Számitjuk a másodrendü főmennyiségeket:

$$L = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_{uu} \;;\quad M = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_{uv} \;;\quad N = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_{vv} \,.$$

A képletek számlálóiban szereplő

$$L' = \mathbf{r}_u\,\mathbf{r}_v\,\mathbf{r}_{uu}; \quad M' = \mathbf{r}_u\,\mathbf{r}_v\,\mathbf{r}_{uv} \;;\quad N = \mathbf{r}_u\,\mathbf{r}_v\,\mathbf{r}_{vv}$$

vegyesszorzatokat számitjuk ki.

$$L' = \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a+b\cos u)\sin v & (a+b\cos u)\cos v & 0 \\ -b\cos u\cos v & -b\cos u\sin v & -b\sin u \end{vmatrix} =$$

$$= b\cos u(ab\cos u + b^2\cos^2 u) - b\sin u(-ab\sin u -$$

$$-b^2\sin u\cos u) = ab^2 + b^3\cos u = b^2(a + b\cos u).$$

$$M' = \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a+b\cos u)\sin v & (a+b\cos u)\cos v & 0 \\ b\sin u\sin v & -b\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$N' = \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a+b\cos u)\sin v & +(a+b\cos u)\cos v & 0 \\ -(a+b\cos u)\cos v & -(a+b\cos u)\sin v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= b\cos u\,(a + b\cos u)^2.$$

Innen

$$L'\,N' - M'^2 = b^3\cos u(a + b\cos u)^3.$$

A felületi pont jellegét az $L\,N - M^2$ kifejezés előjele dönti el.
Viszont

$$L\,N - M^2 = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2}(L'\,N' - M') \,.$$

Elegendő tehát az $L'\,N' - M'$ kifejezés értékét kiszámitani minden esetben.
Az

$$L'\,N' - M'^2 = b^3\cos u(a + b\cos u)^3$$

egyenlőség alapján megkeressük a felület parabolikus pontjait. Ezek választják el az elliptikus pontokat a hiperbolikus pontoktól. Az $a + b\cos u$ tényező nem lehet nulla, mert ez esetben $a = -b\cos u$ volna, ami $a > b$ miatt lehetetlen. Tehát csak a $\cos u = 0$ lehetséges, vagyis $u = \pm\frac{\pi}{2}$.

Tehát az $u = \pm\frac{\pi}{2}$ paramétervonalak mentén helyezkednek el a parabolikus pontok.

Az $a + b\cos u$ mindig pozitiv az $a > b$ miatt, ezért a szorzat előjelét a $\cos u$ előjele határozza meg.

Ha $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos u > 0$, a felületi pontok elliptikusak

Ha $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ akkor $\cos u < 0$, a felületi pontok hiperbolikusak

434.° Meghatározzuk a parciális deriváltakat.

$$3\,z'_x + 3\,z + 3\,x\,z'_x - y\,z'_x + 1 = 0,$$

$$3\,z'_y + 3\,x\,z'_y - z - z'_y\,y + 1 = 0.$$

$$p = z'_x = -\frac{1 + 3\,z}{3 + 3x - y} \;;\quad p_0 = -\frac{1}{3} \,.$$

$$q = z'_y = \frac{z - 1}{3 + 3x - y} \;;\quad q_0 = -\frac{1}{3} \,.$$

$$r = z''_{xx} = -\frac{3\,z'_x(3+3x - y) - (1 + 3z)3}{(3 + 3x - y)^2} \;;\; r_0 = \frac{2}{3} \,.$$

$$s = z''_{xy} = -\frac{3\,z'_y\,(3 + 3x - y) - (1 + 3z)\,(-1)}{(3 + 3x - y)^2} ; s_0 = +\frac{2}{9}.$$

$$t = z''_{yy} = \frac{z'_y\,(3 + 3x - y) - (z - 1)\,(-1)}{(3 + 3x - y)^2} \;;\; t_0 = -\frac{2}{9} \,.$$