Sztochasztikus rendszerek matematikája gyakorlat, 2016. november 22. és 24.

1. Számítsuk ki az alábbi másodrendű (kauzális) mozgóátlag-folyamat kovarianciafüggvényét:
$$X_t = 2\varepsilon_t - 5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2},\ t \in \mathbb{Z},$$
ahol ε_t fehérzaj, $D^2(\varepsilon_t) = 2$.

2. Legyen $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ stacionárius autoregresszív folyamat, ahol $E\varepsilon_t = 3$, $D^2\varepsilon_t = 1$ és ε_t független sorozat. Számoljuk ki D^2X_t-t és EX_t-t.

3. Legyenek A, B független valószínűségi változók, 0 várható értékkel és egységnyi szórásnégyzettel! Lássuk be, hogy bármely $\theta \in \mathbb{R}$ esetén
$$Z_t = A\sin(\theta t) + B\cos(\theta t),\ t \in \mathbb{Z}$$
gyengén stacionárius folyamat, és számítsuk ki a kovarianciafüggvényét is!

4. Tekintsük az alábbi ARMA(1,1) folyamatot:
$$X_t - aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1},\ t \in \mathbb{Z}.$$
Tegyük fel, hogy $|a| < 1$ és $a \neq -b$. Ekkor létezik X_t-nek kauzális végtelen mozgóátlag-előállítása ε_t-ből. Adjuk meg ezt az előállítást! Ha $|b| < 1$, akkor a folyamat invertálható is. Írjuk fel ε_t előállítását X_t-ből.

5. Adjuk meg az alábbi ARMA folyamat kauzális mozgóátlag-előállítását (ha van neki). Stabil, illetve invertálható-e a folyamat?
$$X_t - \frac{3}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} = \varepsilon_t - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-1}.$$

6. Tekintsük az
$$X_t = \frac{1}{m+1}X_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$$
stacionárius autoregresszív folyamatot, ahol ε_t iid (azaz független, azonos eloszlású) 0 várható értékű és 4 szórásnégyzetű sorozat, m pedig tetszőleges pozitív egész. Legyen W_t egy másik iid sorozat, 0 várható értékkel és 9 szórásnégyzettel. Tegyük fel, hogy a W_t sorozat független ε_t sorozattól (ebből következőleg X_t-től is). Adjuk meg a $Z_t := X_t + W_t$ sorozat γ_Z kovarianciafüggvényét. Számoljuk ki az
$$U_t = Z_t - \frac{1}{m+1}Z_{t-1}$$
folyamat γ_U kovarianciafüggvényét is. Ezek után próbáljuk meg kitalálni, milyen típusú folyamat az U !