12. előadás - Markov-láncok I.

2016. november 21.

Markov-lánc - definíció

Definíció

Az X_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók sorozatát diszkrét idejű sztochasztikus folyamatnak nevezzük.

Definíció

Legyen $S \subseteq \mathbb{R}$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az X_n, $n \in \mathbb{N}$ folyamat Markov lánc (ML) az S állapottéren, ha X_n értékeit az S halmazban veszi fel, és $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in S$ esetén teljesül a Markov-tulajdonság, azaz

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Azaz a jövő a múlttól csak a jelenen keresztül függ.

Például, egy részecske helyzete egy rácson, vagy egy labdát egymásnak passzolgató játékosok.

1-lépéses átmenetvalószínűség

Jelölje

$$p_n(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

azaz azt a valószínűséget, mely megmondja, hogy az i állapotból a j állapotba mekkora valószínűséggel lépek át egy lépésben. Ezek az ún. 1-lépéses átmenetvalószínűségek.

Pl. az állapotok egy kastély szobái, és véletlenszerűen döntünk arról, hogy melyikbe megyünk át.

Legfontosabb eset: amikor a ML időben állandó viselkedést mutat, azaz a fenti átmenetvalószínűségek csak az állapotoktól ((i,j)-től) függnek, n-től (az időtől) viszont nem függnek. (Úgy is mondhatnánk, hogy a lánc holnap is ugyanúgy fog viselkedni, mint ma, minden csak attól függ, hogy hol vagyunk.)

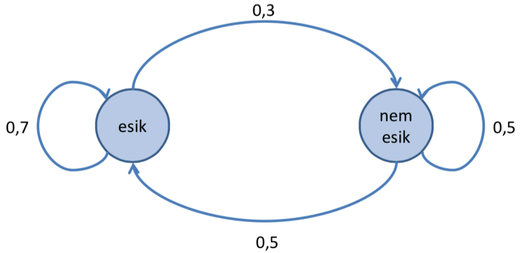
Homogenitás

Definíció

Az X_n, $n \in \mathbb{N}$ ML homogén, ha bármely $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in S$ esetén

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

Például: Londonban az esős és csapadékmentes napok váltakozása (ha ma esik az eső, akkor 70% eséllyel holnap is esik az eső, ha pedig ma nem esik az eső, akkor 50% eséllyel holnap sem esik az eső)



Átmenetvalószínűség mátrix

Definíció

Tegyük fel, hogy a lánc véges állapotterű, azaz $S = \{1, \dots, N\}$. Adott $i, j \in S$ esetén legyen $p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i)$. Ekkor

$$\Pi = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$$

a ML ún. átmenetvalószínűség-mátrixa.

Például: a londoni időjárás példája esetén

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Állítás

Π *sztochasztikus mátrix, azaz elemei nemnegatívak, és minden sorban az elemek összege 1.*

Átmenetvalószínűség mátrix

Állítás

X_0 *kezdeti eloszlása és* Π *már egyértelműen meghatározza a folyamatot.*

Ugyanis: a véges dimenziós eloszlásokra

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) =$$

$$= P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$= p_{i_0} \cdot p_{i_1, i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_n, i_{n-1}}$$

a szorzás-tétel és a Markov-tulajdonság alapján. Tehát a folyamat összes véges dimenziós eloszlása meghatározható, azaz a folyamat egyértelműen meghatározott.

Többlépéses átmenetvalószínűségek

Tegyük most fel, hogy egy üzletkötő bolyong Európában. Tudjuk, hogy a héten Csehországban tartózkodik. Mi a valószínűsége annak, hogy 5 hét múlva Franciaországban lesz?

A feladat megoldásához a

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

többlépéses átmenetvalószínűségek fogalmára van szükségünk.

Állítás

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) = [\Pi^n]_{i,j}$$

Továbbá teljesül a Chapman-Kolmogorov egyenlet, azaz

$$\Pi^n = \Pi^l \Pi^{n-l}.$$

Azaz

$$P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_k P(X_n = j | X_l = k) \cdot P(X_l = k | X_0 = i)$$

Eloszlási operátor

Definíció

Az X_n eloszlását jelölő $q(X_n)$ operátort eloszlási operátornak nevezzük.

Például, tegyük fel, hogy Londonban $0,4$ valószínűséggel esik az eső január 1-én, $0,6$ valószínűséggel pedig nem esik. Hogyan alakul az időjárás az év során?

Azaz $q(X_0) = (0,4; 0,6)$. Mennyi lesz $q(X_1)$ értéke? Mivel

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 | X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) +$$

$$+ P(X_1 = 1 | X_0 = 2) \cdot P(X_0 = 2) = 0,7 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,58,$$

így $q(X_1) = (0,58; 0,42)$. Folytatva az eljárást az összes $q(X_n)$ eloszlás meghatározható.

Tétel

$$q(X_n) = q(X_0)\Pi^n$$

Stabilitás

Definíció

Az X_n ML stabil, ha létezik olyan q_∞ eloszlás, melyre tetszőleges $q(X_0)$ kezdeti eloszlás esetén $\lim_{n\to\infty} q(X_n) = q_\infty$.

Definíció

Az X_n ML irreducibilis, ha bármely állapota bármely állapotból elérhető, azaz tetszőleges $i, j \in S$ esetén létezik olyan $n_{ij} \in \mathbb{N}^+$, hogy $p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.

Állítás

Ha a Π mátrixban a főátló alatti és feletti mellékátlóban csak pozitív elemek vannak, akkor a ML irreducibilis.

Stabilitás

A stabilitás legfőbb akadálya a ciklikus viselkedés. Ha pl. $q(X_0) = (1, 0, 0)$, akkor $q(X_1) = (0, 1, 0)$, $q(X_2) = (0, 0, 1)$, és ez folytatódik ciklikusan, azaz $q(X_n)$ nem tud konvergálni.

Definíció

Az X_n ML aperiodikus, ha tetszőleges $i \in S$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}^+$, hogy bármely $n > N_i$ esetén $p_{ii}^{(n)} > 0$, vagyis N_i lépésszám felett mindig létezik önmagába vezető állapotsorozat.

Állítás

Ha a véges állapoterű X_n ML irreducibilis és aperiodikus, akkor stabil.

Állítás

Véges állapoterű ML esetén ha a Π mátrixban a fő- és mellékátlóbeli elemek is mind pozitívak, akkor a ML irreducibilis és aperiodikus.

Stacionárius eloszlás

Azaz ha X_n ML stabil, akkor bármely $q(X_0)$ kezdeti eloszlás esetén létezik q_∞ olyan, hogy $\lim_{n\to\infty} q(X_n) = q_\infty$. Másrészt láttuk, hogy

$$q(X_{n+1}) = q(X_n)\Pi = q(X_0)\Pi^{n+1},$$

azaz

$$q_\infty = q_\infty \Pi.$$

Tétel

Ha az X_n ML stabil, akkor a q_∞ határeloszlás megoldása a $q_\infty = q_\infty \Pi$ egyenletnek. Másrészt $q = q_\infty$ az egyetlen olyan megoldása a $q = q\Pi$ egyenletnek, mely eloszlás.

Definíció

A $q = (q_i)_{i\in S}$ eloszlást a ML stacionárius eloszlásának nevezzük, ha eleget tesz a $q = q\Pi$ egyenletnek.

Azaz q baloldali sajátvektora a Π mátrixnak 1 sajátértékkel.

Példa

Példa: Londoni időjárás. Láttuk, hogy

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

melyről könnyen látszik, hogy irreducibilis és aperiodikus. Tehát a lánc stabil, és így létezik stacionárius eloszlása. Azaz keresendő q olyan, mely megoldása a $q = q\Pi$ egyenletnek. Legyen $q = (x_1, x_2)$. Ekkor a megoldandó egyenlet

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)$$

alakú. Innen mindkét egyenletből azt kapjuk, hogy $0,5x_2 = 0,3x_1$. De, mivel eloszlást kell kapnunk, így azt is tudjuk, hogy az $x_1 + x_2 = 1$ egyenletnek is teljesülnie kell. Innen már könnyen látszik, hogy a megoldás $q_\infty = q = (5/8; 3/8)$. Azaz hosszútávon a napok $5/8$-a esős, $3/8$-a pedig esőmentes lesz Londonban.

Végtelen állapottér esete - visszatérőség

Mit mondhatunk abban az esetben, ha a lánc állapotere végtelen? Ekkor ugyanis $S = \mathbb{N}$, és így Π végtelen dimenziós mátrix lesz...

Az irreducibilitás és aperiodikusság definíciója persze nem változik, de pl. a Π^2 mátrix kiszámítása már komoly problémákat fog jelenteni. Annak érdekében, hogy ezt kezelni tudjuk, szükségünk lesz néhány új fogalomra.

Jelölje $f_{ij}^{(n)} = P(n$ lépésben először érjük el i-ből j-t)

Definíció

Az $i \in S$ állapot visszatérő, ha 1 valószínűséggel visszajut oda a ML véges sok lépésben, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$.

Állítás

Az $i \in S$ állapot pontosan akkor visszatérő, ha $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.

Végtelen állapottér esete - pozitív visszatérőség

Állítás

Ha az X_n ML irreducibilis és nem visszatérő, akkor bármely $i, j \in S$ esetén $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

Definíció

Az $i \in S$ állapot pozitív visszatérő, ha visszatérő és az

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

átlagos visszatérési idő véges. A ML pozitív visszatérő, ha minden állapota pozitív visszatérő.

Végtelen állapottér esete - stabilitás

Tétel

Ha az X_n végtelen állapotterű ML irreducibilis és aperiodikus, akkor 2 eset lehetséges:

- *ha a ML pozitív visszatérő, akkor stabil, és* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_j}$*;*
- *ha a ML visszatérő vagy nem visszatérő, akkor nem stabil és* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.