Függvények

Tétel:
Ha az $x = \varphi(y)$ függvény az $y = f(x)$ függvény inverze, akkor $y = \varphi(x)$ függvény grafikonja az $y = f(x)$ függvény képéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel nyerhető.

Tétel:
Minden szigorúan monoton függvénynek van inverz függvénye.
Bizonyítás: Ha a függvény például szigorúan monoton, növekvő, akkor az $x_1 < x_2$ feltevésből $f(x_1) < f(x_2)$ következik. Ebből látható, hogy egy függvényértéket a függvény csak egy helyen vehet fel, tehát a hozzárendelés egyértelműen megfordítható.

Megjegyzés:
A szigorú monotonitás az inverz függvény létezésének elegendő, de nem szükséges feltétele. Könnyű olyan függvényt találni, amely nem monoton, mégis van inverze.

1. Nevezetes függvények

1.1. A hatványfüggvény

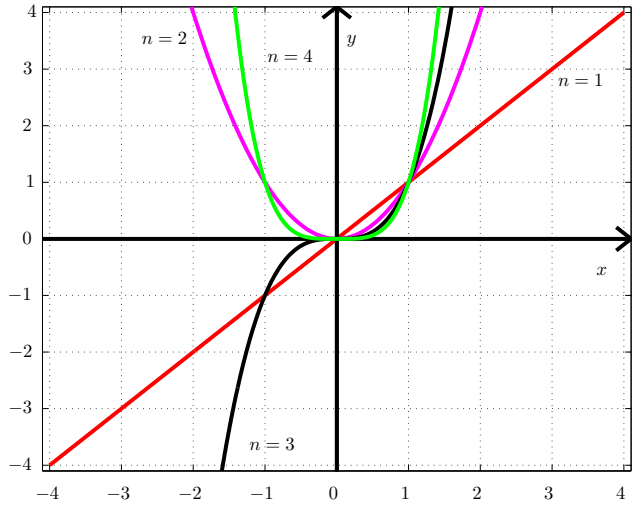
Definíció:
Az $y = x^n$ függvényt hatványfüggvénynek nevezzük, ha n tetszőleges, nullától különböző állandó.

1.1.1. Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvény

Értelemszerűen itt $n \in \mathbb{Z}^+$.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = (-\infty, +\infty)$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [0, +\infty)$, ha n páros; illetve $R_f = (-\infty, +\infty)$, ha n páratlan.
- *Folytonosság:* az értelmezési tartományukon folytonos függvények.



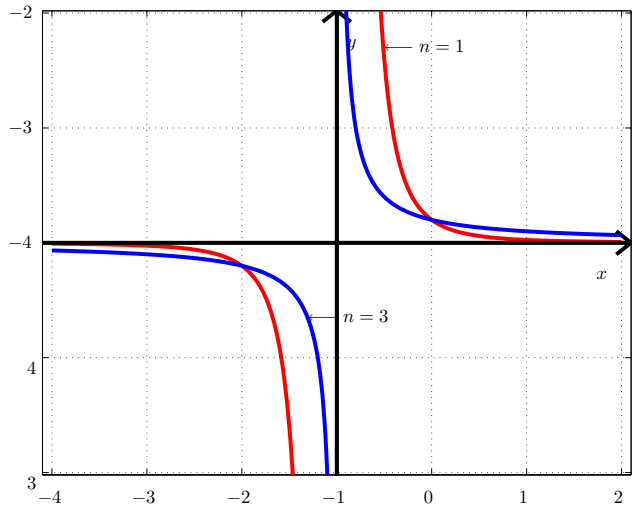
1. ábra. Hatványfüggvények képe pozitív egész kitevő esetén

1.1.2. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvény

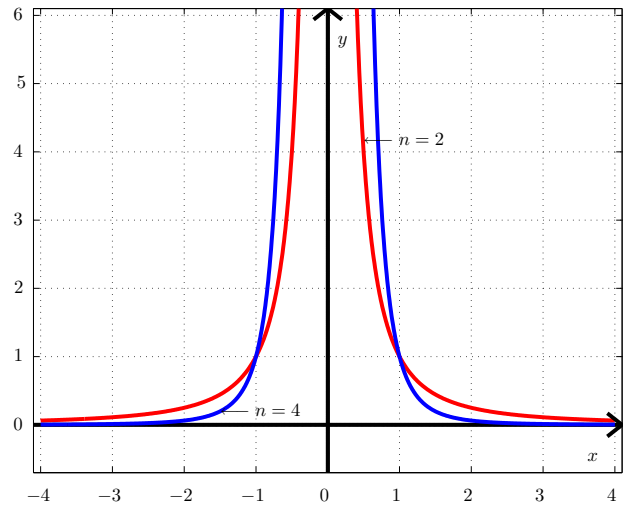
$y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ alakúak, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [0, +\infty)$, ha n páros; illetve $R_f = (-\infty, +\infty)$, ha n páratlan.
- *Folytonosság:* Folytonos, monoton részekből állnak.



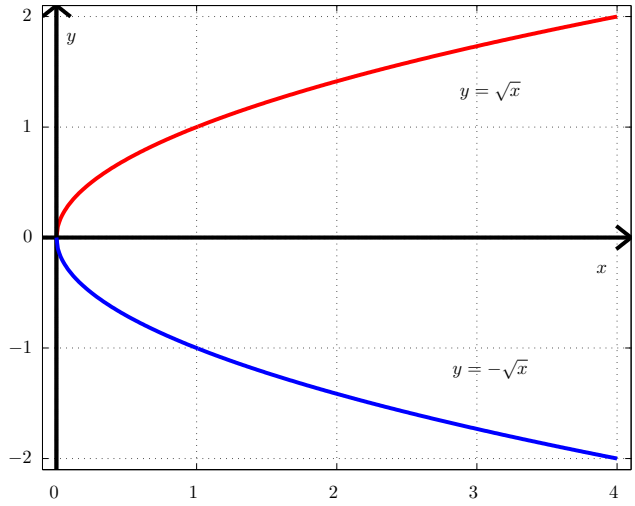
2. ábra. Hatványfüggvények képe negatív egész, páratlan kitevő esetén



3. ábra. Hatványfüggvények képe negatív egész, páros kitevő esetén

1.1.3. Törtkitevőjű hatványfüggvények

Teljes tárgyalásuk sok apró vizsgálatot igényel. $y = x^{\frac{p}{q}}$ esetén a $\dfrac{p}{q}$ tört számlálójának és nevezőjének páros vagy páratlan voltát kell megvizsgálni. Gyakorlati szempontból legfontosabb az $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ függvény.



4. ábra. A négyzetgyök függvény és ellentettje

Tulajdonságok: (Az $y = \pm\sqrt{x}$ függvényre)

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = [0, +\infty)$.
- *Értékkészlet:* $y = \sqrt{x}$ függvényre $R_f = [0, +\infty)$; $y = -\sqrt{x}$ függvényre $R_f = (-\infty, 0]$.
- *Folytonosság:* folytonos, monoton függvények.

1.2. A polinomfüggvény

$y = P_x(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ függvény, ahol $n \in \mathbb{N}$; $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok. (n-edfokú polinom.)

Az egész számegyenesen értelmezett folytonos függvény, mivel folytonos függvények lineáris kombinációja.

Viselkedése a ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{ha } a_0 < 0 \end{cases}.$$

Ez akkor látszik legegyszerűbben, ha kiemeljük az összes első tagját az összes többiből:

$$P_n(x) = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right).$$

Ebben az felírásban $x \to \infty$ esetében a zárójelben lévő összeg 1-hez konvergál.

1.3. A racionális törtfüggvény

Nem egyszerűsíthető törtfüggvény, amely a_0, a_1, a_2,..., a_n és b_0, b_1, b_2,..., b_m valós számokkal a következő alakban írható fel:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* a nevező zérushelyei kivételével az egész számegyenes. (legfeljebb m hely.)
- *Határértékek:* Az általános felírásban a számlálóban és a nevezőben lévő legmagasabb fokszámú tagot kiemelve:

  $$f(x) = \frac{a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x^2} + \frac{a_2}{a_0} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right)}{b_0x^m\left(1 + \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{x^2} + \frac{b_2}{b_0} + \ldots + \frac{b_m}{b_0}\frac{1}{x^m}\right)}$$

  Ebben a kifejezésben $x \to \infty$ esetén a zárójelben lévő kifejezések határértéke 1, ezért a függvény határértéke n és m értékeitől, illetve a_0 és b_0 előjelétől függ.

  Az egyes lehetséges eseteket külön vizsgáljuk.

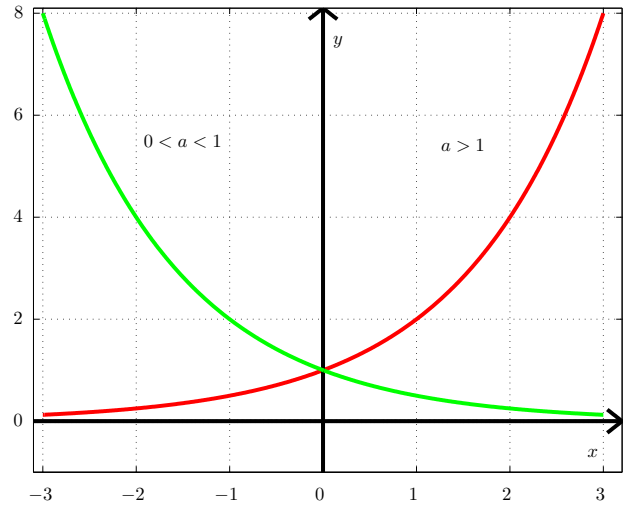
  1. $n > m$ esetén x^m-nel egyszerűsítve a kifejezés: $\dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}$. Ennek határértéke $+\infty$, ha a_0 és b_0 azonos előjelű, $-\infty$, ha a_0 és b_0 különböző előjelű.

     A $-\infty$-ben vett határérték az a_0 és b_0 előjelén kívül még $(n-m)$ páros vagy páratlan voltától is függ. Nevezetesen:

     - Ha a_0 és b_0 azonos előjelű, akkor a határérték $+\infty$, ha $n-m$ páros; a határérték $-\infty$, ha $n-m$ páratlan.
     - Ha a_0 és b_0 különböző előjelű, akkor fordított a helyzet.
  2. $n = m$ esetén $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$.
  3. Ha $n < m$, akkor egyszerűsítés után a nevezőben $x^{m-n} \to \infty$ miatt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

1.4. Az exponenciális függvény

Alakja $y = a^x$, ahol $a \in \mathbb{R}^+$.



5. ábra. Az exponenciális függvények grafikonja $a > 1$ és $0 < a < 1$ esetén

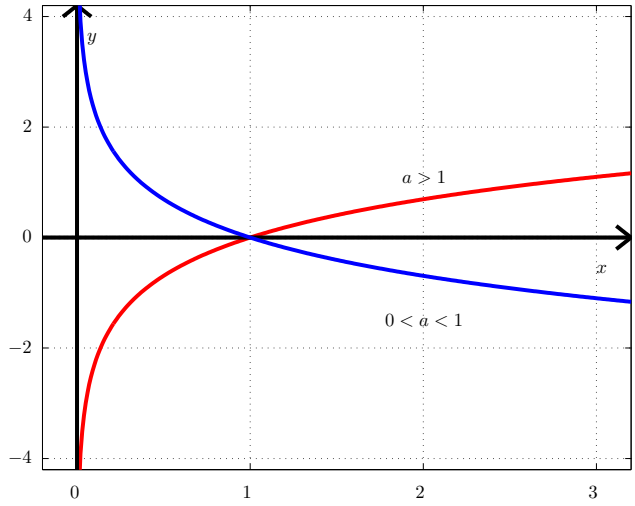
Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [0, +\infty)$.
- *Monotonitás, folytonosság:* Ha $a > 1$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő. Ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő. A függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos. Ha $a > 1$, akkor $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, míg ha $0 < a < 1$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. Az exponenciális függvénynek az x tengely aszimptotája.

1.5. A logaritmus függvény

Az $x = a^y$ exponenciális függvény inverzét logaritmus függvénynek nevezzük:

$$y = \log_a x \qquad a > 0$$



6. ábra. A logaritmus függvény

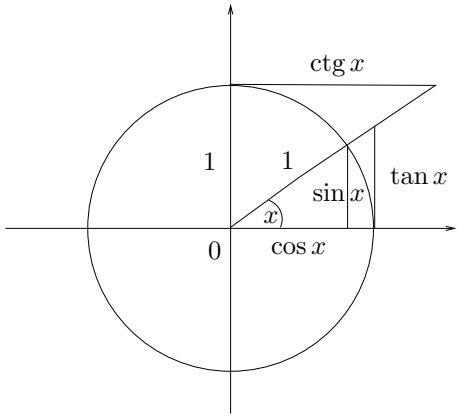
Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f =]0, +\infty)$
- *Értékkészlet:* $R_f = (-\infty, +\infty)$
- *Folytonosság, monotonitás:* Mivel az exponenciális függvény folytonos, ezért a logaritmus függvény is folytonos; $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő, $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő.

Megjegyzés: Az $e = 2{,}7182\ldots$ alapú logaritmus jele $\ln x$, a 10-es alapú logaritmus jele $\lg x$.

1.6. Trigonometrikus függvények

Az $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ függvények összefoglaló neve trigonometrikus függvények, ahol x ívmértékben értendő.

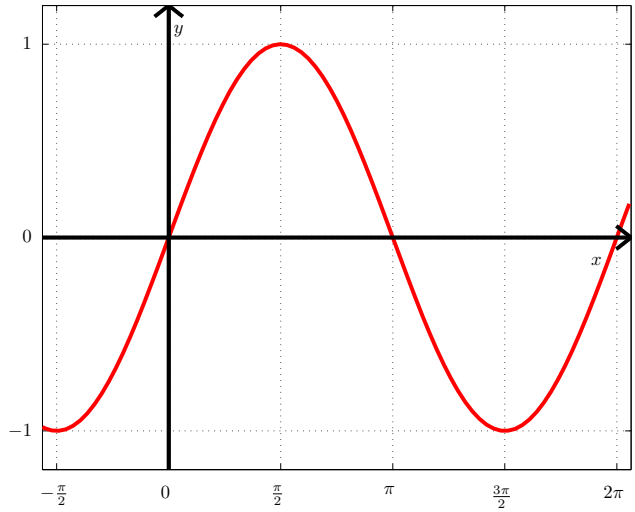


7. ábra. Szögfüggvények grafikus jelentése

1.6.1. Szinusz függvény

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [-1, 1]$.
- *Periodicitás:* A függvény 2π szerint periodikus. Ebből következően $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, ami $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ alakban is felírható, ahol $k \in \mathbb{N}$.
- *Folytonosság, monotonitás:* A szinusz függvény a teljes értelmezési tartományon folytonos. A függvény szigorúan monoton növekvő az $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, tehát az $\left[-\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right]$-n is. A függvény szigorúan monoton csökkenő az $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n, és ezáltal $\left[\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi\right]$-n is.
- *Paritás:* Páratlan függvény, azaz $\sin(-x) = -\sin x$.



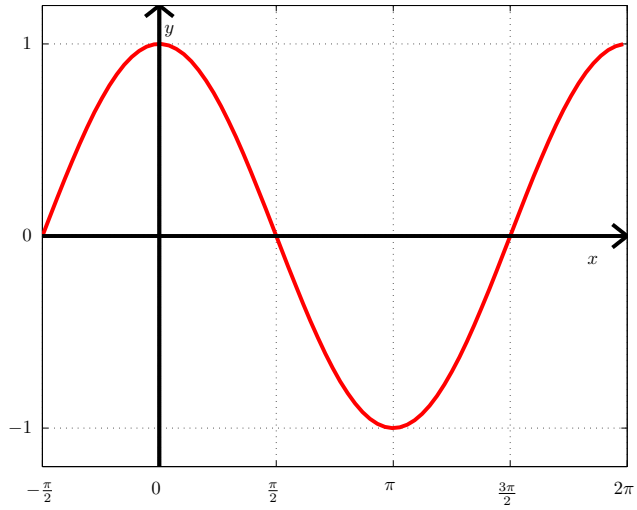
8. ábra. A szinusz függvény grafikonja

1.6.2. Koszinusz függvény

A $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ összefüggés alapján könnyen tárgyalható.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [-1, 1]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* A koszinusz függvény a teljes értelmezési tartományon folytonos. A függvény szigorúan monoton csökkenő az $[0 \pm 2k\pi, \pi \pm 2k\pi]$-n. A függvény szigorúan monoton növekvő az $[\pi \pm 2k\pi, 2\pi \pm 2k\pi]$-n.
- *Paritás:* Páros függvény, azaz $\cos(-x) = \cos x$.



9. ábra. A koszinusz függvény grafikonja

1.6.3. Tangens függvény

Definíció szerint:

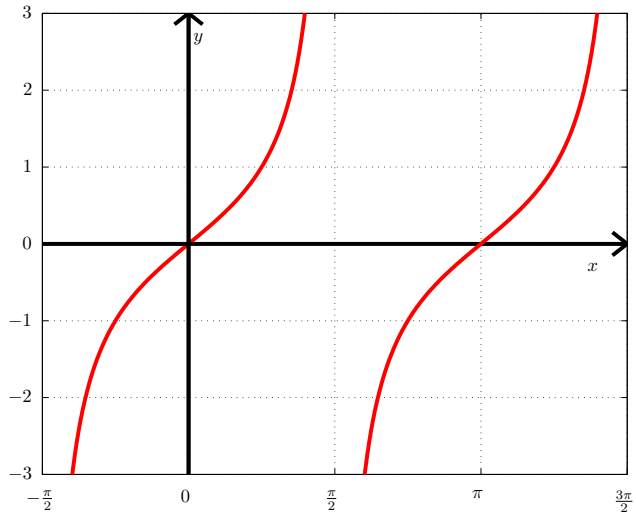
$$y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}$$

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = \mathbb{R}$.
- *Folytonosság, monotonitás:* A szakadási helyeken (azaz $x = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$) a bal oldali határérték $+\infty$, a jobb oldali határérték $-\infty$.
- *Periodicitás:* A tangens függvény π szerint periodikus, hiszen

$$\operatorname{tg}\,(x+\pi) = \frac{\sin\,(x+\pi)}{\cos\,(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$$

- *Paritás:* A tangens függvény páratlan.

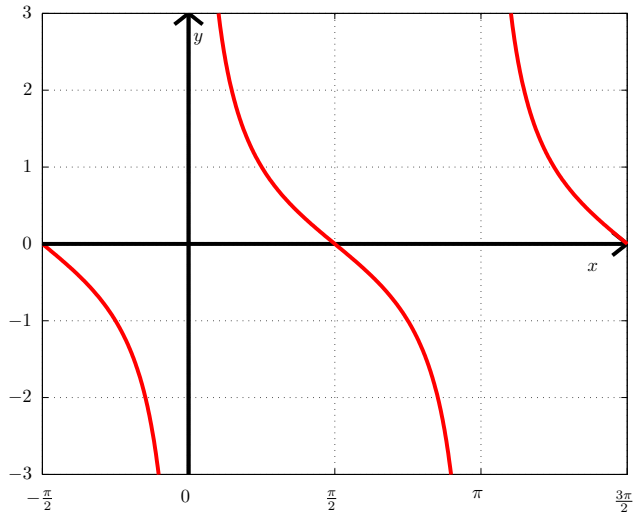


10. ábra. A tangens függvény grafikonja

1.6.4. Kotangens függvény

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\}$. Ezeken a helyeken a jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali határérték $-\infty$.
- *Értékkészlet:* $R_f = \mathbb{R}$.
- *Folytonosság, monotonitás:* A $]\pm k\pi, \pm(k+1)\pi[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, folytonos függvény. $(k \in \mathbb{Z})$
- *Periodicitás:* A kotangens függvény π szerint periodikus.
- *Paritás:* A kotangens függvény páratlan.



11. ábra. A kotangens függvény grafikonja

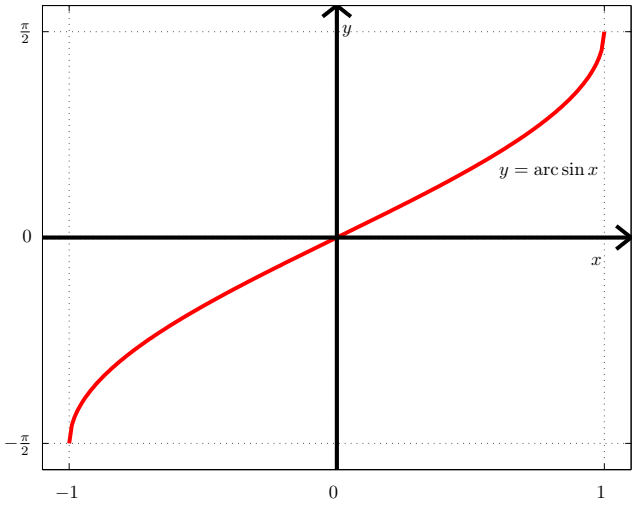
1.7. Trigonometrikus függvények inverzei

1.7.1. Az arkusz szinusz függvény

Az $y = \sin x$ függvény inverze. A $\sin x$ függvény a $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. Ennek inverze az $\arcsin x$ függvény, amit az $y = \arcsin x$ főágának, vagy főértékének szokás nevezni.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = [-1, 1]$.
- *Értékkészlet:* $R_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* A főágon túl az összes szigorúan monoton szakasz is invertálható, ezen inverzek összességét $y = \operatorname{Arc}\sin x$-szel jelöljük. Ennek bármelyik ága előállítható $\arcsin x$-szel.



12. ábra. Az arkusz szinusz függvény grafikonja

A fentiekből a teljes számegyenesre értelmezett $\operatorname{Arc}\sin x$ függvényre:

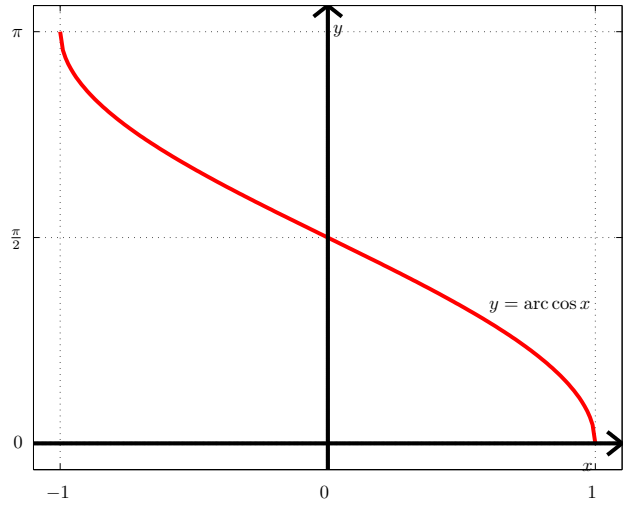
$$\operatorname{Arc}\sin x = \begin{cases} \arcsin x \pm 2k\pi & \text{a növekvő ágakra} \\ (\pi - \arcsin x) \pm 2k\pi & \text{a csökkenő ágakra} \end{cases}$$

1.7.2. Az arkusz koszinusz függvény

Az $y = \cos x$ függvény inverze. A $\cos x$ függvény a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. Ennek inverze az $\arccos x$ függvény, amit az $y = \arcsin x$ főágának, vagy főértékének szokás nevezni.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = [-1, 1]$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [0, \pi]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* A főágon túl az összes szigorúan monoton szakasz is invertálható, ezen inverzek összességét $y = \operatorname{Arc}\cos x$-szel jelöljük. Ennek bármelyik ága előállítható $\arccos x$-szel.



13. ábra. Az arkusz koszinusz függvény grafikonja

A fentiekből a teljes számegyenesre értelmezett $\operatorname{Arc}\cos x$ függvényre:

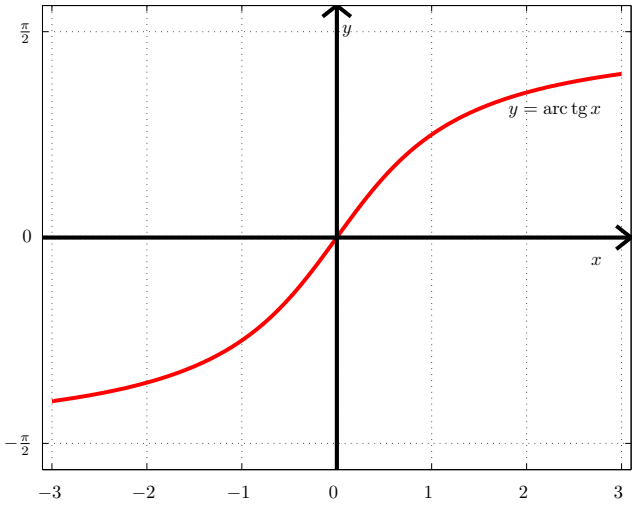
$$\operatorname{Arc}\cos x = \begin{cases} \arccos x \pm 2k\pi & \text{a csökkenő ágakra} \\ -\arccos x \pm 2k\pi & \text{a növekvő ágakra} \end{cases}$$

1.7.3. Az arkusz tangens függvény

A $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon szigorúan monoton ág inverze $\operatorname{arc\,tg} x$. Ez a főág vagy főérték. A többi ég is invertálható, ezek összessége: $\operatorname{Arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} x \pm k\pi$.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* Szigorúan mononton növekvő, folytonos függvény.
- *Határértékek:* $\lim\limits_{x\to+\infty} = \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{2}$, illetve $\lim\limits_{x\to-\infty} = \operatorname{arc\,tg} x = -\dfrac{\pi}{2}$.



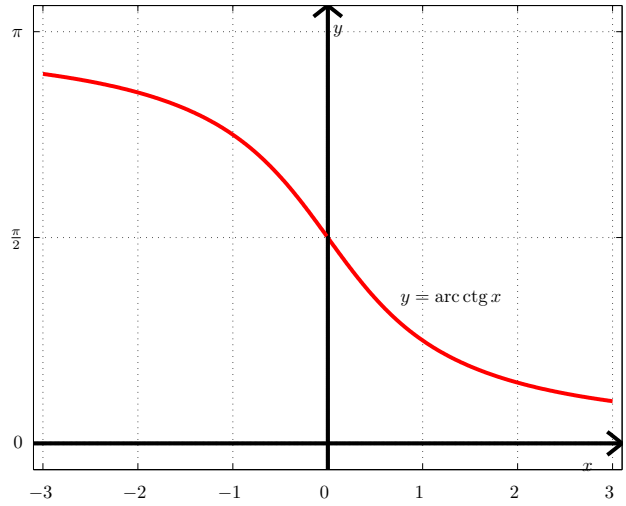
14. ábra. Az arkusz tangens függvény grafikonja

1.7.4. Az arkusz kotangens függvény

A $[0, \pi]$ intervallumon szigorúan monoton ág inverze $\operatorname{arc\,ctg} x$. Ez a főág v. főérték. A többi ég is invertálható, ezek összessége: $\operatorname{Arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,ctg} x \pm k\pi$.

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [0, \pi]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* Szigorúan monoton csökkenő, folytonos függvény.
- *Határértékek:* $\lim\limits_{x \to -\infty} = \operatorname{arc\,ctg} x = 0$, illetve $\lim\limits_{x \to +\infty} = \operatorname{arc\,ctg} x = \pi$.



15. ábra. Az arkusz kotangens függvény grafikonja

1.8. Hiperbolikus függvények

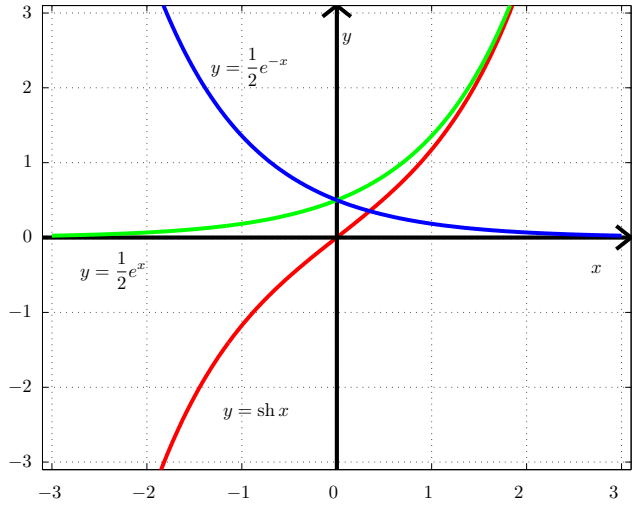
1.8.1. A szinusz hiperbolikusz függvény

Definíció szerint:

$$y = \operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = \mathbb{R}$.
- *Folytonosság, monotonitás:* Szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény.
- *Paritás:* $\operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$ miatt páratlan függvény.



16. ábra. A szinusz hiperbolikusz függvény grafikonja

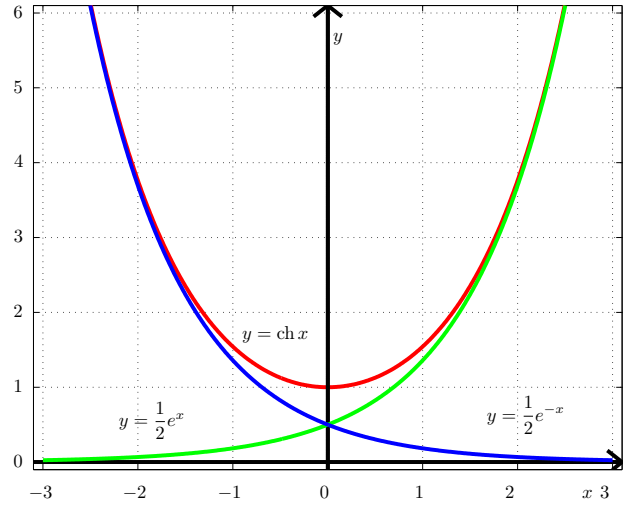
1.8.2. A koszinusz hiperbolikusz függvény

Definíció szerint:

$$y = \operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [1, +\infty)$.
- *Folytonosság, monotonitás:* Szigorúan monoton szakaszokból áll, folytonos függvény.
- *Paritás:* $\operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x$ miatt páros függvény.



17. ábra. A koszinusz hiperbolikusz függvény grafikonja

A sh és ch függvények nevezetes azonosságai

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

  Bizonyítás:

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{2x} + 2}{4} = 1$$

- $\operatorname{sh}(u \pm v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v \pm \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$
- $\operatorname{sh} 2u = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$
- $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
- $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$
- $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$

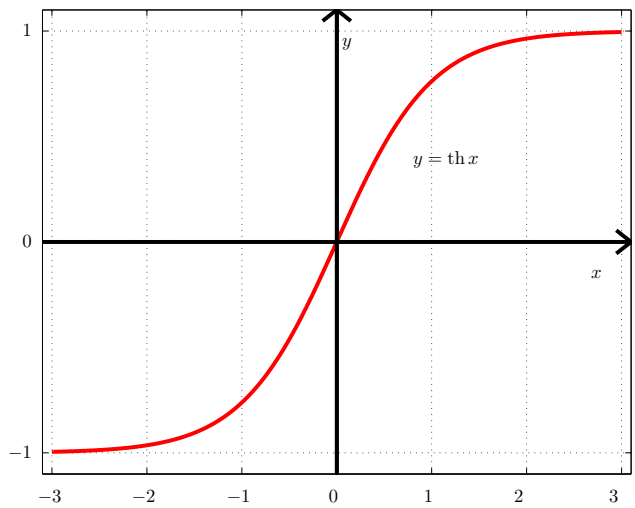
1.8.3. A tangens hiperbolikusz függvény

Definíció szerint:

$$\operatorname{th} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = [-1, 1]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* Szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény.
- *Paritás:* Páratlan függvény.
- *Határértékek:* $\lim\limits_{x \to -\infty} = \operatorname{th} x = -1$, illetve $\lim\limits_{x \to +\infty} = \operatorname{th} x = 1$.



18. ábra. A tangens hiperbolikusz függvény grafikonja

1.8.4. A kotangens hiperbolikusz függvény

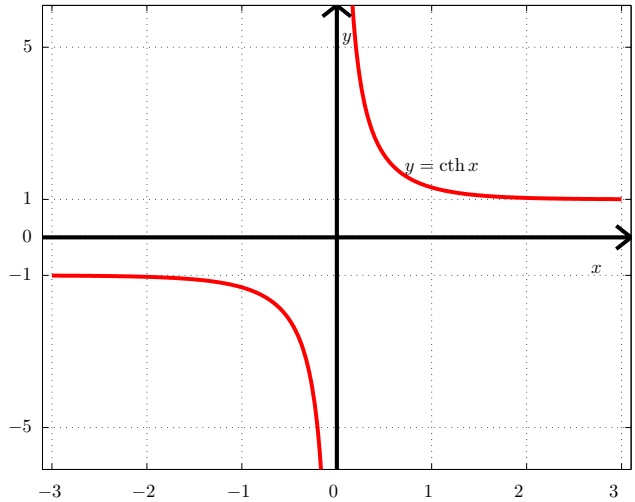
Definíció szerint:

$$\operatorname{cth} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Tulajdonságok:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- *Értékkészlet:* $R_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
- *Folytonosság, monotonitás:* Két szigorúan monoton csökkenő, folytonos szakaszból áll.
- *Paritás:* Páratlan függvény.

- *Határértékek:* $\lim\limits_{x\to-\infty} = \operatorname{cth} x = -1$, illetve $\lim\limits_{x\to+\infty} = \operatorname{cth} x = 1$. A 0-ban vett határérték: $\lim\limits_{x\to-0} = \operatorname{cth} x = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to+0} = \operatorname{cth} x = +\infty$.



19. ábra. A kotangens hiperbolikusz függvény grafikonja

1.9. Hiperbolikus függvények inverzei

1.9.1. Az area szinusz hiperbolikusz függvény

A szinusz hiperbolikusz függvény definíciójából indulunk ki.

$$\operatorname{sh} y = x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Innen átrendezzük, kifejezve az e^y-t:

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

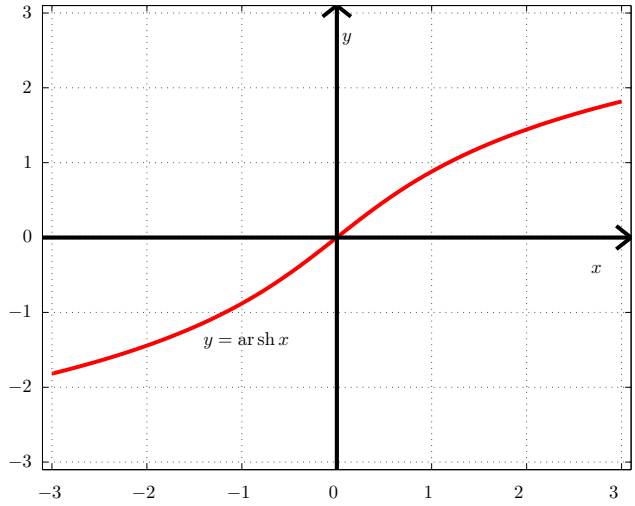
$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

A negatív előjel $x, y \in \mathbb{R}$ esetében nem jöhet szóba. Ennek figyelembe vételével vetejük mindkét oldal logaritmusát:

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

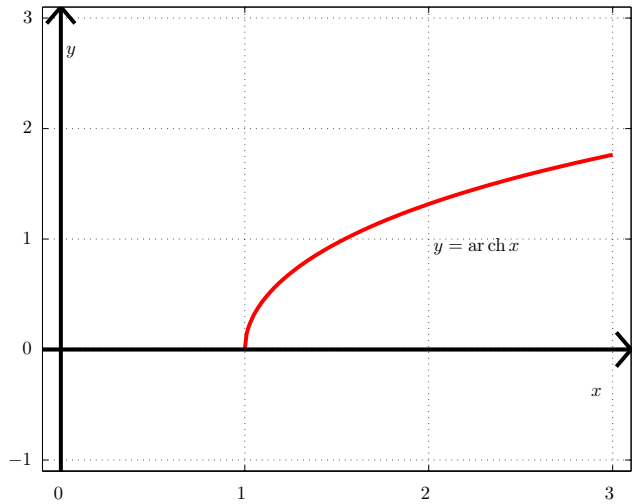
Innen az $\operatorname{ar\,sh} x$ függvény definíciója:

$$\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$



20. ábra. Az area szinusz hiperbolikusz függvény grafikonja

1.9.2. Az area koszinusz hiperbolikusz függvény



21. ábra. Az area koszinusz hiperbolikusz függvény grafikonja

1.9.3. Az area tangens hiperbolikusz függvény

A tangens hiperbolikusz definícója:

$$\operatorname{th} y = x$$

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$$

Innen e^y-t kifejezve:

$$e^y\,(1-x) = e^{-y}\,(1+x)$$

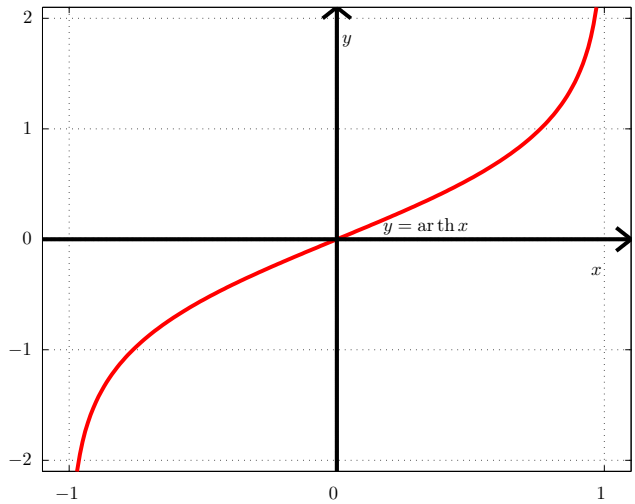
$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

Gyökvonás és logaritmus után:

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Ezek szerint a area tangens hiperbolikusz definíciója, figyelembe véve az area tangens értékkészletét (ami az inverz függvényének értelmezési tartománya lesz):

$$\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad , \text{ahol}\, x \in \,]-1,1[$$

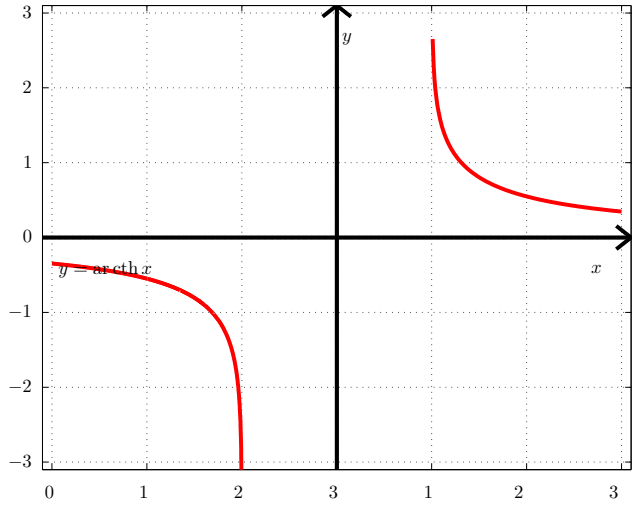


22. ábra. Az area tangens hiperbolikusz függvény grafikonja

1.9.4. Az area kotangens hiperbolikusz függvény

Az area kotangens hiperbolikusz definíciós összefüggése alakra ugyanaz, mint az $\operatorname{ar\,th} x$ függvényé, azzal a különbséggel, hogy más az értelmezési tartomány:

$$\operatorname{ar\,cth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad , \text{ahol}\, x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)\,.$$



23. ábra. Az area kotangens hiperbolikusz függvény grafikonja

2. Feladatok

2.1. Értelmezési tartomány

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát!

1) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

A négyzetgyök értelmezési tartománya miatt teljesülnie kell az alábbi feltételeknek:

$$1 + x \geq 0 \quad \text{és} \quad 1 - x \geq 0$$

Ezek átrendezésével:

$$-1 \leq x \quad \text{és} \quad x \leq 1$$

Innen az értelmezési tartomány: $D_f = [-1, 1]$.

2) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x}$

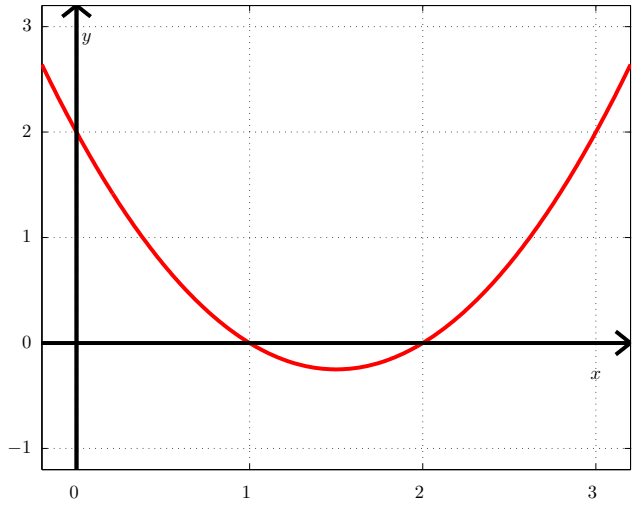
A tört nevezője nem lehet 0, ami azt jelenti, hogy $x \neq 0$ és $x \neq 3$. További megszorítás nincs, ezért az értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

3) $y = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$

A logaritmus miatt:

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

A bal oldal gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$. Ábrázolva a függvényt:



24. ábra. Az area kotangens hiperbolikusz függvény grafikonja

Leolvasható, hogy $D_f = (-\infty, 1[\ \cup\ ]2, \infty)$

4) $y = \sqrt{\ln \dfrac{5x - x^2}{4}}$

A gyökjel alatti kifejezés nemnegatív kell, hogy legyen:

$$\frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \Longrightarrow -x^2 + 5x - 4 \geq 0$$

A bal oldal gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$, vagyis az előbbi egyenlőtlenség $1 \leq x \leq 4$ esetén teljesül. Vagyis ez épp az értelmezési tartomány $D_f = [1, 4]$.

5) $y = \arcsin \dfrac{3 - 2x}{5}$

Az arkusz szinusz értékkészlete miatt:

$$-1 \leq \frac{3 - 2x}{5} \leq 1$$

Innen átrendezéssel:

$$-5 \leq 3 - 2x \leq 5$$

$$-8 \leq -2x \leq 2$$

$$4 \geq x \geq -1$$

Az értelmezési tartomány tehát: $D_f = [-1, 4]$.

6) $y = 2\text{arc}\cos\sqrt{9-x^2}$

Egyrészt a négyzetgyök értelmezési tartománya miatt:

$$9 - x^2 \geq 0\,,$$

vagyis $3 \geq x \geq -3$.

Másrészt az arkusz koszinusz értelmezési tartománya miatt:

$$9 - x^2 \leq 1$$

$$x^2 \geq 8$$

Ez alapján $x \geq \sqrt{8}$ vagy $-\sqrt{8} \leq x$ kell, hogy teljesüljön.

A két feltétel összevetéséből az értelmezési tartomány:

$D_f = \left[-3, -\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8}, 3\right]$.

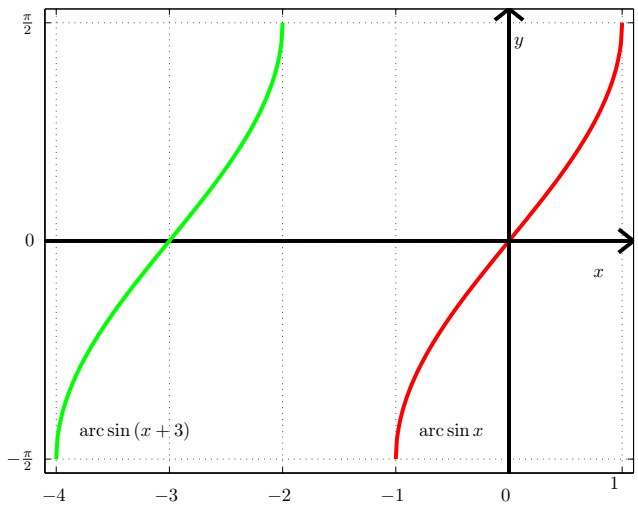
2.2. Értékkészlet

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és ábrázoljuk a függvényt!

1) $y = \arcsin(x+3)$

Értelmezési tartomány: az arkusz szinusz argumentuma -1 és 1 közé kell, hogy essen. Emiatt $-1 \leq x+3 \leq 1 \Longrightarrow -4 \leq x \leq -2$. Vagyis $D_f = [-4, -2]$.

Értékkészlet: nincs külső transzformáció, ezért $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

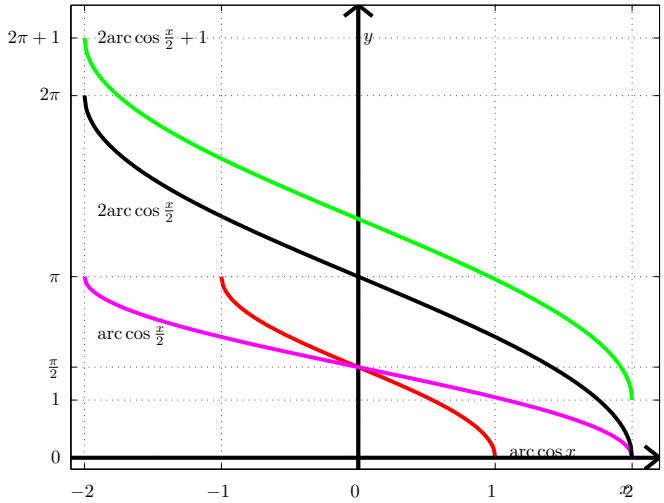


25. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

2) $y = 2\arccos\frac{x}{2} + 1$

Értelmezési tartomány: az arkusz koszinusz argumentuma -1 és 1 közé kell, hogy essen. Emiatt $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Vagyis $D_f = [-2, 2]$.

Értékkészlet: a külső transzformáció miatt $R_f = [1, 2\pi + 1]$.

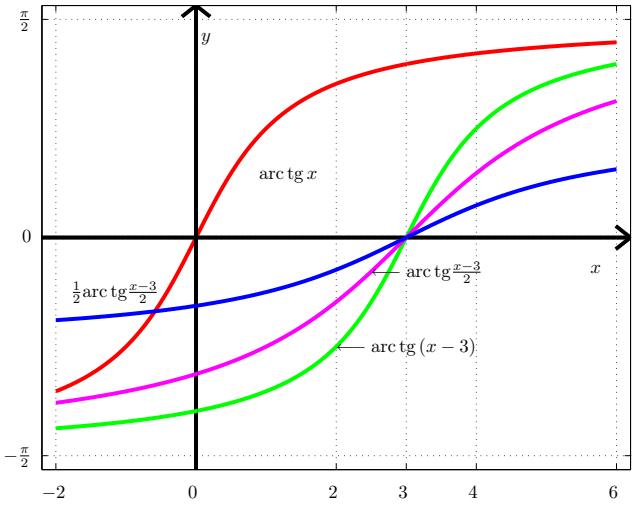


26. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

3) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-3}{2}$

Értelmezési tartomány: Az arkusz tangens értelmezési tartományát nem szűkíti le ez a belső transzformáció, ezért $D_f = \mathbb{R}$.

Értékkészlet: a külső transzformáció miatt $R_f = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

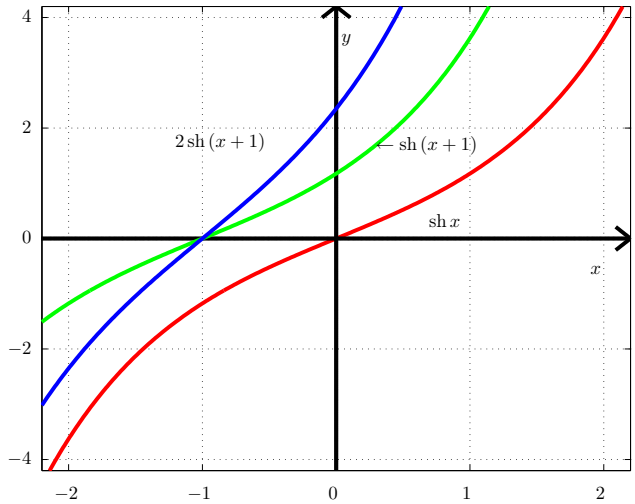


27. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

4) $y = 2\mathrm{sh}\,(x+1)$

Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}$.



28. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

2.3. Paritás

Állapítsuk meg az alábbi függvényekről, hogy párosak, vagy páratlanok, vagy nincs értelme a paritásnak!

1) $y = x^3 + x$
   Páratlan függvény, hiszen két páratlan függvény összege.

2) $y = x^4 - x^2$
   Páros függvény, hiszen két páros függvény különbsége.

3) $y = 3x^2 - \dfrac{2x^2}{x^6 + 1}$

   Páros függvény, hiszen páros függvényekből áll elő. (Figyelem, $y = 1$ függvény is páros!)

4) $y = \sin x - x^6$
   Nincs paritása, hiszen egy páros és egy páratlan függvény különbsége.

5) $y = x^3 \cos x$
   Páratlan függvény; páros és páratlan függvény szorzata páratlan. Legyen ugyanis $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ a szorzatfüggvény, és $f(x)$ páros, $g(x)$ páratlan függvények. Ekkor:

$$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x) \cdot g(x) = -h(x),$$

   vagyis a $h(x)$ függvény tényleg páratlan.

6) $y = \dfrac{x^2 + x^6}{3x}$

   Páratlan függvény, mert páros és páratlan függvények hányadosa.

7) $y = \dfrac{\sin 5x}{6x}$

   Páros függvény, mert két páratlan függvény hányadosa.

8) $y = x^2 \sin^2 x$
   Páros függvény, mert páros függvények szorzata.

2.4. Inverz függvény

Képezzük a következő függvények inverzeit:

1) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$
Átrendezés után:
$x = \sqrt[3]{y^2+1} \Longrightarrow x^3 = y^2+1 \Longrightarrow y^2 = x^3-1 \Longrightarrow y = \sqrt{x^3-1}$
Az inverz függvény: $y = \sqrt{x^3-1}$.

2) $y = \ln\sqrt{2x+5}$
$x = \ln\sqrt{2y+5} \Longrightarrow e^x = \sqrt{2y+5} \Longrightarrow e^{2x} = 2y+5 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\left(e^{2x-5}\right)$
Az inverz függvény:
$y = \frac{1}{2}\left(e^{2x-5}\right)$

3) $y = \sqrt[3]{1+e^{4x}}$
$x = \sqrt[3]{1+e^{4y}} \Longrightarrow x^3-1 = e^{4y} \Longrightarrow \ln\left(x^3-1\right) = 4y$
Az inverz függvény: $y = \dfrac{1}{4}\ln\left(x^3-1\right)$.

4) $y = \dfrac{x-5}{6x}$

$x = \dfrac{y-5}{6y} \Longrightarrow 6xy = y-5 \Longrightarrow y\left(6x-1\right) = -5$

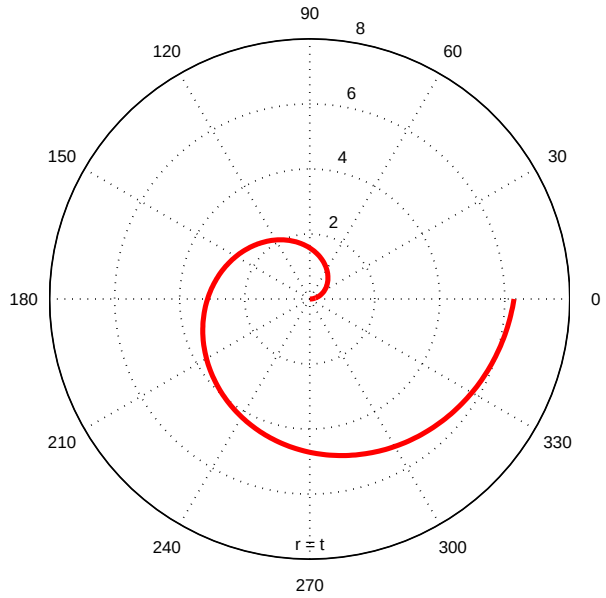
Az inverz függvény: $y = \dfrac{5}{1-6x}$.

5) $y = 5^{2x+3}-6$
$x = 5^{2y+3}-6 \Longrightarrow x+6 = 5^{2y+5} \Longrightarrow \log_5\left(x+6\right) = 2y+3$
Az inverz függvény: $y = \dfrac{1}{2}\left[\log_5\left(x+6\right)-3\right]$

2.5. Polárkoordinátás ábrázolás

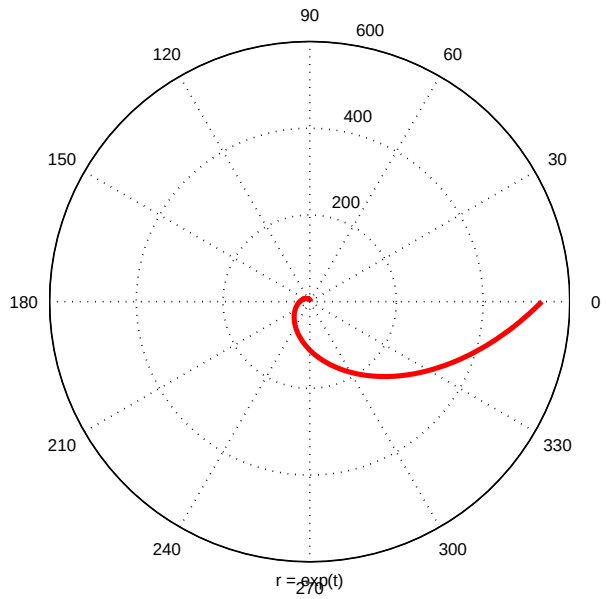
Ábrázoljuk polárkoordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

1) $r\left(\varphi\right) = a \cdot \varphi$



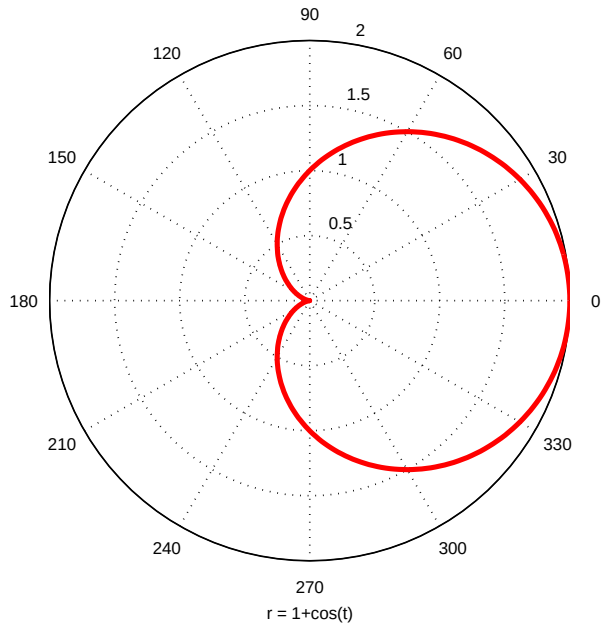
29. ábra. Archimédeszi spirál

2) $r(\varphi) = e^{\varphi}$



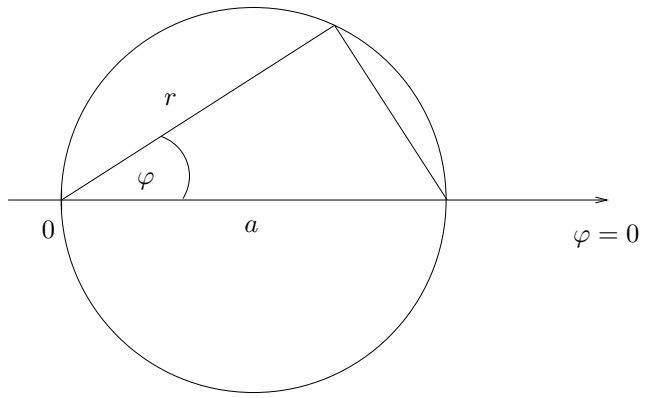
30. ábra. Logaritmikus spirál

3) $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$



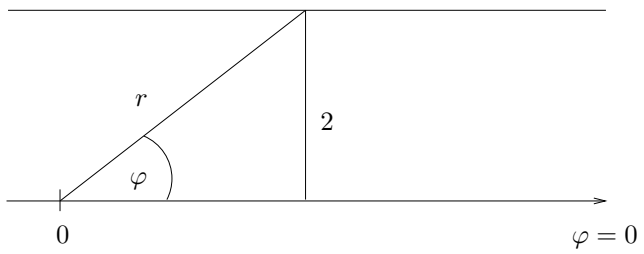
31. ábra. Kardioid

4) $r(\varphi) = a \cdot \cos\varphi$



32. ábra. Az $r = \frac{a}{2}$ sugarú kör ábrázolása polárdiagramon

5) Írjuk fel a polártengellyel párhuzamos, és tőle 2 egységre haladó egyenes egyenletét polárkoordinátás megadásban:



33. ábra. A polártengelytől 2 egységre lévő egyenes

Az ábráról látható, hogy $\frac{2}{r} = \sin\varphi$, ahonnan átrendezéssel az egyenes egyenlete: $r = \frac{2}{\sin\varphi}$.

6) A derékszögű koordináta-rendszer és a polár koordináta-rendszer közötti kapcsolat segítségével írjuk fel az archimédeszi spirális és a logaritmikus spirális paraméteres egyenletrendszerét!

- Archimédeszi spirális: polárkoordinátákban $r = a\varphi$. Ebből a megoldás:

$$\begin{aligned} x &= a\varphi\cos\varphi \\ y &= a\varphi\sin\varphi \end{aligned}$$

- Logaritmikus spirális: polárkoordinátákban $r = e^{\varphi}$. Innen:

$$\begin{aligned} x &= e^{\varphi}\cos\varphi \\ y &= e^{\varphi}\sin\varphi \end{aligned}$$

2.6. Implicit függvénymegadás

1) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + 4 = 0$
Az x-et és y-t tartalmazó tagokat teljes négyzetté alakítjuk. Innen:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 16,$$

ami egy $(2, -4)$ középpontú, $r = 4$ sugarú kör egyenlete.

2) $x^2 + 9y^2 - 16y = 0$
Hasonlóan járunk el, mint a kör esetében. Az átalakítás után:

$$x^2 + 9\,(y-1)^2 = 9$$

Mindkét oldalt 9-cel elosztva egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

Az ellipszis középpontja $(0, 1)$, a két fél nagytengelye $a = 3$ és $b = 1$ hosszúságú.

3) $9x^2 - 4y^2 = 36$
Átalakítás után:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Ez egy hiperbola egyenlete.

2.7. Paraméteres függvénymegadás

1) $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

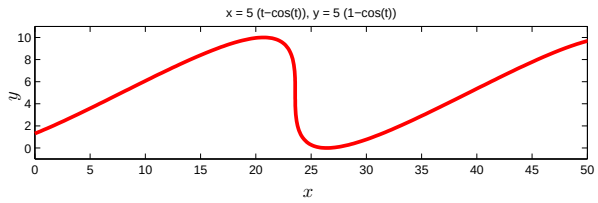
Látható $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ alapján, hogy ezzel ekvivalens:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

ami egy origó középpontú, $a = 5$ és $b = 9$ fél nagytengelyekkel rendelkező ellipszis egyenlete.

2) $\begin{cases} x = 5\,(t - \sin t) \\ y = 5\,(1 - \cos t) \end{cases}$

Ez egy ciklois, vagyis egy olyan görbe, amit egy $r = 5$ sugarú kör kerületi pontja ír le, miközben a kör gördül az x tengelyen.



34. ábra. Ciklois görbe

3) $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 5 \end{cases}$

Fejezzük ki a t-t x-szel; az első egyenletből:

$$t = \frac{x + 1}{3}$$

Ezt a második egyenletbe visszahelyettesítve:

$$y = 5 - \frac{x+1}{3} = \frac{15 - x - 1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3},$$

ami egy egyenes egyenlete, $m = -\frac{1}{3}$ meredekséggel, és $b = \frac{14}{3}$ tengelymetszettel.

2.8. Függvényhatárértékek

A következő példákban a függvények határértékeinek meghatározásának leggyakoribb módszereit mutatjuk be egy-egy példával.

1) A számláló és nevező szorzattá alakítása után:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}$$

2) A számlálóban eliminájuk a négyzetgyököt, ezután könnyen adódik a határérték:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}$$

3) Szorzattá alakítás és egyszerűsítés után:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8}{6} \frac{x^3-\frac{1}{8}}{x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}} = \frac{8}{6} \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} =$$
$$= \frac{8}{6} \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{3}} = \frac{8}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{8}{6} \cdot \frac{\frac{8}{4}}{\frac{3-2}{6}} = \frac{8}{6} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}} = 6$$

4) $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértékre visszavezethető a tört bővítésével:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5$$

5) Szintén $\frac{\sin x}{x}$ alakra vezet, ha felhasználjuk a tangens definícióját:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

6) A tangens definícióját felhasználva három egyszerűbb határérték szorzatára bomlik fel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{(\cos x)\,x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}\overset{*}{=}1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

A *-gal jelölt egyenlőség bizonyítása:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

7) Racionális törtfüggvény határértéke $x\to\infty$-ban:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-5x^2}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}-5}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{5}{3}$$

8) Két szögfüggvény különbségére vonatkozó nevezetes azonosság segítségével két $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértéket kapunk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{6x+3x}{2}\sin\frac{6x-3x}{2}}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{3x}{2}\frac{21}{4}}{\frac{7x}{2}\frac{3x}{2}}=-\frac{21}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=-\frac{21}{2}$$

9) A $\cos x$-et $\frac{x}{2}$ argumentumú szögfüggvényekkel felírva egyszerűsíthető a tört:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=3\sqrt{2}$$

10) Helyettesítéses határérték:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x\overset{*}{=}$$

A helyettesítés képlete: $-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{u}$, amiből átrendezéssel: $x=2u-1$. Ezzel a határérték:

$$\overset{*}{=}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2u-1}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^{-2}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot 1=\frac{1}{e^2}$$

11) Rendőr-elv alkalmazása:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}$$

A gyökjel alatti mennyiséget alulról és felülről becsüljük, felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}=e$, kapjuk:

$$\sqrt[x]{2}<\sqrt[x]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}<\sqrt[x]{3}$$

Itt $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{3}=1$, ezért az eredeti függvényre is $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$.

12) Helyettesítéses határérték:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2+3}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}2^x\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)^x$$

A helyettesítés: $\dfrac{1}{u}=\dfrac{\frac{3}{2}}{x-1}$, vagyis $x=\dfrac{3}{2}u+1$. Ezzel a zárójelben lévő kifejezés határértéke:

$$\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{u}\right)=e^{\frac{3}{2}}$$

De $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=+\infty$, tehát $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x=+\infty$.

13) A tangens definíciója, és a szögfüggvények transzformációjával:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\sin x=1$$

14) Racionális törtfüggvény határértéke esetében a nevező legnagyobb fokszámú tagjával egyszerűsítünk:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+2}{8x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{8}$$

15) $\frac{\sin x}{x}$ típusú határértéket kapunk, ha bővítünk $5x$-szel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\frac{5x}{\operatorname{tg}5x}=\frac{8}{5}$$

2.9. Függvényábrázolás

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

1) Racionális törtfüggvény:

$$y = \frac{3x}{2-x}$$

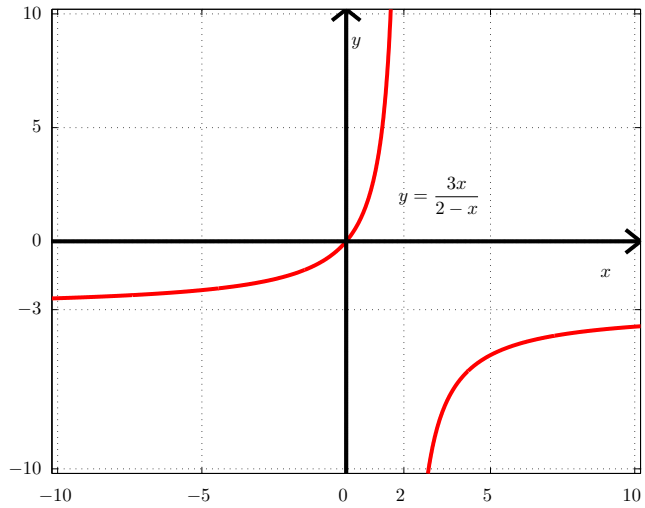
Rögtön látható, hogy az $x = 2$ egyenes aszimptota. Ezen túl érdemes megvizsgálni a függvény határértékeit, ezek segítik a törtfüggvény ábrázolását.

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{3x}{2-x} = -3$$

$$\lim_{x\to 2-} = \frac{3x}{2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2+} = \frac{3x}{2-x} = -\infty$$

A függvény grafikonja tehát:

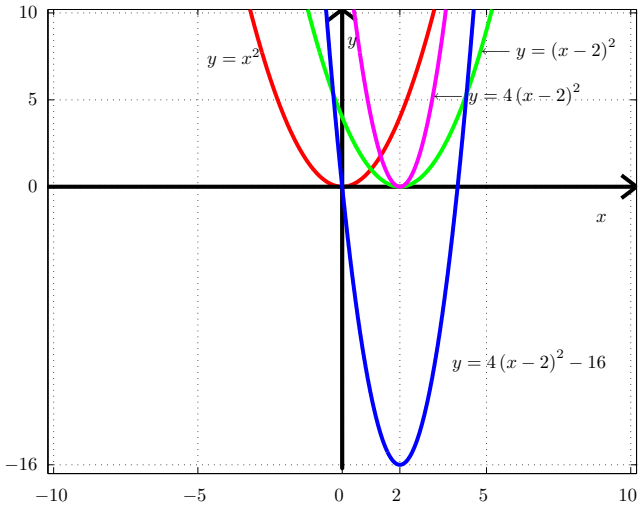


35. ábra. Transzformált reciprokfüggvény grafikonja

2) Teljes négyzetté alakítás:

$$y = 4x^2 - 8x = 4\left(x^2 - 4x + 4\right) = 4\left[(x-2)^2 - 4\right] = 4(x-2)^2 - 16$$

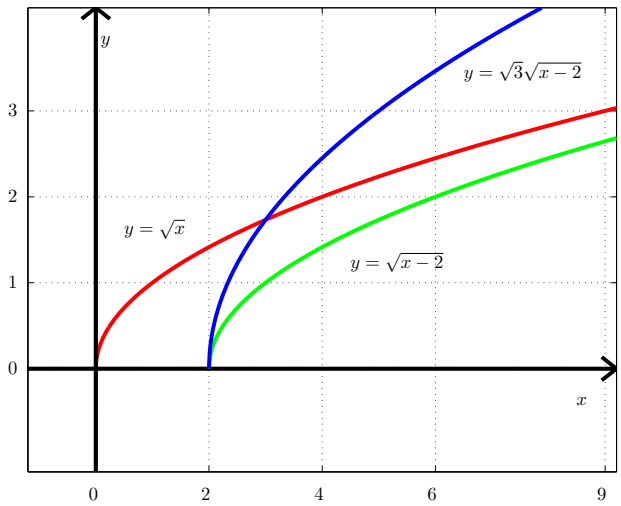
A függvény grafikonját az $y = x^2$ függvényből kiindulva transzformációkkal képezzük:



36. ábra. Másodfokú függvény transzformációja

3) Négyzetgyököt tartalmazó függvény:

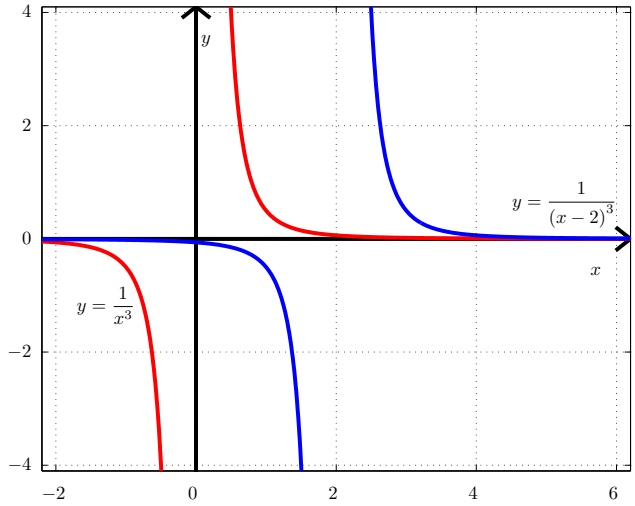
$$y = \sqrt{3x-6} = \sqrt{3}\sqrt{x-2}$$



37. ábra. Gyök függvény transzformációja

4) Reciprok függvény

$$y = \frac{1}{(x-2)^3}$$



38. ábra. Törtfüggvény transzformációval