Matematika A3 képletgyűjtemény—Vektoranalízis

1. Vektoranalízis

1.1. A Kronecer-féle szimbólum és a Levi-Civita tenzor

A Kronecker-féle δ-szimbólum:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha i = j} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az Levi–Civita-féle ϵ-szimbólum (vagy teljesen antiszimmetrikus egységtenzor):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (ijk) = (123), \quad (312), \quad (231) \\ -1 & \text{ha } (ijk) = (132), \quad (213), \quad (321) \\ 0 & \text{egyébként (bármely két index megegyezik).} \end{cases}$$

Kifejtési tétel:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

1.2. Differenciáloperátorok Descartes-koordinátákban 3 dimenzióban

A továbbiakban α, β tetszőleges valós számokat, f, g tetszőleges skalármezőket és $\underline{u}, \underline{v}$ tetszőleges vektormezőket fog jelölni $\mathbb{R}^3$-ön.

Gradiens:

$$\text{grad}\, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rotáció:

$$\text{rot}\, \underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Divergencia:

$$\text{div}\, \underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ ; \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Deriválttenzor:

$$\text{D}\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \text{Hom}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right) \ ; \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

(Megjegyzés: a rotáció a deriválttenzor *antiszimmetrikus része*, a divergencia a deriválttenzor *nyoma*.)

Laplace-operátor:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ ; \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Egy függvény *harmonikus* $\mathbb{R}^3$-ön, ha $\Delta f = 0$.

1.2.1. Nevezetes azonosságok

- Linearitás:

$$\operatorname{grad}(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \operatorname{grad} f + \beta \cdot \operatorname{grad} g$$

$$\operatorname{rot}(\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot \operatorname{rot} \underline{u} + \beta \cdot \operatorname{rot} \underline{v}$$

$$\operatorname{div}(\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot \operatorname{div} \underline{u} + \beta \cdot \operatorname{div} \underline{v}$$

- Leibniz típusú szabályok skalármezőkkel való szorzás esetén:

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g$$

$$\operatorname{rot}(f \cdot \underline{v}) = \operatorname{grad} f \times \underline{v} + f \cdot \operatorname{rot} \underline{v}$$

$$\operatorname{div}(f \cdot \underline{v}) = \langle \operatorname{grad} f \, , \, \underline{v} \rangle + f \cdot \operatorname{div} \underline{v}$$

- Leibniz típusú szabályok vektormezők skaláris-, illetve vektoriális szorzatai esetén:

$$\operatorname{grad}(\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle) = \mathrm{D}\underline{u}(\underline{v}) + \mathrm{D}\underline{v}(\underline{u}) + \underline{u} \times \operatorname{rot} \underline{v} + \underline{v} \times \operatorname{rot} \underline{u}$$

$$\operatorname{rot}(\underline{u} \times \underline{v}) = \mathrm{D}\underline{u}(\underline{v}) - \mathrm{D}\underline{v}(\underline{u}) + (\operatorname{div} \underline{v}) \cdot \underline{u} - (\operatorname{div} \underline{u}) \cdot \underline{v}$$

$$\operatorname{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = \langle \operatorname{rot} \underline{u} \, , \, \underline{v} \rangle - \langle \underline{u} \, , \, \operatorname{rot} \underline{v} \rangle$$

- Eltűnési azonosságok:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \underline{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{v}) = 0$$

1.3. Integrálás

Továbbiakban $\underline{v}$ egy vektormező, γ egy görbe, melynek $\underline{\gamma}(t)$ egy koordinátázása, S egy felület, melynek $\underline{p}(u, v)$ egy koordinátázása, végül f egy skalármező és V egy tartomány $\mathbb{R}^3$-ön.

1.3.1. Vonalintegrál

$$\int_{\gamma} \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}\underline{\gamma} \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \underline{v}(\underline{\gamma}(t))\,,\, \dot{\underline{\gamma}}(t) \rangle \mathrm{d}t$$

Newton-Leibniz-formula:

$$\int_{\gamma} \langle \operatorname{grad} f\,,\, \mathrm{d}\underline{\gamma} \rangle = f(\underline{\gamma}(t_1)) - f(\underline{\gamma}(t_0))$$

Egy vektormező *skalárpotenciálos*, ha egy skalármező gradienseként áll elő, azaz $\underline{v} = \operatorname{grad} f$.

Következény: Skalárpotenciálos vektormező zárt görbére vett integrálja nulla:

$$\oint_{\gamma} \langle \operatorname{grad} f\,,\, \mathrm{d}\underline{\gamma} \rangle = 0$$

1.3.2. Felületi integrál (fluxus)

$$\iint_{S} \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}\underline{S} \rangle = \iint_{S} \langle \underline{v}(\underline{p}(r, s))\,,\, (\partial_r \underline{p} \times \partial_s \underline{p})(r, s) \rangle \mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

Stokes-tétel:

$$\oint_{\partial S = \gamma} \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}\underline{\gamma} \rangle = \iint_{S} \langle \operatorname{rot} \underline{v}\,,\, \mathrm{d}\underline{S} \rangle$$

Egy vektormező *vektorpotenciálos*, ha egy vetkormező rotációjaként áll elő, azaz $\underline{v} = \operatorname{rot} \underline{u}$.

Következény: Vektorpotenciálos vektormező zárt felületre vett integrálja nulla: $\underline{v}$ vektormezőre:

$$\oint\!\!\oint_{S} \langle \operatorname{rot} \underline{u}\,,\, \mathrm{d}\underline{S} \rangle = 0$$

1.3.3. Térfogati integrál

$$\iiint_{V} f \mathrm{d}V = \iiint_{V} f(r, s, t) \cdot \det D(r, s, t) \mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

ahol $\det D(r, s, t)$ a *Jacobi-determináns*.

Gauss-tétel:

$$\oint\!\!\oint_{\partial V = S} \langle \underline{v}, \mathrm{d}\underline{S} \rangle = \iiint_{V} \left(\operatorname{div} \underline{v} \right) \mathrm{d}V$$

Következmény: Minden V zárt tértartományra, és $\underline{v}$ vektormezőre

$$\oiiint\limits_V (\mathrm{div}\ \underline{v})\mathrm{d}V = 0$$

1.4. Green formulái

Legyenek φ, ψ skalármezők a V tértartományon!

Green első formulája:

$$\iiint\limits_V (\psi \cdot \Delta\varphi + \langle \mathrm{grad}\,\psi\ ,\ \mathrm{grad}\,\phi \rangle)\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V = S} \langle \psi \cdot \mathrm{grad}\,\varphi\ ,\ \mathrm{d}\underline{S} \rangle$$

Green második formulája:

$$\iiint\limits_V (\psi \cdot \Delta\varphi - \varphi \cdot \Delta\psi)\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V = S} \langle \psi \cdot \mathrm{grad}\,\varphi - \varphi \cdot \mathrm{grad}\,\psi\ ,\ \mathrm{d}\underline{S} \rangle$$