

7-8-9. előadás - Idősorelemzés.

2016. október 15., 17. és 24.

- sokasági szemlélet: elméleti idősor - valószínűségi változók egy indexelt $\{Y_t, t \in T\}$ családja, avagy időtől függő véletlen mennyiség, azaz egy *sztochasztikus folyamat*.
Pl.: napi záróárfolyamok a tőzsdén, éves gabonatermés, stb.
 T az időpontok halmaza, ami lehet diszkrét vagy folytonos.
- minta szemlélet: empirikus idősor
- egyváltozós idősor: skalárértékű valószínűségi változóból származik
- többváltozós idősor: vektorértékű valószínűségi változóból származik

Két nagy csoport: időtartománybeli- és a frekvenciatartománybeli elemzések.

- Determinisztikus elemzés: az idősort alakító tényezők teljeskörűen számbavehetőek, ezáltal az idősor alakulása időben tökéletes pontossággal felírható. A véletlen csak a gyakorlatban játszik szerepet. De a véletlen szerepe itt véget is ér, a későbbi időpontokra ennek már nincs hatása.

⇒ dekompozíciós modellek: különböző, eltérő tartalmú komponensekre bontott idősor, additív vagy multiplikatív formában felépítve. Pl.: additív esetben

$$Y_t = R_t + C_t + S_t + u_t,$$

ahol R , C és S a trend, a ciklikus és a periodikus komponens, u pedig a véletlen folyamat.

- Sztochasztikus elemzés: a véletlen eltérés később is hatással van az idősor alakulására, azaz folyamatépítő szerepe van.

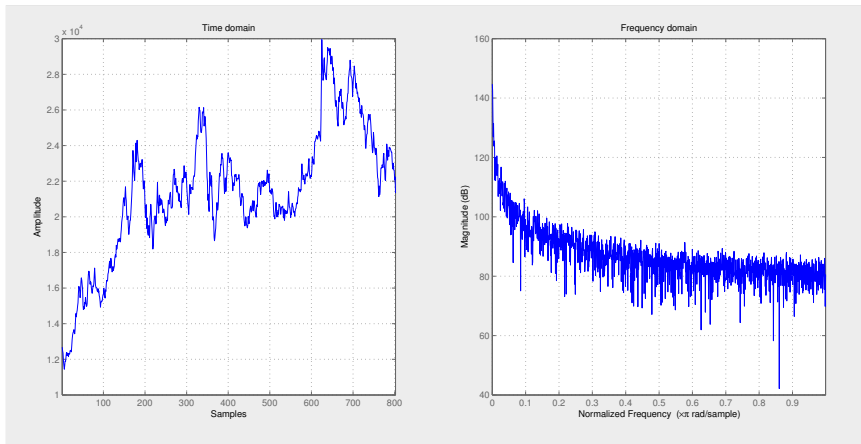


Figure : Időtartomány vs. frekvencia-tartomány, MOL adatok

Példa: legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és

$$Y_t^D = \alpha t + u_t$$

$$Y_t^S = \alpha + Y_{t-1}^S + u_t, \quad Y_0^S = 0$$

ahol $u \sim N(0, \sigma)$. Ekkor

$$E(Y_t^D) = \alpha t \quad \text{és} \quad E(Y_t^S) = \alpha t$$

$$D^2(Y_t^D) = \sigma^2 \quad \text{és} \quad D^2(Y_t^S) = t\sigma^2$$

tehát a két idősor várható értékben ugyan azonos, de míg Y_t^D szórása állandó, addig Y_t^S szórása időben változó (azaz beépülnek a 'sokkok' az idősorba).

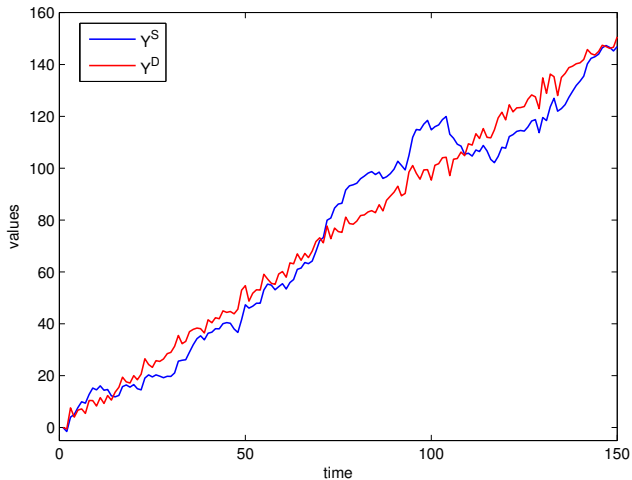


Figure : Determinisztikus és sztochasztikus trend

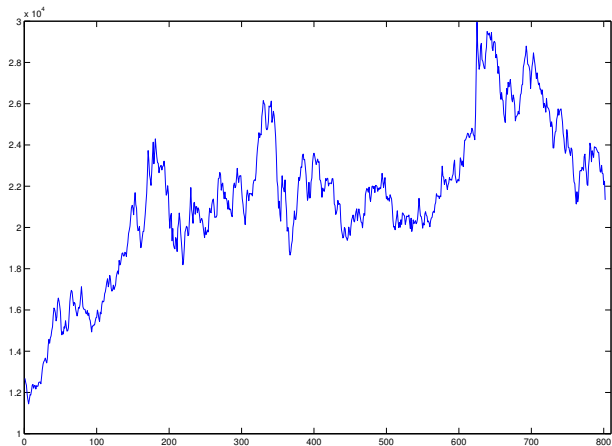


Figure : MOL napi záróárfolyamok 2005 és 2008 között

- Az idősorelemzés legalapvetőbb fogalma - lényegében egy megkötést jelent az idősor valószínűségi struktúrájára nézve az idősor statisztikai kezelhetőségének érdekében.
- Cél: adott minta alapján az ismeretlen határeloszlás rekonstruálása, azaz az egyes időpontokhoz tartozó valószínűségi változók együttes eloszlását kellene megadnunk.
- Lehetetlen feladat a gyakorlatban, hiszen csak egyetlen mintánk van! Ezért megkötéseket teszünk az együttes eloszlásra a kezelhetőség érdekében.

⇒ STACIONARITÁS FOGALMA

Definíció

Az (Y_t) idősor erős értelemben stacionárius, ha minden véges dimenziós vetületének együttes eloszlása eltolásinvariáns. Azaz $\forall k \geq 1$ esetén $\forall t_1, \dots, t_k$ indexhalmazra $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ és $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_k+h})$ eloszlása megegyezik bármely $h \in \mathbb{R}$ esetén.

Túl sokat követel, a gyakorlatban ellenőrizhetetlen ez a feltétel, így gyengítünk rajta.

Definíció

Az (Y_t) idősor gyenge értelemben stacionárius, ha első- és második momentuma eltolásinvariáns, azaz $EY_t = m$ minden t esetén, és $\gamma(t, s) = \text{Cov}(Y_t, Y_s) = \gamma(t - s)$ bármely t, s pár esetén.

Nyilvánvaló, hogy gyengén stacionárius idősor esetén $D^2(Y_t) = \sigma^2$ konstans minden t esetén.

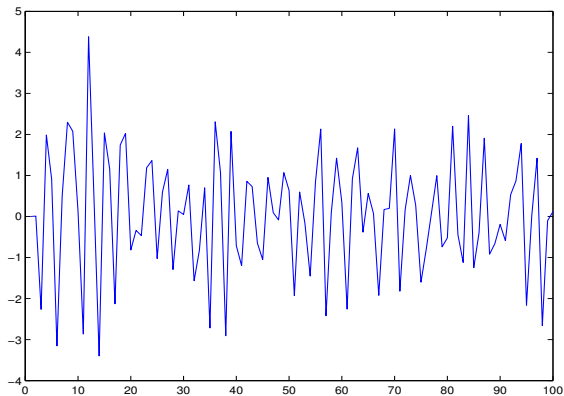


Figure : Példa stacionárius idősorra az $y_t = 0,5y_{t-1} + 0,7y_{t-2} + u_t$, $u_t \sim N(0,3)$ stacionárius specifikációból

Legyen

$$Y_{t+1} = \alpha Y_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

ahol $Y_0 = \xi$ valószínűségi változó, (ε_t) pedig i.i.d. sorozat 0 várható értékkel és konstans σ szórással. Milyen feltételek mellett lesz a folyamat stacionárius?

Megoldás: Iterálva az egyenletet adódik, hogy

$$Y_{t+1} = \alpha Y_t + \varepsilon_t = \alpha(\alpha Y_{t-1} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = \sum_{k=0}^t \alpha^k \varepsilon_{t-k} + \alpha^{t+1} Y_0.$$

Tehát

$$EY_{t+1} = \alpha^{t+1} EY_0,$$

ami akkor lesz t -től független, ha vagy $\alpha = 1$ vagy $EY_0 = 0$. Az $\alpha = 1$ eset a véletlen bolyongás esete, ezzel most nem foglalkozunk. Tehát azt kell feltennünk, hogy $EY_0 = 0$, és ekkor $EY_t = 0$ minden t esetén.

Másrészt

$$EY_{t+1}^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^t \alpha^{2k} + \alpha^{2t+2} EY_0^2$$

és

$$EY_t^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^{2k} + \alpha^{2t} EY_0^2.$$

Így az $EY_{t+1}^2 = EY_t^2$ egyenlőség minden t esetén akkor áll fenn, ha

$$\alpha^{2t} EY_0^2 = \alpha^{2t+2} EY_0^2 + \sigma^2 \alpha^{2t},$$

azaz

$$EY_0^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

feltéve, hogy $|\alpha| < 1$. Azaz $EY_t = 0$ és $|\alpha| < 1$ szükséges a gyenge stacionaritáshoz, és ekkor

$$EY_t^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \quad \forall t \in T.$$

Vajon elegendő is ez a feltétel a gyenge stacionaritáshoz? Ehhez a

$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k})$$

autokovariancia függvény eltolásinvarianciáját kell vizsgálnunk.

Mivel

$$Y_{t+k}Y_t = (\alpha^k Y_t + \sum_{i=1}^k \alpha^i \varepsilon_{t+k-i})Y_t,$$

így

$$\begin{aligned} E(Y_{t+k}Y_t) &= \alpha^k EY_t^2 + E[Y_t(\varepsilon_{t+k-1} + \alpha\varepsilon_{t+k-2} + \dots + \alpha^{k+1}\varepsilon_t)] = \\ &= \alpha^k \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}, \end{aligned}$$

ami valóban csak k függvénye, tehát a feltétel elegendő is.

Stacionaritási jellemzők becslése a mintából

Csak sokasági szemléletben becsülhetők, a mintából történő becslésük reménytelen, ezért fontos a stacionaritás kérdése!

- várható érték becslése: a szokásos tapasztalati mintaátlag ($\hat{\mu}$)
- szórásnégyzet becslése: a szokásos tapasztalati szórásnégyzet ($\hat{\sigma}_2$)
- kovariancia becslése: az autokovariancia függvény tapasztalati úton való becslésével, azaz

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \hat{\mu})(y_{t+k} - \hat{\mu})$$

- Korreláció becslése: a

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\sigma}_2}$$

tapasztalati autokorreláció (ACF) függvény segítségével.

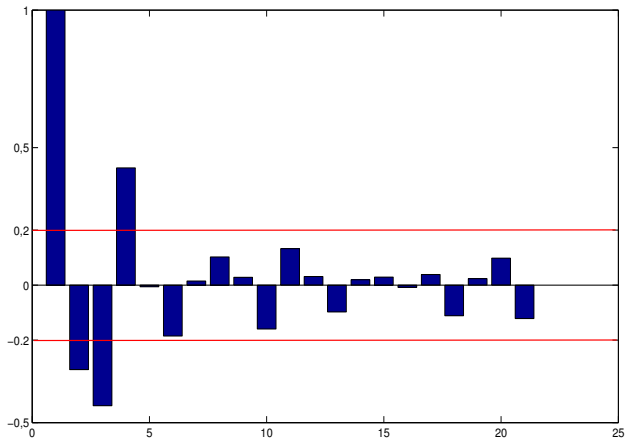


Figure : Példa stacionárius idősor autokorreláció függvényére

Parciális autokorreláció függvény - PACF

Parciális korreláció: két változó közötti kapcsolat erőssége akkor, ha közöttük a megadott változókon keresztül terjedő hatásokat kiszűrjük.

A két változónk most két különböző időpont, a kiszűrt változók pedig a két időpont közötti időpontok (mint v.v-k).

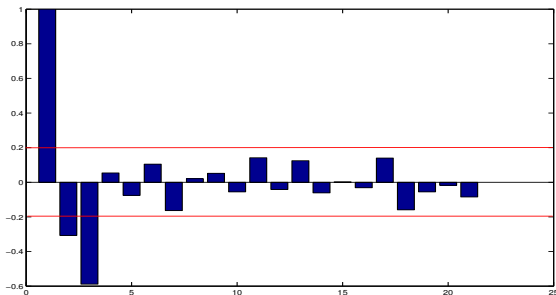


Figure : Példa stacionárius idősor parciális autokorreláció függvényére

A statisztikai próba hipotézisei:

$$H_0 : \rho_k = 0 \quad \text{és} \quad H_1 : \rho_k \neq 0$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a normális eloszlással való közelítés megfelelő lesz, így a próbastatisztika

$$\frac{\hat{\rho}_k}{1/\sqrt{T}} \sim N(0, 1).$$

Elfogadási tartomány:

$$[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$$

A korrelogram ábrájáról könnyen leolvasható, hogy a kapott autokorrelációs értékek ebbe a sávba esnek-e, vagy sem.

Az előző módszer persze csak egyenkénti vizsgálatra jó! Ha egyszerre tekintjük az összes együttható szignifikanciáját, akkor az elsőfajú hibák kumulálódása miatt erejét veszti a teszt! Helyette tehát összetettebb tesztet kell alkalmaznunk.

A statisztikai próba hipotézisei:

$$H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_k = 0 \quad \text{és} \quad H_1 : \exists i : \rho_i \neq 0$$

A legnépszerűbb statisztikai teszt a fenti nullhipotézis ellenőrzésére az ún. Ljung-Box teszt, melynek tesztstatisztikája és eloszlása:

$$Q = T(T + 2) \sum_{i=1}^k \frac{\hat{\rho}_i^2}{T - i} \sim \chi_k^2$$

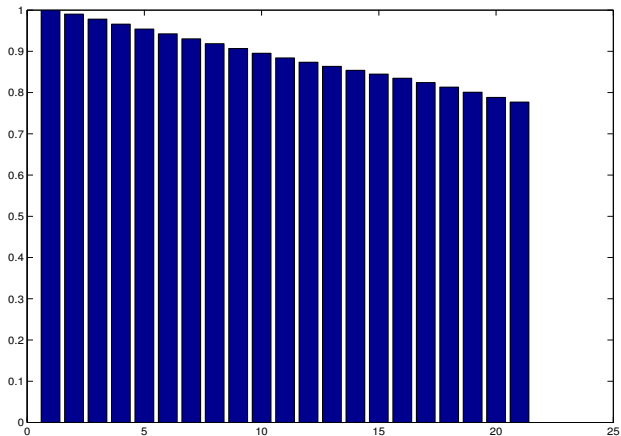


Figure : A MOL idősor autokorreláció függvénye

- az idősor grafikus vizsgálata (pl. trendet tartalmazó idősor nyilvánvalóan megsérti a gyenge stacionaritás várható értékének állandóságára vonatkozó feltételét)
- a korrelogram lecsengésének vizsgálata (stacioner idősorok esetén a korrelogram tipikusan lecsengő, míg nem-stacioner esetben ez nem teljesül)
- statisztikai tesztek a stacionaritás vizsgálatára (Dickey-Fuller és augmented Dickey-Fuller tesztek) - ezen tesztek tárgyalásával később fogunk foglalkozni

Tehát két fő feladatunk van:

Nem-stacionárius idősort alkalmas transzformációval stacionáriussá tenni

- trend szűrés - determinisztikus és sztochasztikus eset
- szezonális szűrés
- periodicitás szűrés

Stacionárius idősorok modellezése, becslése és előrejelzése

- Lineáris modellek: AR, MA és ARMA
- Nemlineáris modellek: ARCH és GARCH

Determinisztikus trend szűrése - 1. módszer

Mozgó átlagolás: a trendet az eredeti idősor dinamikus átlagaként állítjuk elő. Tegyük fel, hogy idősorunk T hosszú, és legyen k a mozgó ablak szélessége. Képezzük ekkor az

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + \dots + Y_k}{k}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{Y_2 + \dots + Y_{k+1}}{k}$$

\vdots

$$\bar{Y}_{T-k+1} = \frac{Y_{T-k+1} + \dots + Y_T}{k}$$

átlagokat. Az átlagolás hatására eltűnik mind a véletlen hatás, mind a szezonális ingadozás az adatsorból, a mozgó átlagok pedig a trend közelítő értékeit adják. Ezeket az értékeket kivonva az eredeti idősorból a trendhatás megszűnik.

Analitikus trendszámítás: az idősor grafikonja alapján választjuk a trendfüggvény alakját, majd ennek ismeretlen paramétereit a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. Néhány speciális eset:

- lineáris trend: $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t$ alakban keresendő (egyenletes fejlődés)
- polinomiális trend: $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$ alakban keresendő (változó intenzitású fejlődés)
- exponenciális trend: $\hat{y}_t = b_0 b_1^t$ alakban keresendő (relatív változás állandóságának feltételezése esetén)
- hiperbolikus trend: $\hat{y}_t = \frac{1}{b_0 + b_1 t}$ alakban keresendő (halálozási arányszámok)
- logisztikus trend: $\hat{y}_t = \frac{k}{1 + b e^{-at}}$ alakban keresendő (népesség-növekedés, gyártási adatsorok)

Összességében a determinisztikus trendet tartalmazó idősorokat trendstacioner folyamatoknak nevezzük.

Ebben az esetben az előző módszerek már nem működnek.

Új trükk: differenciázás művelete, mely egy új, transzformált idősort képez az eredeti idősor t -edik és $(t - 1)$ -edik elemének különbségéként.

Például, ha az idősorunk

$$Y_t^{(S)} = \alpha + Y_{t-1}^{(S)} + X_t, \quad Y_0 = 0$$

alakú, ahol X_t maga stacionárius folyamat, akkor

$$Y_t' = Y_t^{(S)} - Y_{t-1}^{(S)}$$

a differenciázott folyamat, mely már stacionárius lesz.

Mire jó a differenciálás?

Sztochasztikus lineáris trend szűrésére jó, de másfajta trendfüggvényt nem tud kiszűrni az adatokból. Magasabbrendű trendfüggvények kezelésére a többszöri differenciálás művelete lesz a megoldás.

Definíció

Egy idősort d -ed rendben integrált idősornak nevezünk, ha d -ed rendű differenciázottja már stacionárius idősor. Jele: $I(d)$.

Természetesen mint mindent, úgy ezt is, a korábban már említett statisztikai tesztek (DF és ADF tesztek) segítségével igazolni kell. Ezekről majd később lesz szó.

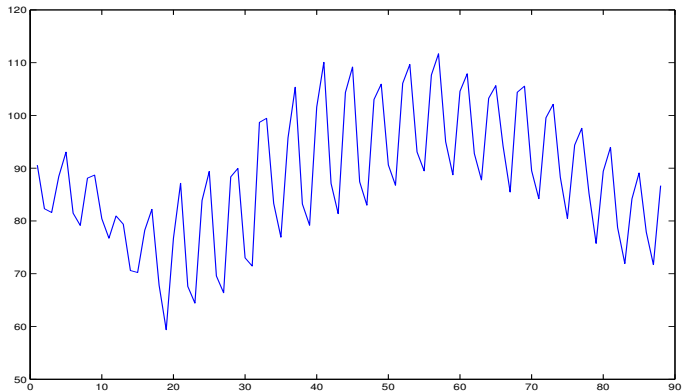


Figure : Villamosenergia adatok

Szezonális hullámzások szűrése

Tegyük fel, hogy idősorunkban trendhatás már nem érvényesül. Ekkor a modellünk

$$Y_{ij} = \bar{Y} + d_j + X_{ij}$$

alakú, ahol X_{ij} stacionárius véletlen hatás, d_j a szezonális komponens, és

$$\bar{Y} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Y_{ij},$$

ahol n a periódusok száma (pl. évek), m pedig az ezen belüli szakaszok (pl. hónapok, negyedévek) száma. A véletlen hatás kiküszöbölése érdekében szezononként átlagolunk:

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij}.$$

Ekkor $\bar{Y}_j = \bar{Y} + \hat{d}_j$, azaz a szezonális eltérés becslése nem más, mint az $\bar{Y}_j - \bar{Y}$ különbség.

LINEÁRIS MODELLEK

Lineáris modellek - $AR(p)$

Jelölje z az időeltolás operátort, azaz $zx_t = x_{t-1}$ bármely t esetén. Ekkor $z^j x_t = x_{t-j}$, és bármely $A(s) = \sum_{i=0}^p \alpha_i s^i$ polinomra

$$A(z)x_t = \sum_{i=0}^p \alpha_i x_{t-i}$$

Tegyük fel mostantól, hogy a folyamat mindig 0 várható értékű.

Definíció

Az (ε_t) , $t \in \mathbb{Z}$ v.v-sorozatot fehérzajnak nevezünk, ha $E(\varepsilon_t) = 0$, $D^2(\varepsilon_t) = \sigma^2 \forall t$, és $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, ha $t \neq s$.

Definíció

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ folyamat $AR(p)$ folyamat, ha előáll

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

alakban, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ paraméterek, (ε_t) pedig fehérzaj folyamat.

Könnyen látható, hogy az

$$A(s) = 1 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_p s^p$$

jelöléssel a folyamat az $A(z)X_t = \varepsilon_t$ kompakt alakban is felírható, ahol z az időeltolás operátora.

Tétel

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ $AR(p)$ folyamat stacionárius, ha az $A(s)$ polinom gyökei az egységkörön kívülre esnek.

Mivel a folyamat 0 várható értékű, így az autokovarianciák kiszámításához csak a

$$\text{Cov}(X_{t-k}, X_t) = \text{E}(X_{t-k}X_t) = \gamma_k$$

értékeket kell meghatároznunk $k \geq 0$ esetén, hiszen γ szimmetrikus, azaz $\gamma_k = \gamma_{-k}$.

A folyamatot meghatározó (1) egyenletet megszorozva X_{t-k} -val, majd várható értéket véve az alábbi, ún. *Yule-Walker egyenletrendszer* adódik:

$$\begin{aligned}k = 0 : & \quad \gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_p\gamma_p = \sigma^2 \\k = 1 : & \quad \gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \dots + \alpha_p\gamma_{p-1} = 0 \\& \quad \vdots \\k = p : & \quad \gamma_p + \alpha_1\gamma_{p-1} + \dots + \alpha_p\gamma_0 = 0 \\k > p : & \quad \gamma_k = -\alpha_1\gamma_{k-1} - \dots - \alpha_p\gamma_{k-p}\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az $A(s)$ polinomnak nincs 1 abszolútértékű gyöke.

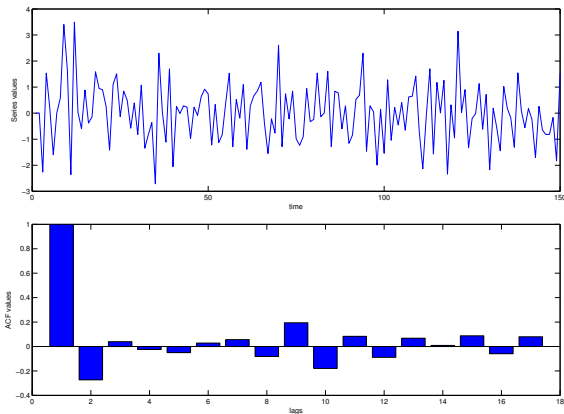


Figure : $AR(2)$ folyamat és autokorreláció függvénye

Fehérzajból egyszerűen kikeverhető folyamatok.

Definíció

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ folyamat MA(q) folyamat, ha előáll

$$X_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

alakban, ahol $\beta_0, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ paraméterek, (ε_t) pedig fehérzaj folyamat.

Erős és gyenge értelemben is stacionárius a folyamat, továbbá

$$\begin{aligned} k = 0 : \quad \gamma_0 &= \sum_{j=0}^q \beta_j^2 \\ 0 < k \leq q : \quad \gamma_k &= \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} \\ k > q : \quad \gamma_k &= 0 \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ paraméterek egyértelműen meghatározzák a $(\gamma_0, \dots, \gamma_q)$ sorozatot. Igaz-e ez fordítva is?

Tekintsük ehhez a következő két folyamatot:

$$X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$Y_t = \beta\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor nyilván $\beta \neq 1$ esetén a két folyamat különbözik, viszont autokovariancia függvényükre ugyanaz a

$$\gamma_0 = 1 + \beta^2, \quad \gamma_1 = \beta, \quad \gamma_k = 0, \quad k \geq 2$$

előállítás adódik, tehát az állítás megfordítása már nem igaz.

Viszsgáljuk még egy kicsit az előbbi két folyamatot. Visszafejtve a rekurziókat adódik, hogy egyrészt

$$\varepsilon_t = X_t - \beta\varepsilon_{t-1} = X_t - \beta(X_{t-1} - \beta\varepsilon_{t-2}) = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^k X_{t-k},$$

másrészt

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{\beta}(Y_t - \varepsilon_{t-1}) = \frac{1}{\beta} \left(Y_t - \frac{1}{\beta}(Y_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) \right) = \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\beta^{k+1}} Y_{t-k}. \end{aligned}$$

Mindkét esetben akkor létezik az előállítás, ha a jobb oldali sor konvergens. Ez az első esetben a $|\beta| < 1$ feltételt, míg a második esetben a $|\beta| > 1$ feltételt jelenti.

Lineáris modellek - MA(q)

Azaz β értékétől függ, hogy melyik folyamatból tudjuk a fehérzajt rekonstruálni. Ez a megfigyelés vezet el a mozgóátlag folyamatok egy fontos tulajdonságához.

Definíció

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ MA(q) folyamat invertálható, ha a

$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_q s^q$$

polinom gyökei az egységkörön kívülre esnek.

Tétel (Wold)

Ha valamely $(\gamma_0, \dots, \gamma_q)$ sorozathoz létezik olyan $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ sorozat, melyre az autokovariancia egyenletek teljesülnek, akkor létezik olyan MA(q) folyamat, melynek éppen ez a $(\gamma_0, \dots, \gamma_q)$ sorozat az autokovariancia függvénye. Továbbá ha valamely (X_t) folyamatra $\gamma_k = 0$ $k \geq q$ esetén, akkor (X_t) MA(q) folyamat.

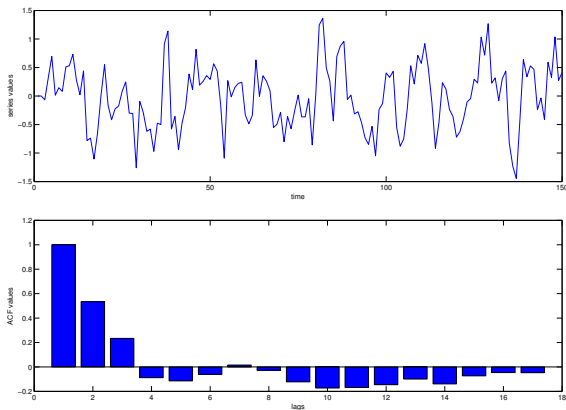


Figure : MA(3) folyamat és autokorreláció függvénye

Definíció

Legyen adott egy ψ_j , $j \in \mathbb{Z}$ sorozat, melyre $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$. Az

$$Y_t = Y_t(\psi, X) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

folyamatot az X_t gyengén stacionárius folyamatból a ψ_j -k által adott lineáris szűrővel definiált folyamatnak nevezzük.

Ha $\psi_j = 0$, $j < 0$, akkor a szűrő kauzális, avagy fizikailag megvalósítható.

Pl.: az $MA(\infty)$ folyamatok éppen azok, melyek előállnak fehérzajra alkalmazott szűrő kimeneteként.

Tekintsük az alábbi

$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1}$$

AR(1) folyamatot, ahol (ε_t) fehérzaj, $|\alpha| < 1$. Láthatóan

$$(1 - \alpha z)X_t = \varepsilon_t,$$

azaz formálisan felírhatjuk, hogy

$$X_t = \frac{1}{1 - \alpha z} \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z^i \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i}$$

a geometriai sor összegképletét felhasználva, vagyis megkaptuk az MA(∞) előállítást.

Ezt a módszert általánosabb folyamatokra is kiterjesztjük, mellyel a mérnöki gyakorlat egyik legfontosabb stacionárius folyamat- osztályához jutunk.

Definíció

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ folyamat ARMA(p, q) folyamat, ha előáll

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \beta_0 \varepsilon_t + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

alakban, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_0, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ paraméterek, (ε_t) pedig fehérzaj folyamat.

Könnyen látható, hogy az

$$A(s) = 1 - \alpha_1 s - \dots - \alpha_p s^p$$

$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_q s^q$$

polinomok segítségével az

$$A(z)X_t = B(z)\varepsilon_t$$

kompakt forma adódik.

A fenti előállítás persze ebben a formában nem egyértelmű, hiszen mindkét oldalra alkalmazva egy alkalmas polinomot, ugyanannak a folyamatnak egy másik előállítását kapjuk. Ennek elkerülése végett feltesszük, hogy

A és B relatív prímek a valós együtthatós polinomok számtestje felett.

Tétel

Ha $A(z)$ gyökei az egységkörön kívülre esnek, akkor létezik a (3) egyenletnek eleget tevő (X_t) folyamat olyan, melynek van kauzális $MA(\infty)$ előállítása. Az ilyen ARMA folyamatokat stabil folyamatoknak nevezzük.

Ha $B(z)$ gyökei az egységkörön kívülre esnek, akkor (X_t) invertálható és létezik $AR(\infty)$ előállítása.

Lineáris modellek - ARMA(p, q)

Az autokovarianciák előállításához legyen $c_k = E(X_t X_{t-k})$ és $d_k = E(X_t \varepsilon_{t-k})$. Ekkor $d_k = 0$, ha $k < 0$, hiszen X_t nem függ a jövőtől, továbbá

$$k = 0 : d_0 = \beta_0$$

$$k = 1 : d_1 = \alpha_1 d_0 + \beta_1$$

\vdots

$$k = p : d_p = \alpha_1 d_{p-1} + \dots + \alpha_p d_0 + \beta_p$$

és

$$k = 0 : c_0 = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_p c_p + \beta_0 d_0 + \dots + \beta_q d_q$$

$$k = 1 : c_1 = \alpha_1 c_0 + \dots + \alpha_p c_{p-1} + \beta_1 d_0 + \dots + \beta_q d_{q-1}$$

\vdots

$$k = q : c_q = \alpha_1 c_{q-1} + \dots + \alpha_p c_{q-p} + \beta_q d_0$$

$$k > q : c_k = \alpha_1 c_{k-1} + \dots + \alpha_p c_{k-p}$$

Lineáris modellek - $ARMA(p, q)$

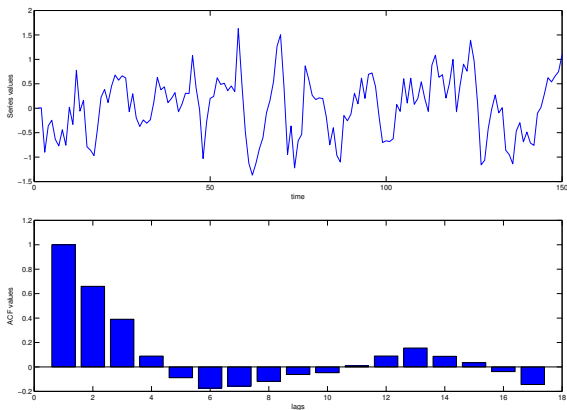


Figure : $ARMA(2, 3)$ folyamat és autokorreláció függvénye