

13-14. előadás
Diszkrét idejű tömegkiszolgálási modellek
Poisson-folyamat
Folytonos idejű Markov-láncok
Folytonos idejű sorbanállás

2016. november 28. és december 5.

A diszkrét idejű Markov láncok elméletében tanultak gyakorlati alkalmazhatóságáról szeretnénk egy klasszikus példát mutatni.

- A modellben az időt egységekre osztjuk.
- A kiszolgálóhoz tartozó sorban tetszőlegesen nagy számú igény várakozhat,
- a szolgáltatáshoz való hozzáférés érkezési sorrendben történik (FCFS).
- A rendszer tervezőjét a várakozási sor hosszának alakulása,
- a felhasználókat az igények várakozási ideje érdekli.

Evolúciós egyenlet a sorhosszra

Tegyük fel, hogy a rendszerben a kezdő (nulladik) időpillanatban X_0 igény van. Jelölje

- X_n a sorhosszt az n -dik időpillanat végén
- Y_n az n -dik időegységben érkezett új igények számát
- V_n az n -dik időegységben a rendszer által kiszolgálni képes igények számát.

Tegyük fel, hogy Y_n és V_n i.i.d. sorozatok, egymástól függetlenek, és az (Y_n, V_n) pár független X_0 -tól. Feltesszük azt is, hogy az n -dik időpillanatban érkező igényeket csak a következő időegység alatt lehet kiszolgálni. Világos, hogy $S = \mathbb{N}$.

Ekkor a sorhossz változását az

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$$

evolúciós egyenlet írja le, ahol $a^+ = \max(a, 0)$.

Állítás

X_n homogén Markov lánc, átmenetvalószínűségeire pedig

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_1 = j | X_0 = i) = P((X_0 - V_1)^+ + Y_1 = j | X_0 = i) = \\ &= P((i - V_1)^+ + Y_1 = j) \end{aligned}$$

Tétel

Ha a Π átmenetvalószínűség mátrixban a fő- és mellékátlóbeli elemek mind pozitívak, továbbá

$$E(Y_1) < E(V_1) < \infty$$

(azaz átlagosan több igényt tud kiszolgálni a rendszer, mint amennyi érkezik), akkor az X_n Markov lánc stabil.

A stacionárius eloszlás a szokásos $p = p\Pi$ egyenletből számolható.

Legyen

$$P(V_n = 1) = p = 1 - P(V_n = 0), \quad 0 < p < 1,$$

$$P(Y_n = 1) = q = 1 - P(Y_n = 0), \quad 0 < q < 1.$$

Ekkor

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - q & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & r & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & r & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & r & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ahol

- $a = (1 - q)p$ (0 igény érkezik, 1 kiszolgálás)
- $b = (1 - p)q$ (1 igény érkezik, 0 kiszolgálás)
- $r = 1 - a - b$ (maradék).

A lánc stabil, ha $q = E(Y_1) < E(V_1) = p$.

A stacionárius eloszlás meghatározásához a $w = w\Pi$ egyenletet kellene megoldanunk, de ez most egy ∞ sok egyenletből álló rendszer...

Ennek ellenére mégis megoldható (a speciális struktúra miatt), megoldásként pedig azt kapjuk, hogy

$$w_0 = 1 - \frac{q}{p}, \quad \text{és} \quad w_i = w_0 \cdot \frac{q}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

A stacionárius állapotban tehát a sorhossz várható értéke

$$E(X_\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot w_k = \frac{(1-q)q}{p-q}.$$

Bináris (V_n) sorozat esetén a stacionárius eloszláshoz tartozó első momentum, vagyis a sorhossz várható értéke, általános esetben is meghatározható:

Tétel

Ha a stacionárius eloszláshoz tartozó második momentum véges és V_n bináris, akkor

$$E(X_\infty) = \frac{E(Y_1)(1 - 2E(Y_1)) + E(Y_1^2)}{2(E(V_1) - E(Y_1))}$$

A felhasználók persze nem a sor hosszára, hanem a rendszer átlagos feldolgozó képességére kíváncsiak. Szeretnénk tehát most kiszámítani az igények átlagos késleltetését, azaz azt az időt, melyet a rendszerben töltenek. Jelölje

- D_n az első n időegységben beérkezett igények késleltetését,
- R_n az ezen idő alatt beérkezett igények számát

Ekkor az átlagos késleltetést a

$$\bar{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{R_n}$$

sztochasztikus határérték definiálja, amennyiben létezik.

Állítás (Little-formula)

Ha Y_n i.i.d. sorozat, akkor

$$\bar{D} = \frac{E(X_\infty)}{E(Y_1)}$$

POISSON-FOLYAMAT

Gyakorlati alkalmazásokban sűrűn előfordul a Poisson eloszlás: sok, kis várható értékű, független esemény eloszlásaként azonosítottuk a valószínűségszámítási tanulmányaink elején. Emlékeztetőül az eloszlás:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad E\xi = \lambda, \quad D^2\xi = \lambda$$

Azt is láttuk, hogy ez az eloszlás megjelenik mint a binomiális eloszlás határértéke bizonyos feltételek mellett.

Tömegkiszolgálási problémákban a bizonyos idő alatt keletkezett igények száma ugyanilyen okok miatt általában Poisson eloszlású.

Ezért fogunk most mi is ilyen eloszlású folyamatokkal foglalkozni.

Definíció

Legyen $\{T_i\}_{i \in \mathbb{R}}$, $T_{i-1} < T_i < T_{i+1}$ egy, a valós számegyenesen elhelyezkedő, véletlen pontsorozat. Pontfolyamatnak nevezzük az ebből az

$$X_t = \#\{i : 0 \leq T_i < t\} \quad (t > 0)$$

összefüggéssel kapott folytonos idejű sztochasztikus folyamatot, ahol a $\#$ operátor az utána álló halmaz elemeinek számát adja meg, azaz X_t a $[0, t)$ intervallumba eső pontok száma.

Definíció

Legyen $\lambda > 0$ rögzített. λ intenzitású homogén Poisson folyamatnak nevezünk egy olyan pontfolyamatot, melyre X_t eloszlása $\text{Poisson}(\lambda t)$, továbbá a folyamat független és stacionárius növekményű.

Azaz

$$X_0 = 0, P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, (t > 0, k \in S)$$

minden $n \geq 2$ egészre és $0 < t_1 < \dots < t_n$ sorozatra az

$$X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

v.v-k teljesen függetlenek (független növekményűség)

minden $s, t < 0$ esetén az

$$X_t - X_0 \quad \text{és} \quad X_{t+s} - X_s$$

v.v-k eloszlása megegyezik (stacionárius növekményűség).

Könnyen ellenőrizhető, hogy $X_t - X_s$ eloszlása $\text{Poisson}(\lambda(t - s))$, továbbá

$$m_t = E(X_t) = \lambda t \quad (t \geq 0),$$

azaz λ megadja az egységnyi idő alatt érkező igények átlagos számát.

Hogyan hozhatunk létre olyan véletlen pontsorozatot, amely által meghatározott pontfolyamat Poisson folyamat?

Tétel

Legyen $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ egymástól független, λ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k sorozata, és a $\{T_k\}$ véletlen pontsorozatot definiálja a

$$T_k = \sum_{j=1}^k Y_j \quad (k = 1, 2, \dots)$$

összefüggés. Ekkor a generált $(X_t, t \geq 0)$ pontfolyamat λ intenzitású Poisson folyamat.

Tehát, ha független $\exp(\lambda)$ eloszlású időközönként érkeznek az igények (azaz átlagosan $1/\lambda$ időegységenként), akkor a t -ig beérkező igények X_t száma $\text{Poisson}(\lambda t)$ eloszlású (azaz időegységenként átlagosan λ igény érkezik).

Igaz a tétel megfordítása is, azaz belátható, hogy λ intenzitású homogén Poisson folyamat esetén a pontok távolságai független, λ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k.

Ebből az következik, hogy ez a tulajdonság egyértelműen jellemzi a Poisson folyamatot és annak lehetséges ekvivalens definíciójaként szolgálhat.

Definíció

Legyen $f(t)$ és $g(t)$ két, a nulla valamely jobb oldali környezetében értelmezett valós függvény olyan, hogy a 0-ban léteznek a jobb oldali határértékek. Azt mondjuk, hogy $t \rightarrow 0+$ esetén $f(t) = o(g(t))$, ha

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Tétel

Legyen $(X_t, t \geq 0)$ λ intenzitású Poisson folyamat. Ekkor

- $P(X_t = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$
- $P(X_t = 1) = \lambda t + o(t)$ (sűrűségi feltétel)
- $P(X_t \geq 2) = o(t)$ (ritkasági feltétel).

A Poisson folyamat további tulajdonságai

Azaz kicsi annak a valószínűsége, hogy egy rövid intervallumba legalább két pont esik, míg annak a valószínűsége, hogy pontosan egy pont esik ide, körülbelül az intervallum hosszának λ -szorososa.

A tétel megfordításával kapjuk a korábban már említett ekvivalens definíciót a Poisson folyamatra:

Tétel

Ha az $(X_t, t \geq 0)$ pontfolyamatra teljesül a sűrűségi és ritkasági feltétel, valamint független és stacionárius növekményű a folyamat, akkor a folyamat λ intenzitású homogén Poisson folyamat.

FOLYTONOS IDEJŰ MARKOV LÁNCOK

Folytonos idejű Markov lánc

Legyen $(X_t, t \geq 0)$ a nemnegatív számegegyenesen értelmezett folyamat, továbbá $S = \{1, 2, \dots\}$.

Definíció

Az X_t folyamatot folytonos idejű Markov láncnak nevezzük, ha minden $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ és x_0, x_1, \dots, x_n esetén

$$\begin{aligned} P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) &= \\ &= P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \end{aligned}$$

amennyiben a feltételes valószínűségek léteznek.

Továbbra is csak homogén láncokkal foglalkozunk, azaz

$$p_{ij}(t) = P(X_{t+s} = j | X_s = i) \quad (i, j \in S, t \geq 0)$$

A homogén Poisson folyamat folytonos idejű homogén ML.

Folytonos idejű Markov lánc

A folytonos idejű Markov láncokra is érvényes a Chapman- Kolmogorov egyenlet, azaz

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)p_{kj}(s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

Az átmenetmárixra bevezetve a $\Pi(t) = [p_{ij}(t)]$ jelölést adódik, hogy

$$\Pi(s+t) = \Pi(s)\Pi(t) = \Pi(t)\Pi(s) \quad (s, t \geq 0).$$

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (1)$$

Azaz azt szeretnénk, hogy kis idő alatt a folyamat nagy valószínűséggel ugyanabban az állapotban maradjon.

Tétel

Ha egy Markov láncra teljesül (1), akkor a $p_{ij}(t)$ függvények differenciálhatók $t \geq 0$ esetén ($t = 0$ esetén jobbról).

Definíció

Jelölje $q_{ij} = p'_{ij}(0+)$. A

$$\mathbf{Q} = [q_{ij}] = \Pi'(0+)$$

mátrixot a folyamat rátamátrixának vagy infinitezimális generátorának nevezzük.

A Poisson folyamat rátamátrixa $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.

A rátamátrix jelentőségét az alábbi összefüggésekkel lehet megvilágítani: a definíció alapján

$$q_{ij}t - p_{ij}(t) + \delta_{ij} = o(t),$$

amiből

$$P(X_t = j | X_0 = i) = p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t) \quad (i \neq j)$$

$$P(X_t \neq i | X_0 = i) = 1 - p_{ii}(t) = -q_{ii}t + o(t)$$

$$P(X_t = i | X_0 = i) = p_{ii}(t) = 1 + q_{ii}t + o(t).$$

Azaz az i állapotból a $j \neq i$ állapotba t idő alatt való való átmenet valószínűsége kis t -re közel arányos t -vel, és az arányossági tényező éppen q_{ij} .

Igazolható, hogy az i állapotban eltöltött idő $-q_{ii}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és a lánc i -ből $j \neq i$ állapotba éppen $-q_{ij}/q_{ii}$ valószínűséggel lép át. A Markov tulajdonság alapján az állapottartási idők függetlenek.

Folytonos idejű Markov lánc

Tegyük fel, hogy a Markov lánc véges állapotterű, azaz $S = \{0, 1, \dots, N\}$. A láncot stabilnak nevezzük, ha létezik határeloszlása és ez független a kezdeti eloszlástól, azaz ha minden $i, j \in S$ esetén

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j \quad \text{és} \quad \sum_{j=0}^N p_j = 1.$$

Definíció

Az X_t ML irreducibilis, ha minden $i, j \in S$ állapothoz létezik $t_{ij} > 0$ olyan, hogy $p_{ij}(t_{ij}) > 0$.

Tétel

Ha \mathbf{Q} mellékátlóbeli elemei mind pozitívak, akkor a Markov lánc irreducibilis.

Tétel

Folytonos idejű, véges állapotterű, irreducibilis Markov lánc stabil.

A határeloszlás kiszámítására több lehetőségünk is van:

Tétel

Ha $P = \{p_j\}$ egy véges állapotú stabil Markov lánc határeloszlása, akkor minden $t \geq 0$ esetén

$$P = P\Pi(t),$$

továbbá

$$PQ = 0,$$

ahol 0 a nullvektort jelöli.

SZÜLETÉSI ÉS HALÁLOZÁSI FOLYAMATOK

Olyan speciális folytonos idejű Markov láncok, melyeknél állapot-átmenet csak a szomszédos állapotokba történhet. Fontos szerepük van a sorbanállási rendszerekben.

Definíció

Egy $(X_t, t \geq 0)$ Markov láncot születési és halálozási folyamatnak nevezünk, ha

$$p_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad (i, j \in S)$$

$$p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t), \quad (i \in S)$$

$$p_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o(t), \quad (i \in S - \{0\})$$

$$p_{i,i}(t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), \quad (i \in S)$$

$\mu_0 = 0$ és létezik k, l olyanok, hogy $\lambda_k > 0$ és $\mu_l > 0$.

Ha minden i esetén $\mu_i = 0$, akkor tiszta születési, ha pedig minden i esetén $\lambda_i = 0$, akkor tiszta halálozási folyamatról beszélünk.

Születési és halálozási folyamatok

Az irreducibilitás biztosítása érdekében feltesszük, hogy $\lambda_i > 0$, ($i \in S$), és $\mu_i > 0$, ($i \in S - \{0\}$). Tegyük még fel azt is, hogy $\sup_{i \in S} (\lambda_i + \mu_i) < \infty$.

A rátamátrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Jelölje a stacionárius eloszlást $P = \{p_i\}$. Ekkor a $PQ = 0$ egyenletrendszer megoldása

$$p_i = \pi_i p_0, \quad \text{ahol} \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \quad \text{és} \quad p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i} \quad (i \in S).$$

Az i állapot tartási idejének eloszlása $\exp(-(\lambda_i + \mu_i)t)$, az $i \rightarrow i + 1$ átmenet valószínűsége $\lambda_i / (\lambda_i + \mu_i)$, az $i - 1 \rightarrow i$ átmenet valószínűsége $\mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$.

FOLYTONOS IDEJŰ SORBANÁLLÁSI MODELLEK

A fogalom ugyanaz, mint a diszkrét idejű rendszereknél. Azonban most

- az igények tetszőleges időpillanatban érkehetnek,
- kiszolgálásuk is bármelyik időpillanatban befejeződhet,
- feltesszük, hogy az egyes igények kiszolgálási idői egymástól és az érkezési folyamatától függetlenek, eloszlásuk megegyezik,
- az igények érkezései között eltelt idő független és azonos eloszlású.

Definíció

Egy pontfolyamatot felújítási folyamatnak nevezünk, ha a szomszédos pontok közötti távolságok független, azonos eloszlású, de egyébként tetszőleges valószínűségi változók.

A Poisson folyamat például olyan felújítási folyamat, melynél a pontok távolságai λ paraméterű exponenciálisok.

Kendall-féle kódrendszer:

$$A/B/m/K/M,$$

ahol

- A a szomszédos igények beérkezési között eltelt idő eloszlásának kódja
- B a kiszolgálási idő eloszlásának kódja
- m a rendszerben lévő kiszolgáló egységek száma
- K a kiszolgálókban és a várakozási sorban álló igények maximális száma
- M az igényforrások száma

A és B lehetséges értékei:

- M - Markovi vagy emlékezet nélküli, azaz exponenciális eloszlás
- D - determinisztikus, azaz konstans eloszlás
- G - általános (tetszőleges) eloszlás.

Veszteséges kiszolgálás: $M/M/1/(N + 1)$ rendszer, ahol az igények λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek, a kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k. Ha az érkező igény a sort megtelve találja, akkor elvész. - Tipikus alkalmazása a születési és halálzási folyamatoknak a sorhosszra $\lambda_i = \lambda, (i = 0, \dots, N - 1)$ és $\mu_i = \mu, (i = 1, \dots, N)$ szereposztással.

Erlang-probléma: $M/M/N/N$ rendszer, ahol az igények λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek, de nincsenek sorok, azaz ha egy igény nem talál szabad kiszolgálót, akkor elvész. A kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k. - Tipikus alkalmazása ez is a születési és halálzási folyamatoknak a sorhosszra $\lambda_i = \lambda, (i = 0, \dots, N - 1)$ és $\mu_i = i\mu, (i = 1, \dots, N)$ szereposztással.

Az érkezési folyamat továbbra is λ intenzitású Poisson folyamat, kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k, egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Az $N(t)$ sorhossz most végtelen állapotú születési és halálozási folyamat $\lambda_i = \lambda$, ($i = 0, \dots, N - 1$) és $\mu_i = \mu$, ($i = 1, \dots, N$) paraméterekkel. Stacionárius esetben a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

a késleltetés pedig

$$\bar{D} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Az érkezési folyamat továbbra is λ intenzitású Poisson folyamat, de a kiszolgálási idők közös eloszlása tetszőleges nemnegatív értékű v.v. lehet. Egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Az $N(t)$ sorhossz most már nem lesz feltétlenül Markov lánc. Azonban, ha csak egy-egy igény távozásakor nézzük a sorhosszat, akkor tudunk találni egy diszkrét idejű beágyazott Markov láncot.

Részletes számításokra sajnos nincs elég időnk... (Laplace-transzformáció, generátorfüggvények és egyebek alkalmazását igényli).

Az érkezési folyamat tetszőleges felújítási folyamat, a kiszolgálási idők pedig egymástól és az érkezési folyamattól független, μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k, egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Az $N(t)$ sorhossz most sem lesz feltétlenül Markov lánc. Azonban, ha csak egy-egy igény érkezésekor nézzük a sorhosszat, akkor tudunk találni egy diszkrét idejű beágyazott Markov láncot.

Részletes számításokra sajnos nincs elég időnk... (Laplace-transzformáció, generátorfüggvények és egyebek alkalmazását igényli).

KAPACITÁS TERVEZÉSE

Tétel (Hoeffding-egyenlőtlenség)

Legyenek az X_k valószínűségi változók olyanok, amelyekre $P(a_k < X_k < b_k) = 1$ valamilyen a_k, b_k számokra. Ekkor

$$P(S_n - E(S_n) \geq nc) \leq \exp \left\{ -\frac{2n^2 c^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2} \right\}$$

ahol $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Más alakban:

$$P(S_n \geq E(S_n) + t) \leq \exp \left\{ -\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2} \right\}$$