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a}|}$.

113. Ha a két csúcs helyvektorai $\underline{a}(1,4,8)$, $\underline{b}(8,-4,1)$ akkor a harmadik csúcs helyvektora $\underline{a} \times \underline{b}$-ral kollineáris. $\underline{a} \times \underline{b} = (36,63,-36)$. $(\underline{a} \times \underline{b})^0 = (\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{4}{9})$. A kocka élhossza: $|\underline{a}| = 9$, ezért a harmadik élvektor $\pm 9(\underline{a} \times \underline{b})^0$, azaz $(4,7,-4)$ vagy $(-4,-7,4)$.

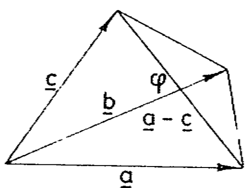
114. A magasság irányát az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,10,3)$ vektor adja. Mivel ennek hossza $\sqrt{110}$, ezt a vektort $\dfrac{5}{\sqrt{110}}$ -zel kell megszoroznunk, hogy az $\overrightarrow{AA'}$-t kapjuk: $\overrightarrow{AA'} = (\dfrac{5}{\sqrt{110}}, \dfrac{50}{\sqrt{110}}, \dfrac{15}{\sqrt{110}})$ ugyanez az A' három koordinátája is. Mivel $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}$, a B, illetve C koordinátái: $B(\dfrac{5}{\sqrt{110}} + 4, \dfrac{50}{\sqrt{110}} - 1, \dfrac{15}{\sqrt{110}} + 2)$, $C(\dfrac{5}{\sqrt{110}} + 3, \dfrac{50}{\sqrt{110}}, \dfrac{15}{\sqrt{110}} - 1)$. A feladat egy másik megoldását kapjuk, ha a fenti $\overrightarrow{AA'}$ helyett ellentettjét szerepeltetjük.

115. A harmadik él irányát az $\underline{a} \times \underline{b}(-2,2,-1)$ vektor adja (a másik megoldását a $\underline{b} \times \underline{a}$), mivel ennek hossza 3, a harmadik élvektor $3\underline{a} \times \underline{b} = (-6,6,-3)$, ebből a csúcsok az alapon: $(0,0,0)$, $(-1,0,2)$, $(1,1,0)$, $(0,1,2)$; a fedőlapon: $(-6,6,-3)$, $(-7,6,1)$, $(-5,7,-3)$, $(-6,7,-1)$.

116. A harmadik élvektor irányát az $\underline{a} \times \underline{b}(-20,-24,8)$ vektor adja, a testátlóvektor a három élvektor összege, tehát $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma(\underline{a} \times \underline{b})$, ezt koordinátákra kiírva háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldása $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{4}$, tehát a harmadik élvektor $-\frac{1}{4}(\underline{a} \times \underline{b}) = (5,6,-2)$.

117. A sikok hajlásszöge normálvektoraik hajlásszögével egyenlő; a normálvektorokat két-két sikbeli vektor vektoriális szorzataként állitjuk elő. Az ABC sik normálvektora $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12,-24,8)$, az ACD siké $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (42,-70,-28)$. Mivel ezeknek csak az állása lényeges, a számolás egyszerüsitése céljából a velük párhuzamos $\underline{n}_1(-3,-6,2)$, $\underline{n}_2(3,-5,-2)$ vektorokkal is dolgozhatunk. Ezek szögére:

$$\cos\varphi = \frac{\underline{n}_1\,\underline{n}_2}{|\underline{n}_1|\,|\underline{n}_2|} = \frac{17}{7\sqrt{38}}, \qquad \varphi = 66{,}80^\circ.$$



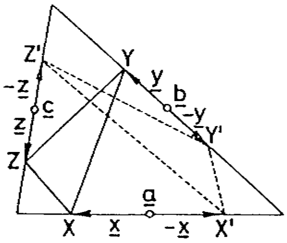
118.

118. Az ábra jelöléseit használva a négyszög területe az $\underline{a}$ és $\underline{b}$, illetve $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által kifeszitett háromszögek területeinek az összege, azaz $2t = |\underline{a} \times \underline{b}| + |\underline{b} \times \underline{c}|$, mivel azonban $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{b} \times \underline{c}$ egyirányú vektorok, $2t = |\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c}| = |\underline{a} \times \underline{b} - \underline{c} \times \underline{b}| = |(\underline{a} - \underline{c}) \times \underline{b}|$, vagyis a két átlóvektor vektoriális szorzatának abszolút értéke. Ha $|\underline{b}| = e$, $|\underline{a} - \underline{c}| = f$, akkor valóban megkapjuk a mondott területszámitási képletet.

119. A feladat megoldása azonos a 69. feladatével, csak merőlegesség helyett mindenütt párhuzamosságot, skaláris szorzás helyett pedig vektoriális szorzást kell mondanunk.

120. Legyenek az A csúcsból a többi csúcsba vezető vektorok $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. $t_{ABC} = \frac{1}{2}|\underline{b} \times \underline{c}|$, $t^2_{ABC} = \frac{1}{4}(\underline{b} \times \underline{c})^2$, hasonlóan $t^2_{ACD} = \frac{1}{4}(\underline{c} \times \underline{d})^2$, $t^2_{ADB} = \frac{1}{4}(\underline{d} \times \underline{b})^2$. Viszont $t_{BCD} = \frac{1}{2}|(\underline{b} - \underline{d}) \times (\underline{c} - \underline{d})| = \frac{1}{2}|\underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{d} + \underline{d} \times \underline{b}|$. Az abszolút értéken belüli három vektor páronként merőleges egymásra, mert merőleges sikok normálvektorai, ezért bármely kettejük skaláris szorzata 0, igy

$$t^2_{BCD} = \frac{1}{4}\left[(b \times c)^2 + (c \times d)^2 + (d \times b)^2\right] = t^2_{ABC} + t^2_{ACD} + t^2_{ADB}.$$



121.

121. Az oldalfelező pontok helyvektorai legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ ezekből az X,Y,Z csúcsokba rendre az $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$, az X',Y',Z' csúcsokba pedig a $-\underline{x},-\underline{y},-\underline{z}$ vektorok vezetnek, a háromszögcsúcsok helyvektorai igy $\underline{a}+\underline{x}$, $\underline{b}+\underline{y}$, $\underline{c}+\underline{z}$, illetve $\underline{a}-\underline{x}$, $\underline{b}-\underline{y}$, $\underline{c}-\underline{z}$. XYZ területe:

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}|$, $X'Y'Z'$ területe: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{X'Y'} \times \overrightarrow{X'Z'}|$ $\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ} =$

$= (\underline{b}-\underline{a}+\underline{y}-\underline{x}) \times (\underline{c}-\underline{a}+\underline{z}-\underline{x}) = (\underline{b}-\underline{a}) \times (\underline{c}-\underline{a}) +$

$+ (\underline{y}-\underline{x}) \times (\underline{z}-\underline{x}) + (\underline{b}-\underline{a}) \times \underline{z} + \underline{y} \times (\underline{c}-\underline{a}) + \underline{x} \times (\underline{b}-\underline{c})$,

$\overrightarrow{X'Y'} \times \overrightarrow{X'Z'} = (\underline{b}-\underline{a}+\underline{x}-\underline{y}) \times (\underline{c}-\underline{a}+\underline{x}-\underline{z}) = (\underline{b}-\underline{a}) \times$

$\times (\underline{c}-\underline{a}) + (\underline{y}-\underline{x}) \times (\underline{z}-\underline{x}) - (\underline{b}-\underline{a}) \times \underline{z} - \underline{y} \times (\underline{c}-\underline{a}) -$

$- \underline{x} \times (\underline{b}-\underline{c})$. Az utolsó három tag mindkét összegben $\underline{o}$, mert párhuzamos vektorok szorzata, ezért a két terület valóban egyenlő.

122. Mivel $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge 60°-os, $\underline{abc} = |a \times b||c| \cos 60^\circ = |a||b||c| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

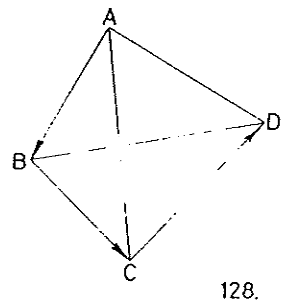
123. Mivel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegesek és $\underline{a} \times \underline{b}$ párhuzamos $\underline{c}$-ral, $abc = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = [|\underline{a}||\underline{b}| \sin 90^\circ]|\underline{c}| \cdot \cos 0^\circ = |\underline{a}||\underline{b}||\underline{c}|$.

124. Mivel $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanárisak, $\underline{abc} \neq 0$. Vizsgáljuk meg az adott három vektor vegyesszorzatát: $(2\underline{a}+3\underline{b})(5\underline{b}-4\underline{c})(\underline{c}-\underline{a}) = [(2\underline{a}+3\underline{b}) \times (5\underline{b}-4\underline{c})](\underline{c}-\underline{a}) = [10\underline{a} \times \underline{b} - 8\underline{a} \times \underline{c} - 12\underline{b} \times \underline{c}](\underline{c}-\underline{a}) = 10\,\underline{abc} + 12\,\underline{bca} = 22\,\underline{abc} \neq 0$.

125. A térfogat a három vektor vegyesszorzatával egyenlő: $V = 3$.

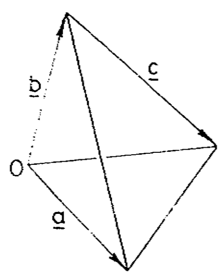
126. Az A pontot a többivel összekötő élek vegyesszorzatának a hatodrésze: a) 3; b) 6.

127. Legyen $D(0,y,0)$. A tetraédert kifeszítő három élvektor $\vec{AB}(1,-1,2)$, $\vec{AC}(0,-2,4)$, $\vec{AD}(-2,y-1,1)$. Ezek vegyesszorzata 30 vagy −30, ebből a D csúcs koordinátái $D_1(0,8,0)$ vagy $D_2(0,-7,0)$.



128.

128. A tetraédert az $\vec{AB}$, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ vektorok feszitik ki. Ezek vegyesszorzatának hatodrésze a térfogat $V = 8$.



129.

129. a) Az ábra jelöléseit használva: a tetraéder térfogatának hatszorosa az O csúcsból induló élek vegyesszorzata, azaz $6V = \underline{a}\underline{b}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\underline{b}\underline{b} + \underline{a}\underline{b}\underline{c} = \underline{a}\underline{b}\underline{c}$. Alkalmazzuk most a feladatban megjelölt térfogatszámitási módot, mivel az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ élvektorú kitérőélek távolsága $\frac{(\underline{a} \times \underline{c})\underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{c}|} = \frac{\underline{a}\underline{b}\underline{c}}{|\underline{a}||\underline{c}| \sin(\underline{a},\underline{c})}$,

$$6V = \frac{\underline{a}\underline{b}\underline{c}}{|\underline{a}||\underline{c}| \sin(\underline{a},\underline{c})} |\underline{a}||\underline{c}| \sin(\underline{a},\underline{c}) = \underline{a}\underline{b}\underline{c},$$ amit bizonyitanunk kellett.

b) A szakaszok mozgatása közben a térfogatszámitásnál használt adatok nem változnak meg.

130. a) igen; b) nem; c) igen.

131. El kell dönteni, hogy az egyik pontot a másik hárommal összekötő vektorok komplanárisak-e, azaz vegyesszorzatuk 0-e vagy sem.

a) igen; b) nem.

132. A három vektor vegyesszorzata, azaz a koordinátáikból készitett determináns értéke 0, ebből $z = \frac{17}{3}$.

133. A magasság a hatszoros térfogatnak és az ABC háromszög területének a hányadosa; $m = 11$.

134. Ha az eredeti paralelepipedont az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok feszitik ki, a lapátlóvektorok $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$. Ezek vegyesszorzata a 135.b) feladat szerint $2\underline{abc}$, tehát kétszerese az eredetinek.

135. Pl. b)-t a következő módon igazolhatjuk:

$(\underline{a} + \underline{b})(\underline{b} + \underline{c})(\underline{c} + \underline{a}) = [(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{b} + \underline{c})](\underline{c} + \underline{a}) =$

$= [\underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}](\underline{c} + \underline{a}) = \underline{abc} + \underline{bca} = 2\underline{abc}.$

136. A bal oldalt részletesen kiirva: $(\underline{a} \times \underline{b})^2 = |\underline{a} \times \underline{b}|^2 = a^2b^2 \sin^2\varphi$, $(ab)^2 = a^2b^2 \cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ miatt az állitás közvetlenül adódik.

Megjegyezzük, hogy azonosságunkat a 143. feladat a) azonosságból közvetlenül megkaphatjuk $\underline{c} = \underline{a}$, $\underline{d} = \underline{b}$ helyettesitéssel is.

137. Szorozzuk meg az $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{d}$ egyenlet mindkét oldalát rendre a $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{c} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorokkal, kapjuk, hogy $\alpha\underline{abc} = \underline{dbc}$, $\beta\underline{bca} = \underline{dca}$, $\gamma\underline{cab} = \underline{dab}$, ebből felcserélési tételt figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{\underline{dbc}}{\underline{abc}}, \qquad \beta = \frac{\underline{adc}}{\underline{abc}}, \qquad \gamma = \frac{\underline{abd}}{\underline{abc}}.$$

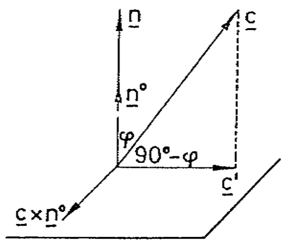
138. Ha a kocka csúcsainak koordinátái egészek, az élvektorok koordinátái is egészek és igy a kocka térfogata - azaz három élvektorának a vegyesszorzata - is egész, hiszen egy egészelemü determináns értéke. A távolságképlet miatt az élhossz négyzete is egész. Ebből már következik - mi[illegible]fogat az élhossz köbe - hogy az élhossz két egész szám na-

nyadosa, azaz racionális szám, amelynek a négyzete egész. De a racionális számok között csak az egészeknek egész a négyzete, ezért az élhossz egész szám.

139. A kifejtési tételt alkalmazva: $(-18, 19, -6)$.

140. A kifejtési tételt alkalmazva kapjuk, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{a}^2\underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{a}$, de $\underline{a}\underline{b} = 0$, ezért $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{a}^2\underline{b}$.

141. A kifejtési tétel háromszori alkalmazásával az azonosság közvetlenül adódik.



142.

142. a) A $\underline{c} \times \underline{n}^0$ benne van a síkban és hossza $|\underline{c}| \sin\varphi = |\underline{c}| \cos(90^0 - \varphi)$ éppen a $\underline{c}$ síkon levő vetületének a hosszával egyenlő. Ha viszont $\underline{n}^0$-t $\underline{c} \times \underline{n}^0$-ral vektoriálisan megszorozzuk, $\underline{c} \times \underline{n}^0$ 90^0-kal elfordul, így éppen $\underline{c}'$-t, a vetületi vektort kapjuk, tehát $\underline{c}' = \underline{n}^0 \times (\underline{c} \times \underline{n}^0)$. Az egyszerűbb számolás céljára alkalmazzuk erre a kifejtési tételt:

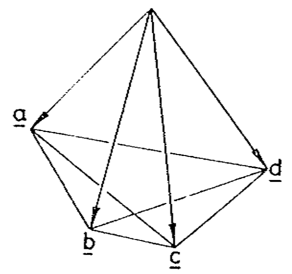
$\underline{c}' = \underline{n}^0 \times (\underline{c} \times \underline{n}^0) = \underline{c} - (\underline{c}\underline{n}^0)\underline{n}^0 = \underline{c} - \frac{\underline{c}\underline{n}}{\underline{n}^2}\underline{n}$, amiből látszik, hogy $\underline{c}'$ a $\underline{c}$ $\underline{n}$-ral párhuzamos összetevője.

Mivel $\underline{c}\underline{n} = -9$, $\underline{n}^2 = 9$, $\underline{c}' = \underline{c} + \underline{n} = (5, 2, -4)$.

143. a) Alkalmazzuk a felcserélési tételt az $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra, majd a kifejtési tételt, kapjuk, hogy $(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = [(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}]\underline{d} = [(\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\underline{c})\underline{a}]\underline{d} = (\underline{a}\underline{c})(\underline{b}\underline{d}) - (\underline{b}\underline{c})(\underline{a}\underline{d})$.

b) Legyenek a gúla egy csúcsból kiinduló élvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$; az oldallapok normálvektorai $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{c} \times \underline{d}$, $\underline{d} \times \underline{a}$, az átlósíkoké $\underline{a} \times \underline{c}$ és $\underline{b} \times \underline{d}$. A síkok merőlegessége normálvektoraik merőlegességével egyenértékű. Azt kell tehát

143.



bizonyitani, hogy $(\underline{a} \times \underline{c})(\underline{b} \times \underline{d}) = 0$. A feltétel szerint: $(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = 0$ és $(\underline{b} \times \underline{c})(\underline{a} \times \underline{d}) = 0$. Végezzük el itt az a) alatti átalakitásokat:

$$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{ac})(\underline{bd}) - (bc)(ad) = 0$$

$$(\underline{b} \times \underline{c})(\underline{a} \times \underline{d}) = (\underline{ba})(\underline{cd}) - (\underline{ca})(\underline{bd}) = 0.$$

E két egyenlőség összege éppen a bizonyitandót adja.

144. a) A sikok metszésvonala merőleges mindkét sik normálvektorára, tehát $\underline{a} \times \underline{b}$-ra és $\underline{c} \times \underline{d}$-ra is, ezért párhuzamos a normálvektorok vektoriális szorzatával.

b) Alkalmazzuk a kifejtési tételt úgy, hogy először az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} \times \underline{d}$ vektorokra, majd az $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra.

c) A b)-nél kapott eredmény átrendezésével adódik az állitás bizonyitása.

145. Tegyük fel, hogy a paralelogrammát az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok feszitik ki, ezek vetületei legyenek $\underline{a}'$ és $\underline{b}'$; $t = |\underline{a} \times \underline{b}|$ és $t' = |\underline{a}' \times \underline{b}'|$ a vetületet tartalmazó sik normálvektora legyen az $\underline{n}$ egységvektor. A 142.a) feladat eredménye szerint $\underline{a}' = \underline{a} - (\underline{an})\underline{n}$, $\underline{b}' = \underline{b} - (\underline{bn})\underline{n}$, ebből $\underline{a}' \times \underline{b}' = \underline{a} \times \underline{b} - \underline{n} \times [(\underline{an})\underline{b} - (\underline{bn})\underline{a}]$. Szorozzuk meg skalárisan $\underline{n}$-ral ennek az utóbbi egyenletnek mind a két oldalát $\underline{n}$-ral, (a jobb oldal második tagja 0 lesz, mert merőleges $\underline{n}$-ra):

$(\underline{a}' \times \underline{b}')\underline{n} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{n}$, s vegyük figyelembe, hogy $\underline{a}' \times \underline{b}'$ párhuzamos $\underline{n}$-ral, ebből $|\underline{a}' \times \underline{b}'| = |\underline{a} \times \underline{b}| \cos\alpha$, azaz $t' = t \cos\alpha$.

146. $-4x + 2y = -24$.

147. Az egyenesek hajlásszöge normálvektoraik hajlásszögével egyenlő.

a) 45°; b) 90°; c) 0 (párhuzamosok); d) $\cos\varphi = \dfrac{11}{\sqrt{13}\,\sqrt{29}}$, $\varphi = 55{,}49^\circ$

148. a) igen; b) nem; c) igen.

149. a) Az egyenes normálegyenletébe helyettesitve P koordinátáit, megkapjuk P-nek az egyenestől mért előjeles távolságát. A normálegyenletben szereplő normálvektor egységvektor. Az egyenes normálegyenlete:

$$\frac{3x - 4y - 5}{5} = 0, \text{ ezért a távolság: } \left|\frac{3(-4) - 4 \cdot 7 - 5}{5}\right| =$$

$= 9.$

b) $\frac{137}{13}$; c) $\frac{12}{\sqrt{58}}$.

150. a) 2,5; b) 3,5.

151. Az egyenes normálegyenlete $\frac{15x}{17} - \frac{8y}{17} - 2 = 0$, ezért az origótól mért távolsága 2.

152. Az egyenesek normálegyenleteiből kiolvasható, hogy az origónak ugyanazon az oldalán helyezkednek el és az origótól mért távolságaik 1 és 2, tehát a két egyenes távolsága 1.

153. Az egyenes normálegyenlete $\frac{15x}{17} - \frac{8y}{17} - 2 = 0$, tehát az origótól két egységnyi távolságra vannak. A keresett egyenesek origótól mért távolsága ezért 8, illetve -4 egység, ezért egyenleteik: $\frac{15x}{17} - \frac{8y}{17} - 8 = 0$, $\frac{15x}{17} - \frac{8y}{17} + 4 = 0$.

154. a) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$;
b) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$;
c) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$.

155. a) $x = -1 - 4t$, $y = 3 + 2t$, $z = 7 + 6t$;
b) $x = t$, $y = -1 + 7t$, $z = 2 - 9t$;
c) $\frac{x - 9}{6} = \frac{z + 3}{2}$, $y = 8$;
d) $x = -11 + 3t$, $y = 9 + 2t$, $z = 1 - t$ (a $\underline{v}_1(3,2,-1)$ is megfelel irányvektornak).

156. Az egyenes irányvektorának x koordinátája 0.

157. Mindkettőn rajta van.

158. a) $x = 3$, $y = -1 + t$, $z = 5$;

b) $x = t$, $y = t$, $z = t$, vagy: $x = y = z$;

c) $x = t$, $y = 0$, $z = 0$.

159. Az egyenes irányvektora $\underline{v}(a,b,0)$ alakú. Az egyenletrendszer: $x = -3 + at$, $y = 7 + bt$, $z = 5$.

160. a) Az egyenes irányvektora a két pont összekötővektora, tehát helyvektoraik különbsége: $\underline{v}(9,-6,-3)$, vagy minden vele kollineáris vektor, tehát pl. $\underline{v}_1(3,-2,-1)$. Az egyenletrendszer $x = -2 + 3t$, $y = 5 - 2t$, $z = 6 - t$.

b) $x = 5 - 10t$, $y = 1$, $z = 2 + t$;

c) $x = 9t$, $y = 11t$, $z = -t$;

d) $x = 3 + t$, $y = -1 - t$, $z = t$.

161. Az a) és b) alatti egyenesek azonosak, mivel irányvektorai kollineárisak, mindkettő tartalmazza az $(5,-7,2)$ pontot, mert az a) esetben a $t = 0$ paraméterértékhez tartozik, a b) esetben pedig az egyenletrendszerbe helyettesitve koordinátáit $-2 = -2 = -2$ adódik. Ugyanúgy: a d) alatti egyenes azonos az a) és b) alattival, a c) viszont különbözik tőlük.

162. $x = 4 + 5t$, $y = -7 - 11t$, $z = -2$.

163. A két pontot összekötő egyenes egyenletrendszere: $x = -6 + 3t$, $y = 6 - 2t$, $z = -5 + t$. Az xy sikkal való metszéspontra $z = 0$, tehát $t = 5$, ezért a metszéspont koordinátái: $M_{xy}(9,-4,0)$. Hasonlóan: $M_{yz}(0,2,-3)$, $M_{zx}(3,0,-2)$.

164. Az adott egyenes $(7,-4,0)$ pontját C-re tükrözve a $(-15,16,2)$ pontot kapjuk, ezen átmegy a tükrözött egyenes és párhuzamos az eredeti egyenessel, ezért egyenletrendszere: $x = -15 - 8t$, $y = 16 + 6t$, $z = 2 + 9t$.

165. Az egyenesek irányvektorai komplanárisak.

166. Metszi; $t = -2$ esetében az egyenes $(0,0,-2)$ pontjához jutunk, ami rajta van a z tengelyen.

167. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{7}$.

168. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+8}{8} = \frac{z-2}{-2}$ és $\frac{x-1}{6} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-2}{-4}$.

169. A szögfelező irányvektora pl. a szomszédos oldalak egységvektorainak az összege. $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $z = -7 - 8t$.

170. a) Párhuzamosak, mert irányvektoraik kollineárisak és az (5,0,7) pont csak az egyik egyenesen van rajta.

b) Párhuzamosak nem lehetnek, mert irányvektoraik sem azok. Tegyük fel, hogy metszők és a metszésponthoz az egyik egyenesen a t_1, a másikon a t_2 paraméterérték tartozik, ekkor teljesülnie kell a következő egyenletrendszernek:

$$2t_1 = -2 + 2t_2,$$
$$13 + 5t_1 = 2 - t_2,$$
$$-13 - 7t_1 = 4 + 3t_2.$$

Az első két egyenletből $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, ezek kielégitik a harmadik egyenletet is, tehát a velük előállitott D(−4,3,1) pont mindkét egyenesen rajta van, az egyenesek metszők.

c) A b)-hez hasonló módszerrel nyerhetjük, hogy az egyenesek kitérők. Más módszer: az egyenesek $\underline{v}_1(1,2,1)$, $\underline{v}_2(2,-1,-2)$ és egy-egy pontjukat összekötő $\underline{r}(5,1,2)$ vektorok vegyesszorzata nem 0, tehát a két egyenes nem lehet egy síkban, kitérők.

d) Metszők, a metszéspont: (2,5,−1).

171. Az egyenesek irányvektorainak és az egy-egy pontjukat összekötő vektornak a vegyesszorzata 0, ebből a = 3.

172. Az egyenesek irányvektorai: $\underline{v}_1(1,-1,2)$ és $\underline{v}_2(2,-3,-1)$ nem párhuzamosak, tehát egyeneseik sem azok. Az egyenletrendszerből kiolvasható (1,4,3) és (−1,7,4) pontjaik összekötővektora $\underline{r}(-2,3,1)$. E három vektor vegyesszorzata 0, tehát egysikúak, ennélfogva egyeneseik is, és mivel nem párhuzamosak: metszők.

173. Metszők.

174. <u>I. megoldás</u>: Legyen az egyenes keresett pontja

$P(4+8t, -8t, 6-14t)$, a távolságképlet szerint $PD^2 = (-4+8t)^2 + (-8t+4)^2 + (7-14t)^2 = 27^2 = 729$, ebből $t^2 - t - 2 = 0$ és $t_1 = 2$, $t_2 = -1$, tehát a keresett pontok: $P_1(20,-16,-22)$, $P_2(-4,8,20)$.

II. megoldás: az egyenes egység-irányvektora: $\underline{v}^0(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{7}{9})$. Az A helyvektorához $27\underline{v}^0$-t, illetve $-27\underline{v}^0$-t hozzáadva a keresett pontok helyvektorait kapjuk.

175. Az egyenesek hajlásszöge irányvektoraik hajlásszögével egyenlő:

a) 60°; b) 45°; c) 90°; d) $\cos\varphi = \frac{16}{\sqrt{485}}$, $\varphi = 43{,}40^\circ$; e) $\cos\varphi = \frac{14}{\sqrt{550}}$, $\varphi = 53{,}35^\circ$.

176. I. megoldás: Az egyenes irányvektora $\underline{v}(1,4,1)$, az M-ből ráállított merőleges talppontja legyen D, D koordinátái $(2+t, 4+4t, 4+t)$. Az $\overrightarrow{MD}$ koordinátái: $(-2+t, 8+4t, -12+t)$. $\underline{v}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$ a merőlegesség miatt ezért $1(-2+t) + 4(8+4t) + 1(-12+t) = 0$, ebből $t = -1$, és így D koordinátái: $D(1,0,3)$. A merőleges MD egyenes: $x = 1-3t$, $y = 4t$, $z = 3-13t$.

II. megoldás: Az adott egyenes egy pontja $P(2,4,4)$; a merőleges egyenes $\underline{w}$ irányvektora a $\overrightarrow{PM}$ $\underline{v}$-ra merőleges összetevője, ha a másik összetevő $\underline{v}$-ral párhuzamos, azaz

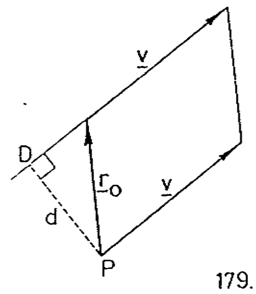
$$\underline{w} = \overrightarrow{PM} - \frac{\underline{v}\,\overrightarrow{PM}}{\underline{v}^2}\,\underline{v}.$$

Mivel $\overrightarrow{PM}(2,-8,12)$, $\underline{w} = (3,-4,13)$, az egyenletrendszer már felirható.

III. megoldás: Az M-et tartalmazó és az adott egyenesre merőleges sik egyenlete $x + 4y + z = 4$, ezt az adott egyenes a $D(1,0,3)$ pontban metszi, a keresett egyenes M és D összekötő egyenese.

177. $x = 2+4t$, $y = 1+t$, $z = -3-7t$. (A megoldás módszere azonos a 176. feladatéval.)

178. $x = 3 + 3t$, $y = 1 + 15t$, $z = -3 + 19t$.
(Lásd az előző feladatot!)



179.

179. I. megoldás: A P egyenestől mért d távolsága annak a paralelogrammának a magassága, amelynek alapja az egyenes $\underline{v}$ irányvektorával esik egybe, másik oldalvektora pedig P-t az egyenes egy P_o pontjával összekötő vektor. Mivel a paralelogramma területe $|\underline{r}_o \times \underline{v}| = |\underline{v}|d$, $d = \dfrac{|\underline{r}_o \times \underline{v}|}{|\underline{v}|}$. Mivel $\underline{r}_o = \overrightarrow{PP_o} = (0,-5,6)$, $\underline{v} = (6,9,2)$, $|\underline{v}| = 11$, $|\underline{r}_o \times \underline{v}| = \sqrt{64^2+36^2+30^2} = \sqrt{6292}$, $d = \dfrac{\sqrt{6292}}{11} = \sqrt{52} = 7{,}21$.

II. megoldás: Ha $\underline{r}_o$-t $\underline{v}$-ral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre bontjuk, d éppen a merőleges összetevő hossza, azaz

$$d = \left| \underline{r}_o - \frac{\underline{r}_o\underline{v}}{\underline{v}^2}\,\underline{v} \right|.$$

III. megoldás: P-n át $\underline{v}$-ra merőleges sík egyenlete $6x + 9y + 2z = 36$, az egyenesnek ezzel a síkkal alkotott D döféspontja P-ből az egyenesre állított merőleges talppontja. D koordinátái $(\frac{40}{11}, \frac{16}{11}, \frac{6}{11})$, és igy PD a távolságképlettel $d = 7{,}21$.

IV. megoldás: A D pontot abból a feltételből is meg lehet határozni, hogy a $\overrightarrow{PD}$-nak a $\underline{v}$-ra merőlegesnek kell lennie. (Lásd a 176. feladatot.)

180. a) A két párhuzamos távolsága az egyik egy pontjának a másik egyenestől mért távolságával egyenlő. (Lásd a 179. feladatot.) Ennek alapján a távolság 3.

b) $\sqrt{\frac{14}{19}} = 0{,}86$.

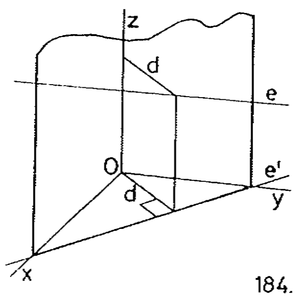
181. Kiszámitjuk P-ből az egyenesre állitott merőleges talppontjának koordinátáit, majd erre tükrözzük P-t, a tü-

körkép: $P'\left(\frac{19}{11}, -\frac{12}{11}, -\frac{23}{11}\right)$.

182. a) $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4}$, $z = 0$, vagy: $4x - 5y = 23$, $z = 0$;

b) $x = 2 - 3t$, $y = 4 + 9t$, $z = 0$, vagy: $3x + y = 10$, $z = 0$.

183. Válasszuk paraméternek pl. az y koordinátát, ekkor az $x - 2y = 15$ egyenletből $y = \frac{x-15}{2}$, a $3y - z = 10$ egyenletből pedig $y = \frac{z+10}{3}$, igy az egyenletrendszer: $x = 15 + 2t$, $y = t$, $z = -10 + 3t$.



184.

184. Egy e egyenes z tengelytől mért távolsága egyenlő xy sikon levő e' vetületének az origótól mért távolságával. Az adott egyenes vetületének az egyenlete az xy koordinátarendszerben

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-3}, \text{ azaz}$$

$3x + 4y + 10 = 0$, ennek normálalakja:

$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 = 0$, tehát az origótól mért távolsága 2.

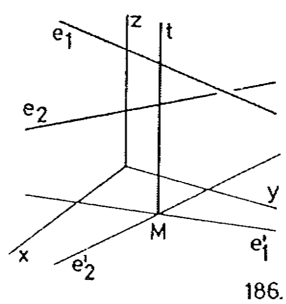
185. a) Az egyenesek távolsága egyenlő az egy-egy pontjukat összekötő vektornak a normáltranszverzális irányán levő vetületével. A normáltranszverzális irányát az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata szolgáltatja. Az irányvektorok: $\underline{v}_1(-1,3,4)$, $\underline{v}_2(1,5,1)$, $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2(-17,5,-8)$. Az egyenesek egy-egy pontja: $(8,2,0)$, $(-3,0,1)$, összekötővektoruk: $\underline{r}(11,2,-1)$, a távolság:

$$\left|\frac{\underline{r}(\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|}\right| = \left|\frac{-169}{\sqrt{378}}\right| = 8,69.$$

b) $\frac{3\sqrt{13}}{13} = 2,5$;

c) $\frac{\sqrt{22}}{154} = 0{,}030$;

d) 0, (metszők).



186.

186. Legyen az e_1 és e_2 egyenesek xy sikon levő vetülete e'_1 és e'_2, ezek metszéspontjában z-vel húzott párhuzamos a keresett t transzverzális (186. ábra). Az adott egyenesek vetületeinek egyenletei az xy koordinátarendszerben: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+6}{8}$, azaz $2x - y = 12$ és $x + 1 = \frac{y-18}{-2}$, azaz $2x + y = 16$, ezek metszéspontja: M(7,2), ezért a transzverzális egyenletrendszere $x = 7$, $y = 2$, $z = t$.

187. <u>I. megoldás:</u> Az e_1 paraméterét t_1-gyel e_2-ét t_2-vel jelölve az egyenes tetszés szerinti két pontjának összekötő vektora $(5 - 6t_1 - 2t_2, -3t_1 - 3 - t_2, -8 + 4t_1 + t_2)$ alakú. Olyan t_1 és t_2 értékeket keresünk, amelyre ez a vektor párhuzamos $\underline{c}$-ral, azaz

$$\begin{aligned} 5 - 6t_1 - 2t_2 &= -11\lambda, \\ -3 - 3t_1 - t_2 &= -11\lambda, \\ -8 + 4t_1 + t_2 &= 2\lambda. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $t_1 = 2$, $t_2 = 2$, $\lambda = 1$. (Tulajdonképpen csak t_1-re vagy t_2-re van szükségünk.) Igy a transzverzális pontja e_1-en $(-7, -6, 9)$, ezért egyenletrendszere $x = -7 - 11t$, $y = -6 - 11t$, $z = 9 + 2t$.

<u>II. megoldás:</u> Megkeressük az e_1-en átmenő $\underline{c}$-ral párhuzamos siknak és e_2-nek a döféspontját, ezen megy át a transzverzális.

188. Az egyenesek irányvektorai: $\underline{v}_1(3,-2,3)$, $\underline{v}_2(1,2,-1)$, a normáltranszverzális mindkettőre merőleges, ezért a

$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2(-4,6,8)$ vektorral párhuzamos, helyette azonban a számolás egyszerüsitése céljából a $\underline{v}(-2,3,4)$ vektorral is számolhatunk. A normáltranszverzálissal való metszéspontok paramétereit az egyes egyeneseknél t_1-gyel, illetve t_2-vel jelölve kapjuk, hogy a két metszéspont összekötő vektora $\underline{v}$-ral párhuzamos, azaz van olyan λ, hogy

$$\begin{aligned} -8 + 3t_1 - t_2 &= -2\lambda, \\ 12 - 2t_1 - 2t_2 &= 3\lambda, \\ 16 + 3t_1 + t_2 &= 4\lambda; \end{aligned}$$

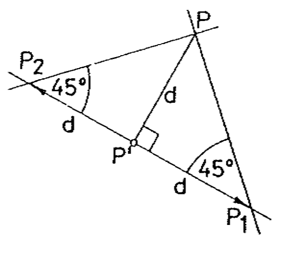
az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $t_1 = t_2 = 0$, a metszéspontok tehát $M_1(-7,4,4)$, $M_2(1,-8,-12)$, a normáltranszverzális egyenletrendszere:

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{4},$$

hossza, azaz a két kitérő egyenes távolsága: $M_1M_2 = \sqrt{464}$. Megjegyezzük, hogy két kitérő egyenes távolsága a normáltranszverzális előállitása nélkül is megoldható. (Lásd a 185. feladatot!)

189. $x - 2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{3}$.

190. A megoldás alapgondolata az ábráról leolvasható. A P pontból az egyenesre állitott merőleges P' talppontjának a koordinátáit a 176. feladat alapján határozhatjuk meg, $P'(2,0,1)$. A PP' a távolságképlettel 6-nak adódik. Az egyenes irány-egységvektora: $\underline{v}^0(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, ennélfogva



190.

$\overrightarrow{P'P_1} = 6\underline{v}^0 = (2,-4,4)$, és igy P_1 koordinátái: $P_1(4,-4,5)$; $\overrightarrow{PP_1} = (2,8,-2)$, tehát a PP_1 egyenes egyenletrendszere: $x = 6 + 2t$, $y = 4 + 8t$, $z = 3 - 2t$. Hasonlóan adódik a PP_2 egyenesé: $x = 6 + t$, $y = 4$, $z = 3 + t$.

191. I. megoldás: Az A pontra illeszkedő $\underline{d}$-ra merőleges sik: $6x - 2y - 3z = -1$, ennek és az adott egyenesnek a közös pontja: $P(1,-1,3)$; a keresett egyenes azonos az AP-vel: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

II. megoldás: Az A-t az adott egyenes $(1,-1,3)$ pontjával összekötő vektor: $\underline{r}(2,-3,6)$, az adott egyenes irányvektora $\underline{v}_1(3,2,-5)$, az előállitandó egyenesé $\underline{v}_2(a,b,c)$. $\underline{v}_2$ merőleges $\underline{a}$-ra, ezért $6a - 2b - 3c = 0$; a metszés miatt viszont

$$\underline{v}_2\underline{v}_1\underline{r} = 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix},$$

amiből $-3a - 28b - 13c = 0$. Mivel az a,b,c koordinátáknak csak az aránya lényeges, feltehetjük, hogy pl. $a = 2$. Akkor $b = -3$ és $c = 6$ és igy a keresett egyenes:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

192. Az adott egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata az új egyenes irányvektora, ezért egyenletrendszere: $x = -1 + 3t$, $y = 2 - 9t$, $z = -4t$.

193. a) $-3x + 2y + 11z = -25$; b) $9x + y + 7z = -11$;

c) $x + z = 7$; d) $-2x + 9y + 9z = 0$; e) $z = -7$.

194. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

195. $y = 8$; $y = -8$.

196. Normálvektorának valamelyik koordinátája 0, mivel párhuzamos az egyik koordinátasikkal.

197. A sik egyenlete: $ax + by = c$.

198. $2x + 3y = 0$.

199. A sik normálvektora $\underline{n}(-4,5,2)$, átmegy a $P(-4,5,2)$ ponton, tehát egyenlete: $-4x + 5y + 2z = 45$.

200. A sik normálvektora $\underline{a} \times \underline{b}(-1,-4,-7)$, egyenlete: $x + 4y + 7z = -16$.

201. $x - y - z = 0$.

202. Az $\vec{AB}(1,0,-3)$ és $\vec{AC}(-1,1,0)$ a sik két vektora, a sik normálvektora ezek vektoriális szorzata: $\vec{AB} \times \vec{AC} = (3,3,1)$, a sik egyenlete: $3x + 3y + z = 8$.

203. A sik két vektora: az origóból az egyenes egy pontjához mutató $(3,-7,0)$ vektor és az egyenes $\underline{v}(2,1,1)$ irányvektora. A sik normálvektora ezek vektoriális szorzata: $(-7,-3,17)$, ezért a sik egyenlete: $7x + 3y - 17z = 0$.

204. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

205. A sik a koordinátatengelyeket rendre a $(6,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,3)$ pontokban metszi, a tetraéder origóból kiinduló éleinek hossza tehát: 6,4,3 ezért térfogata: 12.

206. Az a) és c) alattiak párhuzamosak.

207. a) $x - 4y + 3z = 0$; b) $9x + 6y - 4z = -50$.

208. A sik normálvektora $\vec{AB}(4,-12,-6)$, AB felezőpontja $F(-1,1,3)$, ezért a sik egyenlete: $2x - 6y - 3z = -17$.

209. A sik normálvektora az egyenes irányvektora: $\underline{v}(2,6,5)$, a sik egyenlete: $2x + 6y + 5z = 11$.

210. $2y - 3z + 7 = 0$.

211. A sik normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata: $(1,-25,9)$, ezért egyenlete: $x - 25y + 9z = -63$.

212. Az xy sikot: $3x + 17y = 2$, $z = 0$; az yz sikot: $17y + 8z = 2$, $x = 0$; a zx sikot $3x + 8z = 2$, $y = 0$.

213. Az előállitandó sik normálvektora merőleges az adott sik $\underline{n}(1,-2,5)$ normálvektorára és az adott egyenes $\underline{v}(2,1,4)$ irányvektorára, tehát ezek vektoriális szorzata: $\underline{n} \times \underline{v} = (-13,6,5)$, a sik egyenlete: $-13x + 6y + 5z = 56$.

214. Az előállitandó sikban benne van az $\vec{AB}(2,2,3)$

vektor és az adott sik $\underline{n}_1(1,-2,3)$ normálvektora, ezért normálvektora ezek vektoriális szorzata: $(12,-3,-6)\sim(4,-1,-2)$; a sik egyenlete $4x - y - 2z = 9$.

215. A sik normálvektora mindkét adott sik normálvektorára merőleges, tehát azok vektoriális szorzata, ezért az egyenlet: $7x - y - 5z = 0$.

216. $6x - 20y - 11z + 1 = 0$.

217. A sik normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata, egyenlete: $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

218. $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

219. Az egyik egyenesen a $P(1,-1,7)$ a másikon a $Q(-5,2,-3)$ pontot választjuk ki, a PQ szakasz $F(-2;0,5;2)$ felezőpontján megy át a sik, normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzata, egyenlete: $9x + 11y + 5z + 2,5 = 0$.

220. a) Két sik hajlásszöge normálvektoraik hajlásszögével egyenlő. Mivel a normálvektorok: $\underline{n}_1(1,-\sqrt{2},1)$, $\underline{n}_2(1,\sqrt{2},-1)$,
$\cos(\underline{n}_1\underline{n}_2) = \dfrac{\underline{n}_1\underline{n}_2}{|\underline{n}_1|\,|\underline{n}_2|} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
A két vektor itt tompaszöget zár be, ezért a hegyesszögü hajlásszög koszinusza $\frac{1}{2}$, ezért a φ hajlásszög 60°;

b) 45°;

c) 90°;

d) $\cos\varphi = \dfrac{2}{15}$, $\varphi = 82,34^\circ$;

e) 90°.

221. a) $-\dfrac{10x}{27} + \dfrac{2y}{27} - \dfrac{25z}{27} - 2 = 0$;

b) $\dfrac{3x}{26} - \dfrac{4y}{26} + \dfrac{z}{\sqrt{26}} = 0$;

c) $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 0$.

Az origótól mért távolságok rendre: $2, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

222. Előállitjuk a sik normálegyenletét úgy, hogy végigosztjuk egyenletét normálvektora hosszával. Mivel $|\underline{n}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 18^2} = 19$, a normálegyenlet $\dfrac{6x}{19} - \dfrac{y}{19} + \dfrac{18z}{19} - 1 = 0$.

A pont helyettesitési értéke az egyenlet baloldalába szolgáltatja az (előjeles) távolságot:

$$\frac{24}{19} + \frac{3}{19} + \frac{36}{19} - 1 = \frac{44}{19} = 2,32.$$

223. a) 3; b) $\frac{6}{\sqrt{41}}$; c) 0; d) 2; e) 3.

224. 4.

225. A pont koordinátahármasa (0,b,0) alakú, a sik normálegyenlete $\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - \frac{2}{3} = 0$.
A pont siktól mért távolsága $\left|\frac{2b}{3} - \frac{2}{3}\right| = 4$, ebből $b_1 = 7$, $b_2 = -5$, tehát a két pont: (0,7,0)és(0,-5,0).

226. A sikot úgy kaphatjuk meg, hogy az adott sikot a C pontból felére kicsinyitjük, tehát úgy is ehhez a sikhoz jutunk,ha a C és a sik tetszőleges pontja által meghatározott szakasz felezőpontján át az adott sikkal párhuzamos sikot fektetünk. A sik egy tetszőleges pontja: P(3,0,0), PC felező pontja (4,-4,2), a sik egyenlete: $2x - 9y + 5z = 61,5$.

227. <u>I. megoldás:</u> Az adott sikok normálegyenletei:
$\frac{3x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} = 0$ és $\frac{3x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} = 0$.
Az origóból mért távolságaik különbsége ezért $\left|-\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\right| = \frac{4}{\sqrt{14}}$, ez egyúttal a két sik távolsága is. A keresett sik a sikoktól ezért $\frac{2}{\sqrt{14}}$ távolságra van, ezért a normálegyenletében szereplő állandó értéke $\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$, ezért az egyenlete $3x + 2y - z + 1 = 0$.

<u>II. megoldás:</u> Válasszunk ki a sikokon egy-egy pontot; legyenek ezek (0,0,3) és (0,0,-1); az ezeket összekötő szakasz felezőpontja (0,0,1),ezen halad át az adottakkal párhuzamos sik, tehát egyenlete: $3x + 2y - z = -1$.

228. a) <u>I. megoldás:</u> Az első sik normálegyenlete:

$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - 4 = 0$. A második sik egy pontja: $P(6,0,0)$, ennek helyettesitési értéke az egyenlet baloldalán -2, tehát a pont-sik távolság és ezzel együtt a két sik távolsága 2.

<u>II. megoldás:</u> A második sik normálegyenlete:
$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - 2 = 0$. A normálegyenletekből tehát kiolvasható, hogy az origónak a sikokból mért előjeles távolságai: 4 és 2, azonos előjelük miatt az origó azonos oldalán van, tehát a két sik távolsága 2.

b) 3,5.

229. Az adott sik normálegyenlete: $\frac{4x}{6} - \frac{4y}{6} - \frac{2z}{6} + \frac{1}{2} = 0$ alakú, a keresett sikoké pedig: $\frac{4x}{6} - \frac{4y}{6} - \frac{2z}{6} - p = 0$. Mivel az adott sik origótól mért távolsága: $\frac{1}{2}$, az előállitandó sikoké: $-\frac{1}{2} + 2$, illetve $-\frac{1}{2} - 2$, tehát $p_1 = \frac{3}{2}$, $p_2 = -\frac{5}{2}$, a sikok egyenletei: $4x - 4y - 2z - 9 = 0$, $4x - 4y - 2z + 15 = 0$.

230. Ha a sikok normálegyenleteit $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ szimbolikus alakokkal jelezzük, mivel a szögfelező sikokra az jellemző, hogy pontjaik mindkét siktól egyenlő távolságra vannak, ezért ha P rajta van valamelyik szögfelező sikon $|N_1(P)| = |N_2(P)|$, ami azt jelenti, hogy $N_1(P) = \pm N_2(P)$, tehát a szögfelező sikok pontjai az $N_1 + N_2 = 0$, illetve $N_1 - N_2 = 0$ egyenleteknek tesznek eleget. Mivel a két adott sik normálegyenlete $\frac{x}{\sqrt{14}} - \frac{3y}{\sqrt{14}} + \frac{2z}{\sqrt{14}} - \frac{5}{\sqrt{14}} = 0$ és $\frac{3x}{\sqrt{14}} - \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} = 0$, a szögfelező sikok: $4x - 5y + z - 2 = 0$ és $-2x - y + 3z - 8 = 0$.

231. Az s_1 és s_2 párhuzamos sikok, ezért ha s_1 egy tetszőleges P pontját tükrözzük s_2 egy tetszőleges Q pontjára, a P' tükörkép rajta lesz a tükrözött s_1' sikon, és s_1' párhuzamos s_1-gyel. Legyen $P(3,0,0)$, $Q(-7,0,0)$, a tükrözött pont: $P'(-17,0,0)$, és igy s_1' egyenlete: $2x - 8y + 3z + 34 = 0$.

232. A feladatot megoldhatjuk például úgy, hogy az adott

sik három pontját (kettőt lehetőleg a metszésvonalon) tükrözzük. A tükörkép: $8x + 4y - z - 16 = 0$.

233. A metsző sik párhuzamos az AB és CD élekkel, normálvektora az $\vec{AB} \times \vec{CD} = (2,-1,5)$, egyenlete: $2x - y + 5z = 3$.

234. a) I. megoldás: Az egyenes egyenletéből $y = -2x + 1$ és $z = 6x - 6$, ezt a sik egyenletébe helyettesitve $2x + 3(-2x + 1) + (6x - 6) - 1 = 0$, a metszéspont x koordinátája innen $x = 2$, ezért $y = -3$, $z = 6$, tehát a metszéspont $M(2,-3,6)$.

II. megoldás: Ha az egyenletrendszer paraméteres alakban adott, vagy azt arra átirtuk: $x = 1 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 6t$, a koordinátákat a sik egyenletébe helyettesitve t-re a $2(1 + t) + 3(-1 - 2t) + 6t - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, ebből $t = 1$, és igy a döféspont koordinátái $(2,-3,6)$.

b) $\left(\frac{15}{11}, \frac{9}{11}, \frac{6}{11}\right)$; c) $(5,4,16)$;

d) az egyenes párhuzamos a sikkal, nincs döféspont;

e) az egyenes benne van a sikban.

235. Az egyenes irányvektorának és a sik normálvektorának a skaláris szorzata 0.

236. $m = -3$.

237. $a = 3$, $d = -23$.

238. A keresett pont z koordinátája 0, ezt a sikok egyenleteibe helyettesitve a $2x + y - 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$ egyenletrendszert kapjuk, ennek megoldása $x = 2$, $y = -1$, a pont:$(2,-1,0)$.

239. a) I. megoldás: Keressünk a sikokon két közös pontot (egyszerüség kedvéért koordinátasikban fekvő pontokat). Ha $x = 0$, z-re -4 és y-ra -8 adódik, tehát $M_1(0,-8,-4)$ a metszésvonal egy pontja: ha $z = 0$, a kapott pont $M_2(2,-1,0)$. Az M_1M_2 metszésvonal irányvektora $\underline{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = (2,7,4)$, ezért a metszésvonal egyenletrendszere $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

II. megoldás: A metszésvonal irányvektora a síkok normálvektorainak vektoriális szorzata, mert a metszésvonal mindkét normálvektorra merőleges. Mivel $\underline{n}_1(1,-2,3)$ és $\underline{n}_2(3,2,-5)$ vektoriális szorzata $(4,14,8) \sim (2,7,4)$. Ugyanúgy, mint az előző megoldásban, itt is kiszámítunk egy közös pontot, ennek és az irányvektornak a birtokában a metszésvonal egyenletrendszerét már felírhatjuk.

III. megoldás: Küszöböljük ki a két egyenletből először az x-et, majd az y-t (az együtthatók egyenlővétételével, majd kivonással): $4y - 7z + 4 = 0$ és $2x - z - 4 = 0$, e két egyenletből pedig z-t kifejezve kapjuk, hogy $z = 2x - 4$ és $z = \frac{4y+4}{7}$, tehát $2x - 4 = \frac{4y+4}{7} = z$, ezt még a szokásos alakra hozhatjuk, ha az egyenletrendszert 4-gyel végigosztjuk:
$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

b) $x - 3 = \frac{y-2}{2} = z$; c) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$,

d) $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{3}$.

240. A három egyenletből álló egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, a közös pont: $M(1,-2,2)$.

241. I. megoldás: Normálvektoraik vegyesszorzata 0, ez azt jelenti, hogy komplanárisak, tehát a metszésvonalak mindegyike merőleges a normálvektorok síkjára, ezért párhuzamosak, vagy esetleg egybe is eshetnek. Ezt az utóbbit kizárhatjuk azzal, hogy kiszámítjuk két síknak egy közös pontját és megmutatjuk, hogy ez nincs rajta a harmadikon. Vegyük észre, hogy a síkok között nincs párhuzamos.

II. megoldás: Számolással meggyőződhetünk róla, hogy a három egyenletből álló egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát a három síknak nincs közös pontja.

242. a) $a \neq 7$; b) $a = 7$, $b = 3$; c) $a = 7$, $b \neq 3$.

243. Egy egyenesre illeszkednek.

244. Ha a feltétel teljesül, akkor a három sík biztosan egy

egyenesre illeszkedik, mert az S_1 és S_2 bármely közös pontja rajta van S_3-on is. Legyen ugyanis $M(a,b,c)$ S_1 és S_2 metszésvonalának egy pontja, ekkor ez kielégíti S_1 és S_2 egyenletét, tehát $S_1(a,b,c) = 0$ és $S_2(a,b,c) = 0$, tehát $S_3(a,b,c) = \alpha S_1(a,b,c) + \beta S_2(a,b,c) = 0$, tehát S_3 egyenletét is kielégíti.

Ha viszont az S_3 sik átmegy S_1 és S_2 metszésvonalán, legyen $P(d,e,f)$ S_3-nak a metszésvonalon nem fekvő egy pontja és legyen $\alpha = S_2(d,e,f)$, $\beta = -S_1(d,e,f)$, α és β tehát nem 0-k. Az $\alpha S_1(x,y,z) + \beta S_2(x,y,z) = 0$ egyenlet az előzőek szerint S_1 és S_2 metszésvonalán átmenő sik egyenlete, de α és β választása miatt $\alpha S_1(d,e,f) + \beta S_2(d,e,f) = S_1(d,e,f)S_2(d,e,f) - S_1(d,e,f)S_2(d,e,f) = 0$, tehát tartalmazza P-t, ami azt jelenti, hogy csakis S_3 lehet, ezért $S_3(x,y,z) = \alpha S_1(x,y,z) + \beta S_2(x,y,z)$.

245. <u>I. megoldás:</u> Meghatározzuk az első két sik két közös pontját és megmutatjuk, hogy ezek rajta vannak a harmadik sikon is.

<u>II. megoldás:</u> Ha a sikok egyenletei rendre $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, akkor láthatjuk, hogy $S_3 = 2S_1 - 3S_2$, ami előző feladatunk alapján éppen azt jelenti, hogy egy egyenesre illeszkednek.

246. <u>I. megoldás:</u> Számitsuk ki a két sik metszésvonalán két pont koordinátáit, e két ponton és a P-n átmenő sik egyenletét kell felirnunk.

<u>II. megoldás:</u> A 245. feladat II. megoldása szerint a keresett sik egyenlete $\alpha(x - y + 3z - 8) + \beta(2x + y - z + 2) = 0$ alakú, ahol α a $P(-2,1,3)$ koordinátáinak helyettesitési értéke a második, $-\beta$ pedig az első egyenletbe, tehát $\alpha = -4$, $\beta = 2$, tehát a sik egyenlete: $3y - 7z + 18 = 0$.

247. $y + z - 18 = 0$.

248. a) A sik $\underline{n}(1,9,4)$ normálvektorának és az egyenes $\underline{v}(4,1,9)$ irányvektorának a szöge pótszöge a sik és egyenes φ hajlásszögének:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\underline{n}\underline{v}}{|\underline{n}|\,|\underline{v}|} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}, \quad 90^\circ - \varphi = 60^\circ,$$

$$\varphi = 30^\circ.$$

b) 0°; c) 90°; d) $\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{5}{21}$,

$$\varphi = 13{,}78^\circ.$$

249. Az AB felező merőleges sikjának és az egyenesnek a döféspontja a keresett pont: $P(-2,2,2)$.

250. A ponton át a sikra emelt merőleges irányvektora a sik $\underline{v}(2,-1,3)$ normálvektorával azonos, ezért egyenletrendszere $x = 5 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 3t$. Ennek a sikkal alkotott döféspontja a vetületi pont: $P'(\frac{53}{7}, \frac{5}{7}, \frac{20}{7})$.

251. P-ből merőlegest állitunk a sikra, és ennek döféspontjára tükrözzük P-t, a tükörkép: $(-5,1,0)$.

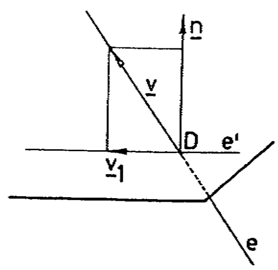
252. $(1,-2,2)$.

253. $(2,-3,-5)$.

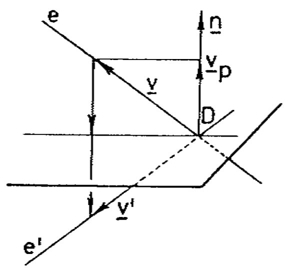
254. Először kiszámitjuk az adott egyenes és sik döféspontjának a koordinátáit: $D(1,2,-1)$. A vetületi egyenes irányvektora $\underline{v}_1$, az adott egyenes $\underline{v}$ irányvektorának $\underline{n}$-re merőleges összetevője,

$$\underline{v}_1 = \underline{v} - \frac{\underline{n}\underline{v}}{\underline{n}^2}\underline{n} = (-1,-2,-1),$$

a vetület egyenletrendszere tehát $x - 1 = \frac{y-2}{2} = z + 1$.



254.



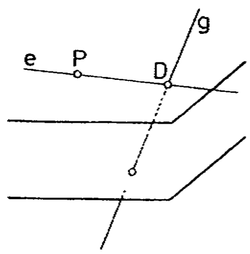
255.

255. Az egyenes és a sík döféspontja: D(6,−4,−2). Ha az egyenes irányvektora a $\underline{v}(7,-8,-5)$, a sík normálvektora $\underline{n}(1,1,1)$, az ábráról leolvasható, hogy a tükrözött egyenes $\underline{v}'$ irányvektorára $\underline{v}' = \underline{v} - 2\underline{v}_p$, ahol $\underline{v}_p$ a $\underline{v}$ $\underline{n}$-ral párhuzamos összetevője, tehát

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{n}\underline{v}}{\underline{n}^2}\,\underline{n} = (-2,-2,-2);$$

$\underline{v}' = (11,-4,-1)$, így a tükörkép egyenletrendszere:

$$\frac{x-6}{11} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+2}{-1}.$$



256.

256. A keresett e egyenes benne van a P-n át az adott síkkal párhuzamosan fektetett síkon, ennek egyenlete $2x - y + 5z + 1 = 0$. Az adott g egyenes ezt a síkot a D(1,−12,−3) pontban metszi. Az e egyenes irányvektora $\overrightarrow{PD} = (4,-17,-5)$ és így egyenletrendszere:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-2}{-5}.$$

257. A keresett egyenes merőleges a sík $\underline{n}(2,1,-8)$ normálvektorára és az adott egyenes $\underline{v}(4,2,1)$ irányvektorára, ezért irányvektora $\underline{v}_1 = \underline{n} \times \underline{v} = (17,-34,0) \sim (1,-2,0)$, tehát egyenletrendszere: $x = -3 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = 1$.

258. $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

259. A sík egy pontjaként az egyenes egy pontját választhatjuk, normálvektora pedig az egyenes irányvektorá-

nak és az adott sik normálvektorának a vektoriális szorzata. A sik egyenlete: $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

260. A transzverzális párhuzamos a sikok metszésvonalával (lásd a 187. feladatot!), egyenletrendszere: $x = -3 + 8t$, $y = -1 - 3t$, $z = 2 - 4t$.

261. Az egyenes a sikok metszésvonalával (normálvektoraik vektoriális szorzatával) párhuzamos.

262. $\dfrac{x - \frac{50}{41}}{2} = \dfrac{y + \frac{25}{41}}{4} = \dfrac{z - \frac{25}{41}}{-1}$.

263. A sik átmegy az első egyenes $P(3,0,-1)$ pontján és normálvektora a két egyenes irányvektorainak vektoriális szorzata: $(-19,2,9)$, tehát egyenlete: $-19x + 2y + 9z + 66 = 0$.

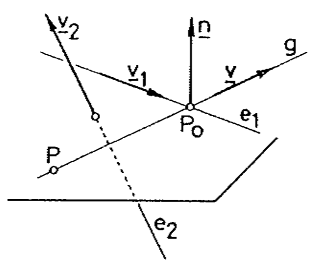
264. γ tartalmazza az α sik $\underline{n}(2,-1,1)$ normálvektorát és e $\underline{v}(2,1,0)$ irányvektorát, ezért γ normálvektora $\underline{n} \times \underline{v} = (-1,2,4)$, egyenlete: $-x + 2y + 4z = 4$.

265. Az y tengely az α sikot a $P(0,4,0)$ pontban metszi. g irányvektora merőleges az e $\underline{v}(1,3,-1)$ irányvektorára és a sik $\underline{n}(5,-1,3)$ normálvektorára, ezért

$$\underline{n} \times \underline{v} = (-8,8,16) \sim (-1,1,2)$$

adja az irányát, tehát g egyenletrendszere: $x = -t$, $y = 4 + t$, $z = 2t$.

266. Az előállitandó sik tartalmazza az egyenes $\underline{v}(-3,1,-1)$ irányvektorát és párhuzamos az adott sikok metszésvonalával, azaz a sikok $\underline{n}_1(1,-8,1)$, $\underline{n}_2(2,1,1)$ normálvektorainak $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ vektoriális szorzatával. Ezért normálvektora $(\underline{n}_1 \times \underline{n}_2) \times \underline{v} = (\underline{n}_1\underline{v})\underline{n}_2 - (\underline{n}_2\underline{v})\underline{n}_1 = -12\underline{n}_2 + 6\underline{n}_1 = (-18,-60,-6) \parallel (3,10,1)$, egy pontja az adott egyenes $(5,0,-1)$ pontja, igy egyenlete: $3x + 10y + z = 14$.



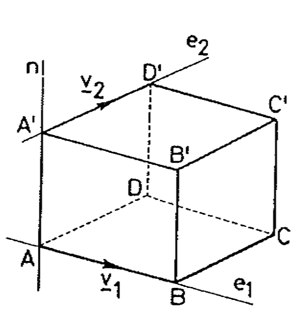
267.

267. I. megoldás: A g egyenes benne van P és e_1 sikjában, ezért g irányvektora, $\underline{v}$, merőleges a sik $\underline{n}$ normálvektorára és e_2-nek $\underline{v}_2$ normálvektorára is, tehát $\underline{v} = \underline{n} \times \underline{v}_2$. P-ből az egyenes egy pontjához mutató $\underline{r} = (4,0,-2)$ és $\underline{v}_1$ vektoriális szorzata $\underline{n}$, tehát $\underline{v} = (\underline{r} \times \underline{v}_1) \times \underline{v}_2 =$
$= (\underline{r}\underline{v}_2)\underline{v}_1 - (\underline{v}_1\underline{v}_2)\underline{r} = -22\underline{v}_1 - 4\underline{r} = (-60,-22,-14) \sim (30,11,7)$,
ezért

$$g : \frac{x+1}{30} = \frac{y}{11} = \frac{z-3}{7}.$$

II. megoldás: P-t az $e_1(3 + 2t,\ t,\ 1 + t)$ pontjaival összekötő vektor $(4 + 2t,\ t,\ -2 + t)$ alakú és ha ez éppen $\underline{v}$-ral azonos, $\underline{v}_2$-ral szorozva 0-t kapunk, tehát $-2(4 + 2t) + t + 7(-2 + t) = 0$, ebből $t = 5{,}5$, tehát e_1-nek a $P_0(11;\ 5{,}5;\ 6{,}5)$ pontját kell összekötnünk P-vel, hogy g-t kapjuk. A PP_0 egyenes egyenletrendszere azonos az előző megoldásban nyerttel.

268. Az adott sikok normálegyenletei $\frac{x - 8y + 4z}{9} - 1 =$
$= 0$ és $\frac{4x + 20y - 5z}{21} - 2 = 0$. A keresett egyenes benne van pl. az első siktól egységnyi távolságra levő (vele párhuzamos) sikban, ezek egyike az $\frac{x - 8y + 4z}{9} - 5 = 0$ sik.
A második sikból a $\frac{4x + 20y - 5z}{21} - 5 = 0$ sik 3 egységnyire van. Ezek metszésvonala kielégíti a feladat feltételeit.



269.

269. Mivel e_1 és e_2 kitérő éleken vannak (nem párhuzamosak), e két egyenes normáltranszverzálisa tartalmazza az egyik oldalélt. Ezért először a e_1 és e_2 normáltranszverzálison levő A, illetve A' pontját

határozzuk meg. Legyenek ezek koordinátái $A(-5 + 4t, 6 + 4t, -15 + 7t)$ és $A'(5 + t', -7 + 4t', 20 + 8t')$, ezért az $\overrightarrow{AA'} = (10 - 4t + t', -13 - 4t + 4t', 35 - 7t + 8t')$, ezt a $\underline{v}_1(4,4,7)$ és $\underline{v}_2(1,4,8)$ vektorokkal szorozva 0-t kapunk, tehát

$$4(10 - 4t + t') + 4(-13 - 4t + 4t') + 7(35 - 7t + 8t') = 0$$
$$(10 - 4t + t') + 4(-13 - 4t + 4t') + 8(35 - 7t + 8t') = 0.$$

Ebből a t,t'-re nézve kétismeretlenes egyenletből $t' = -2$, $t = 1$, tehát a metszéspontok: $A(-1,10,-8)$, $A'(3,-15,4)$. Mivel $|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2| = 9$, $\overrightarrow{AB} = 2\underline{v}_1$ és $\overrightarrow{AD} = \pm 2\underline{v}_2$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, az egyik megoldás ($2\underline{v}_1$ és $2\underline{v}_2$ vektorokkal számolva): $A(-1,10,-8)$, $B(7,18,6)$, $C(9,26,22)$, $D(1,18,8)$, $A'(3,-15,4)$, $B'(11,-7,18)$, $C'(5,-7,20)$, $D'(13,1,34)$.

270. a) $x = x' - 4$, $y = y' + 6$, $z = z' - 1$.

b) $x - 8y + 2z + 6 = x' - 4 - 8(y' + 6) + 2(z' - 1) + 6 = x' - 8y' + 2z' - 48 = 0.$

271. Tegyük fel, hogy az origót a $\underline{v}(a,b,c)$ vektorral toltuk el, ekkor az áttérés egyenletei: $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$; tehát

$$3x - 4y + z + 9 = 3(x' + a) - 4(y' + b) + (z' + c) = 3x' - 4y' + z' + 3a - 4b + c + 9,$$

ennek meg kell egyeznie a megadott transzformált egyenlettel, tehát

$$3x' - 4y' + z' + 3a - 4b + c + 9 = 3x' - 4y' + z' - 17,$$

ebből

$$3a - 4b + c + 26 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy a lehetséges új origók $[xyz]$ rendszerbeli koordinátái az előbbi egyenletnek tesznek eleget, azaz egy síkon vannak.

272. a) $x = \frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$.

b) $x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$.

c) $x = -y'$, $y = x'$.

d) $x = y'$, $y = -x'$.

e) $x = -x'$, $y = -y'$.

273. Az áttérés egyenletei: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'$, ezért $0 = x^2 - y^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 - 1 = -2x'y' - 1 = 0$, tehát $x'y' = -\frac{1}{2}$.

274. -30°.

275. Az új tengelyek egységvektorai a régi rendszerben: $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ és $(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$.
Ezért a transzformáció egyenletei:

$$x = \frac{5x'}{13} - \frac{12y'}{13},$$

$$y = \frac{12x'}{13} + \frac{5y'}{13}.$$

276. Toljuk el először a koordinátarendszert, az áttérés egyenletei: $x = x' + 4$, $y = y' + 8$, az eltolt koordinátarendszerben az egyenlet: $4(x' + 4) - 3(y' + 8) - 1 = 4x' - 3y' - 9 = 0$. Alkalmazzuk most erre a 30°-os elforgatást, ennek egyenletei:

$$x' = \frac{x''\sqrt{3}}{2} - \frac{y''}{2}, \quad y' = \frac{x''}{2} + \frac{y''\sqrt{3}}{2}, \text{ ezért}$$

$4x' - 3y' - 9 = 2(x''\sqrt{3} - y'') - 3(\frac{x''}{2} + \frac{y''\sqrt{3}}{2}) - 9 =$
$= (2\sqrt{3} - 1{,}5)x'' - (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2})y'' - 9 = 0.$

277. Az eltolásnál végezzük el az $x \to x + 2$, $y \to y + 3$ helyettesítést:
$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 \to 5(x + 2)^2 + 4(x + 2)(y + 3) + 8(y + 3)^2 - 32(x + 2) - 56(y + 3) + 80 = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36.$
Az elforgatás transzformációs egyenletei:

$$x \to \frac{2}{\sqrt{5}} x + \frac{1}{\sqrt{5}} y, \qquad y \to -\frac{1}{\sqrt{5}} x + \frac{2}{\sqrt{5}} y$$

Az elforgatott koordinátarendszerben az egyenlet igy alakul:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 \to 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y\right) + 8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2 - 36 = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

A végeredmény:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ (ellipszis egyenlete).}$$

278. $\dfrac{x - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{z}{-2}$, $y = 0$.

279. $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$, $z = z'$.

280. $x = \dfrac{2x'}{11} + \dfrac{9y'}{11} + \dfrac{6z'}{11}$, $y = \dfrac{6x'}{11} - \dfrac{6y'}{11} + \dfrac{7z'}{11}$, $z = \dfrac{9x'}{11} + \dfrac{2y'}{11} - \dfrac{6z'}{11}$.

281. Az új koordinátarendszer egységvektorai: $\underline{a}^o\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\underline{b}^o\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\underline{c}^o\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ezért az elforgatásnak megfelelő helyettesitések:

$x \to \frac{2x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{3}$, $y \to -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3}$, $z \to \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3}$. E helyettesitéseket elvégezve az egyenlet igy alakul:

$6x^2 + 3y^2 + 12x = 0$. Az eltolásnak megfelelő helyettesitések $x \to x + 1$, $y \to y$, $z \to z$; a helyettesitést elvégezve kapjuk:

$2x^2 + y^2 = 2$, azaz $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ (ellipszis alapú henger egyenlete).