Sztochasztikus rendszerek matematikája 7. gyakorlat, 2016. december 6. és 8.

1. Tekintsük az $\{1, 2, 3\}$ állapottéren a
$$\Pi := \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
átmeneti mátrixszal adott Markov-láncot. Mennyi lesz $P(X_2 = 2|X_0 = 3)$? Mi lesz X_2 eloszlása, ha X_0 eloszlása $(1/2, 1/4, 1/4)$?

2. Egy 3 állapotú ML átmeneti mátrixa az alábbi módon adott:
$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$
Ez a rendszer stabil (miért ?). Számítsuk ki a határeloszlást (mely egyben az egyetlen stacionárius eloszlás is) ! Ha a rendszer állapottere $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$, akkor az egyensúlyi állapotban (azaz amikor minden t-re X_t eloszlása q_∞) mennyi lesz EX_t ?

3. Bergengóciában a kaszinóban a következő játék játszható: ha több mint 0 Ft-unk van, akkor p eséllyel nyerünk 1 forintot, $(1 - p)$ eséllyel veszítünk 1 forintot. Ha 0 Ft-unk van, akkor $(1 - p)$ valószínűséggel nem változik a pénzünk, p eséllyel viszont nyerünk 1 forintot. Legyen X_t a pénzem alakulását leíró ML. Mely p értékekre lesz ez stabil? Mi a határeloszlás? Mennyi a pénzem várható értéke a stacionárius állapotban?

4. Egy autómosóban 0.5 valószínűséggel 1 autót mosnak le egy perc alatt, 0.5 valószínűséggel egyet sem. 0.4 valószínűséggel érkezik egy új autó az adott percben, 0.6 valószínűséggel egy sem érkezik. Stacionárius eloszlást feltételezve (és tetszőleges sorhosszat megengedve) mennyi az esélye annak, hogy éppen i autó áll a sorban ? Mennyi a sorhossz átlagos értéke és a késleltetés?

5. Nagyesze professzor minden percben 0.5 valószínűséggel ír be egy jegyet az indexbe (ha van erre igény), 0.5 valószínűséggel pedig a titkárnőjének udvarol. Minden percben 0.45 valószínűséggel hozza egy diák az indexét, 0.55 valószínűséggel senki sem jön. Írjuk fel a professzor szobája előtt tekergő sor hosszát leíró ML átmenetmátrixát! Mi a stacionárius eloszlás ? Egyensúlyi állapotban mennyi a sor átlagos hossza? Mi a valószínűsége annak, hogy több mint 3 diák áll sorban? Mennyit kell egy diáknak átlagosan várnia, hogy beírják a jegyét?

6. Egy postára egy N_t Poisson folyamat szerint érkeznek az emberek, percenként átlagosan 3-an.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a következő 2 percben pontosan egy ember érkezik? És annak, hogy 10:00 és 10:02 között több mint 2 ember érkezik?

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy a következő ember több mint 3, de kevesebb mint 6 perc múlva jön?

   c) $E(N_2)$=? $D(N_2)$=?

7. Rudolf, a rénszarvas át akar kelni egy úton, ahol az autók érkezése percenkénti $\lambda = 4$ intenzitású Poisson folyamattal reprezentálható. Mivel Rudolf olyan öreg, mint maga a Mikulás, a szeme és a füle is rossz, így a forgalomtól függetlenül, véletlenszerűen rohan át az úton.

   a) Tegyük fel, hogy 10 másodperc alatt ér át az úton. Mekkora valószínűséggel ütik el, tehát mekkora valószínűséggel érkezik autó ezen 10 másodperc alatt?

   b) Tegyük fel, hogy Rudolf azért még elég ügyes ahhoz, hogy egyetlen autót kikerüljön, de ha a kritikus 10 másodpercben érkezik még egy autó, akkor már tényleg elütik. Mekkora valószínűséggel fogja megúszni a kalandot?

   c) Válaszoljunk az a) és b) pont kérdéseire, ha csak 30 másodperc alatt tud átvánszorogni az úton.

   d) Most ment el egy autó. Várhatóan hány másodperc múlva jön a következő?

   e) Most ment el egy autó. Mi az esélye annak, hogy a következő autó több mint 30 másodperc múlva érkezik?

   f) Most ment el egy autó. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő 2 percben 5 autó érkezik? És annak, hogy a következő két percben 5 autó és az azt követő három percben 4 autó érkezik?

   g) Most ment el egy autó. Mi a valószínűsége annak, hogy 2 percen belül 5 autó és 3 percen belül 7 autó érkezik?

   h) Válaszoljunk a d)-g) kérdésekre, ha az utolsó autó 1 perce ment el, illetve ha nem láttuk, hogy mikor ment el az utolsó autó!

8. Egy hajóbarométer három állapotban lehet: eső, napsütés és változó idő. Ezekben az állapotokban átlagosan 6, 10 ill. 8 napig tartózkodik. Eső vagy napos idő után mindig változó lesz, változó idő esetén egyforma valószínűséggel lesz eső vagy napsütés. Írjuk fel a folyamat rátamátrixát! Stabil-e ez a folytonos idejű Markov-lánc és miért? Mi a stacionárius eloszlása?

9. Számítsuk ki az alábbi rátamátrixszal adott folytonos idejű ML stacionárius eloszlását.

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Egy hajó három kikötőben szokott horgonyozni: Marseille, Lisszabon és Nápoly. Átlagosan 3, 5 ill. 4 hónapig tartózkodik ezeken a helyeken (ehhez képest a kikötők közti utazás gyors, ezért azt elhanyagoljuk). Marseille-ből mindig Nápolyba utazik, Nápolyból egyforma valószínűséggel a másik két városba, Lisszabonból kétszer olyan valószínű, hogy Marseille-be megy mint hogy Nápolyba. Írjuk fel a folyamat rátamátrixát ! Stabil-e ez a folytonos idejű Markov-lánc és miért? Mi a stacionárius eloszlása? Már hosszú ideje közlekedik a hajó a három város között. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon Lisszabonban van, ha tudjuk, hogy a három város valamelyikében van?